

Algorithmes de déconvolution impulsionnelle à résolution augmentée

Ewen CARCREFF^{1,2}, Sébastien BOURGUIGNON¹, Jérôme IDIER¹, Laurent SIMON²

^{1,2}LUNAM Université

¹Institut de Recherche en Communication et Cybernétique de Nantes, 1 rue de la Noë, 44321 Nantes Cedex 3, France

²Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, Avenue Olivier Messiaen, 72085 Le Mans Cedex 9, France
ewen.carcreff@ircsyn.ec-nantes.fr, sebastien.bourguignon@ircsyn.ec-nantes.fr
jerome.idier@ircsyn.ec-nantes.fr, laurent.simon@univ-lemans.fr

Résumé – Le but de cette communication est d'estimer les temps d'arrivée et les amplitudes de plusieurs échos recouvrants dans un signal bruité. L'estimation de ces paramètres peut se formuler comme un problème de déconvolution impulsionnelle. Classiquement, un modèle de convolution discrète permet de reconstruire une séquence à la précision de la période d'échantillonnage des données. Nous proposons l'utilisation d'un modèle suréchantillonné, où l'on recherche une séquence discrétisée plus finement que les données. Nous montrons que ce modèle s'interprète plus généralement comme un système *Multiple Input Single Output* (MISO). Les algorithmes de déconvolution impulsionnelle présentés sont mis en œuvre et optimisés pour les systèmes MISO. Des simulations montrent une meilleure estimation des temps d'arrivée par rapport à l'approche classique, pour une augmentation maîtrisée du temps de calcul.

Abstract – The purpose of this communication is to estimate the times of arrival and amplitudes of overlapping echoes in noisy data. This problem can be formulated as spike deconvolution. Usually, the discrete convolution model aims to retrieve a solution at the data sampling precision. We propose to use model up-sampling in order to increase the precision of the model. We show that the resulting model is equivalent to a *Multiple Input Single Output* (MISO) system. Then, we propose to revisit standard sparse deconvolution algorithms for MISO systems. Specific and efficient algorithmic implementation is derived in such setting. Results on synthetic data show improvements in the estimation of arrival times and controlled costs of computation compared to the standard approach.

1 Introduction

L'estimation des temps d'arrivée et des amplitudes d'échos superposés est un problème commun à de nombreux domaines: contrôle non destructif (CND) par ultrasons, radar, géophysique, imagerie médicale, *etc.* En CND par exemple, les temps de vol des échos reçus par le transducteur permettent de déduire la position des défauts dans une pièce industrielle. Le but est de retrouver les instants t_i et amplitudes a_i dans le modèle de données suivant :

$$y(t) = \sum_i a_i h(t - t_i) + e(t), \quad (1)$$

où $h(t)$ est une forme d'onde supposée connue et $e(t)$ un bruit additif. L'estimation de ces paramètres peut se révéler difficile lorsque les échos se superposent. Pour des données ultrasonores par exemple, la forme oscillante de $h(t)$ provoque des interférences constructives et destructives entre les échos.

Plusieurs familles de méthodes existent pour résoudre ce problème. Certaines approches tentent d'estimer les valeurs des paramètