

Estimation de courbure via un réseau d'accéléromètres

Mikael CARMONA¹, Nathalie SPRYNSKI¹, Régis PERRIER¹

¹CEA-Leti, MINATEC Campus, 17 avenue des Martyrs, 38054 Grenoble Cedex, France

mikael.carmona@cea.fr

Résumé – Ce papier concerne l'estimation de courbure d'une courbe instrumentée par un réseau d'accéléromètres dont la répartition spatiale sur la courbe est connue. Le principe est basé sur l'approximation par une spline cubique de lissage de la fonction qui décrit l'inclinaison, déduite des capteurs, en fonction de l'abscisse curviligne. La courbure est obtenue par dérivée première de cette fonction. L'originalité des travaux présentés dans ce papier réside dans le choix du paramètre de lissage de la spline cubique. Ce choix est basé sur une condition d'unique maximum local de la courbure qui est une condition importante dans les applications visées de monitoring des structures.

Abstract – Curvature estimation from an accelerometers sensor network with a known spatial distribution is addressed. The principle relies on approximating the tilt function, where a set of tilts comes from the sensors, by a smoothing cubic spline. Thus, the curvature is deduced by considering the derivative of that tilt function with respect to the arclength. Originality of this work concerns the choice of the smoothing parameter. This latter is defined by introducing the assumption of a curvature with only one local maximum. This assumption is satisfied and necessary in the targeted applications concerning structural health monitoring.

1 Introduction et formalisation

Ce papier s'intéresse à l'estimation de la courbure des courbes planes, statiques, et instrumentées par un réseau de N accéléromètres biaxiaux, de répartition spatiale sur la courbe s_1, \dots, s_N connue, et, disposés de sorte à ce qu'un axe soit tangent à la courbe et que l'autre axe soit normal à la courbe (cf. figure 1 pour la schématisation du problème). Les courbes modélisent certaines structures mécaniques : poutres, câbles de ponts, arches, par exemple. A notre connaissance, l'état de l'art sur ces travaux se limitent aux articles pionniers [1, 2].

Pour comprendre le procédé d'estimation de courbure avec ce type d'instrumentation, il faut noter que chaque axe d'un accéléromètre mesure la projection du champ de gravité \underline{g} sur cet axe. Ainsi, chaque capteur permet d'estimer l'angle de la tangente relativement à l'axe (OX) au point de mesure. L'ensemble des mesures réalise alors un échantillonnage de la fonction $\Phi : s \mapsto \Phi(s)$ où $\Phi(s)$ est l'angle de la tangente au point d'abscisse curviligne s relativement à l'axe (OX) (cf. figure 1). La courbure $s \mapsto K(s)$ en tout point de la courbe plane est déduite par dérivation de la fonction Φ relativement à l'abscisse curviligne *i.e.* $K(s) = d\Phi(s)/ds$. La méthode actuelle [2] utilise l'interpolation des estimations $\tilde{\phi}_1, \dots, \tilde{\phi}_N$ des angles $\Phi(s_1), \dots, \Phi(s_N)$ par la spline cubique passant par ces angles. Cette méthode est robuste pour l'interpolation de la fonction Φ mais n'est plus convenable lorsqu'elle est dérivée par rapport à l'abscisse curviligne pour obtenir la courbure K . On observe des oscillations dans la courbure qui ne sont pas acceptables pour les applications visées, relatives au domaine de la surveillance des structures (poutres, câbles, arches, etc.), qui s'appuient sur le calcul de la courbure maximale et de sa lo-

calisation le long de la structure (cf. [4], par exemple). Pour ces structures, la courbure présente généralement un unique maximum local, la présence d'oscillations dans la courbure estimée est donc une source forte d'instabilité.

Pour améliorer le procédé d'estimation de courbure, nous proposons de substituer la spline cubique d'interpolation par une spline cubique de lissage [3]. Cette opération introduit un paramètre de lissage $\lambda \in [0, 1]$ qui réalise un compromis entre la spline cubique d'interpolation et la droite de régression des données $(s_i, \phi_i)_i$. Pour fixer ce paramètre, il existe des critères basés sur les statistiques des points de contrôle $(s_i, \tilde{\phi}_i)_i$ [3]. Cependant, ces critères ne garantissent pas que la courbure obtenue n'oscille pas. A ce titre, nous proposons d'introduire un critère empirique, associé à un paramètre de lissage optimal λ^* , qui tend "suffisamment" la spline cubique d'interpolation pour que la courbure déduite K n'oscille pas. La définition de ce critère et l'algorithme de minimisation sont détaillés dans la section suivante. On trouvera également une illustration expérimentale de cet algorithme.

2 Estimation de la spline cubique optimale

2.1 Description et algorithme

Une spline cubique Φ est une fonction C^2 telle que pour tout capteur $i = 1, \dots, N$ et toute abscisse curviligne $s \in [s_i, s_{i+1}]$, Φ est un polynôme de degré au plus 3 *i.e.* :

$$\Phi(s) = a_i(s - s_i)^3 + b_i(s - s_i)^2 + c_i(s - s_i) + d_i \quad (1)$$

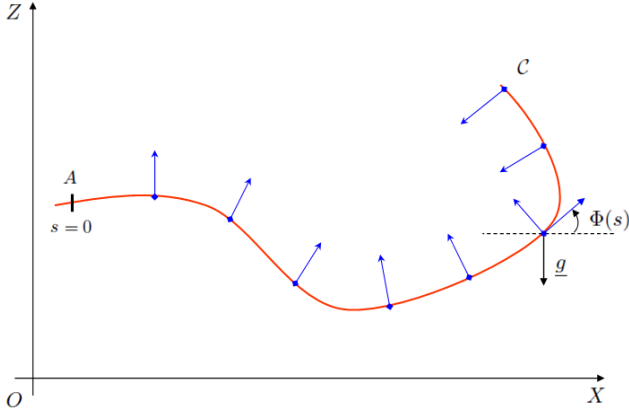


FIGURE 1 – **Schématization de la configuration expérimentale.** La courbe C (ligne rouge), représentée dans le système d'axes (OX, OZ) , est instrumentée par des accéléromètres biaxiaux. Seul l'axe normal de chaque capteur est représenté (flèches bleues) sauf pour un capteur où l'axe tangent à la courbe est également représenté. Le champ de gravité \underline{g} est parallèle à l'axe OZ .

Les coefficients $(a_i)_i, (b_i)_i, (c_i)_i$ et $(d_i)_i$ sont explicitement calculables à partir des estimées $\underline{\tilde{\phi}}_m = [\underline{\tilde{\phi}}_1, \dots, \underline{\tilde{\phi}}_N]$ (les vecteurs sont soulignés) via les conditions d'interpolation $\Phi(s_i) = \underline{\tilde{\phi}}_i$ et de régularité C^2 [3]. De l'équation 1, on déduit l'expression de la courbure :

$$K(s) = 3a_i(s - s_i)^2 + 2b_i(s - s_i) + c_i \quad (2)$$

ainsi que la condition de non-oscillation. En effet, K n'oscille pas si elle n'admet qu'un maximum local *i.e.* dK/ds ne s'annule qu'une fois. Cela se traduit par le fait que la condition $b_i b_{i+1} \leq 0$ est vérifiée par un et uniquement un indice i .

Pour un paramètre de lissage donné λ , le critère à minimiser est le suivant [3] :

$$\mathcal{L}(\underline{\phi}; \lambda) = \lambda \left(\underline{\tilde{\phi}}_m - \underline{\phi} \right)^T \underline{\Gamma}^{-1} \left(\underline{\tilde{\phi}}_m - \underline{\phi} \right) + (1 - \lambda) \underline{\phi}^T \underline{S} \underline{\phi} \quad (3)$$

où \underline{S} est une matrice connue (dont l'expression n'est pas précisée ici) car elle dépend uniquement des abscisses curvilignes s_1, \dots, s_N , et où $\underline{\Gamma}$ est la matrice de covariance des incertitudes sur les angles estimés via les accéléromètres qui est connue. Le vecteur $\underline{\phi}(\lambda)$ qui minimise le critère \mathcal{L} admet l'expression suivante [3] :

$$\underline{\tilde{\phi}}(\lambda) = \left[\underline{I} + (\lambda^{-1} - 1) \underline{\Gamma} \underline{S} \right]^{-1} \underline{\tilde{\phi}}_m \quad (4)$$

où \underline{I} est la matrice identité. Sous réserve d'existence et d'unicité, la définition du paramètre de lissage optimal λ^* est telle que si $\lambda > \lambda^*$ alors la courbure déduite de $\underline{\tilde{\phi}}(\lambda)$ oscille et si $\lambda \leq \lambda^*$ alors la courbure déduite de $\underline{\tilde{\phi}}(\lambda)$ n'oscille pas. Littéralement, λ^* tend suffisamment la spline cubique d'interpolation pour qu'elle n'oscille pas et c'est le plus grand paramètre de lissage qui vérifie cette propriété.

Pour déterminer λ^* on procède par dichotomie du segment $[0, 1]$. On fixe un nombre d'itérations k_{\max} (qui dépend de la

précision souhaitée sur λ^*) et pour chaque itération k , on définit λ_k^+, λ_k^- et $\lambda_k \in [\lambda_k^-, \lambda_k^+]$. L'algorithme est initialisé avec $\lambda_0^+ = 1, \lambda_0^- = 0$ et $\lambda_0 = 1$. Si $\underline{\tilde{\phi}}(\lambda_0)$ n'oscille pas alors l'algorithme s'arrête puisque la spline cubique d'interpolation est suffisamment tendue. Sinon, pour $k = 1, \dots, k_{\max} - 1$ calculer $\underline{\tilde{\phi}}(\lambda_k)$ et en déduire les oscillations de la courbure (via (4), (1) et (2) et la condition de non-oscillation). Puis :

- Si la courbure n'oscille pas, faire $\lambda_k^+ = \lambda_{k-1}^+, \lambda_k^- = \lambda_{k-1}$ et $\lambda_k = (\lambda_{k-1}^+ + \lambda_{k-1})/2$ (on relâche la spline).
- Sinon, faire $\lambda_k^+ = \lambda_{k-1}, \lambda_k^- = \lambda_{k-1}^-$ et $\lambda_k = (\lambda_{k-1}^+ + \lambda_{k-1}^-)/2$ (on tend la spline).

A la fin de l'algorithme, on obtient une approximation $\lambda_{k_{\max}}$ du paramètre optimal λ^* duquel on déduit une estimation des angles et de la courbure via (4), (1) et (2). La méthode est empirique dans le sens où il faudrait démontrer l'existence et l'unicité de λ^* .

2.2 Illustrations expérimentales

On illustre les performances de cet algorithme sur l'exemple d'une chaînette instrumentée. Dans ce cadre, les expressions théoriques de l'angle Φ et de la courbure K en fonction de l'abscisse curviligne s sont connues :

$$\Phi(s) = a \tan^{-1} \left(\frac{s}{a} \right) \quad (5)$$

$$K(s) = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad (6)$$

où a est un paramètre sans dimension qui dépend des propriétés physiques de la chaînette. Ces deux expressions sont déduites de l'expression $z(x) = a^{-1} \cosh(ax)$ de la hauteur z en fonction de l'abscisse x .

On simule une chaînette de 40 m et de paramètre $a = 10$. La figure 2 illustre les performances de l'algorithme en termes d'amélioration de l'estimation de la courbure pour une instrumentation de $N = 20$ accéléromètres biaxiaux uniformément répartis, de bruit de mesure de même écart-type $\sigma = 10^{-3}$ g, et, pour un nombre d'itérations maximal $k_{\max} = 30$. Cet exemple illustre l'intérêt de tendre la spline d'interpolation qui estime bien la fonction angle mais qui ne permet pas d'accéder à une courbure dont la structure fonctionnelle est respectée. Les erreurs obtenues sur la courbure maximale et sur sa localisation avec la spline tendue sont respectivement de 0.7 mm^{-1} (soit 0.7 % relativement à la courbure maximale théorique de 0.1 m^{-1}) et de 8 mm (soit 1 % relativement à longueur de la chaînette). La figure 3 montre l'évolution du paramètre λ pendant l'algorithme, et, illustre également l'effet induit du lissage sur les erreurs concernant la courbure maximale et sa localisation.

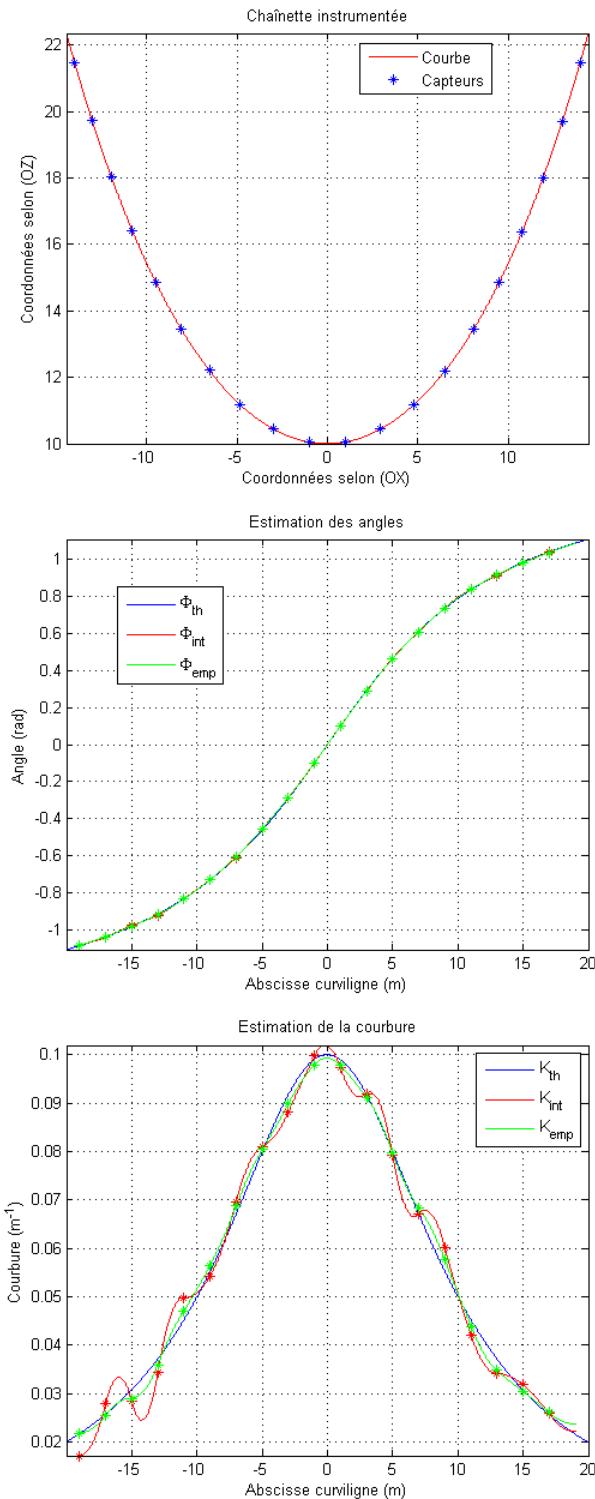


FIGURE 2 – Haut : chaîne instrumentée par 20 capteurs. Milieu (resp. Bas) : comparaison entre les angles (resp. courbure) théoriques Φ_{th} (resp. K_{th}), estimés par la spline cubique d'interpolation Φ_{int} (resp. K_{int}) et la spline cubique de lissage optimale et empirique Φ_{emp} (resp. K_{emp}).

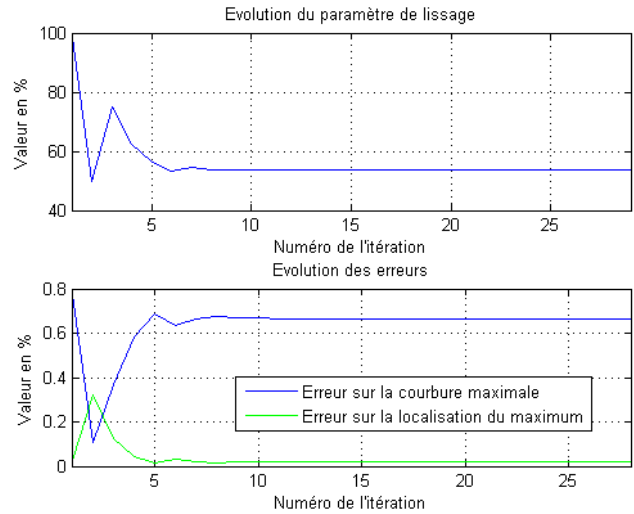


FIGURE 3 – Haut : évolution de λ au cours de l'algorithme (valeur de convergence égale à 54 %). Bas : évolution des erreurs, en %, sur le maximum de courbure (valeur de convergence égale à 0.7 %) et la localisation de son maximum (valeur de convergence égale à 0.02 %).

3 Conclusion

L'algorithme de tension de la spline cubique d'interpolation basé sur la non-oscillation de la courbure a été décrit et ces performances ont été illustrées via des simulations. Il vient que l'amélioration est significative pour l'estimation du maximum de courbure et également l'argument maximal. Les perspectives de ces travaux se focalisent sur la caractérisation des performances de l'estimateur (borne de Cramer-Rao) et la preuve de sa convergence dans les applications visées car la méthode est actuellement empirique.

Références

- [1] N. Sprynski, B. Lacolle, L. Biard,, D. David, *Curve and Surface via Tangential Information*, Curve and Surface Design (Avignon), 2006.
- [2] N. Sprynski, D. David, B. Lacolle, L. Biard, *Curve Reconstruction via a Ribbon of Sensors*, 14th IEEE ICECS, 2007.
- [3] T. Hastie, R. Tibshirani, J. Friedman, *The elements of statistical learning*, deuxième édition, Springer, 2009.
- [4] R. Glaser, V. Caccese, M. Shahinpoor, *Shape Monitoring of a Beam Structure from Measured Strain or Curvature*, Experimental Mechanics 52, 2012.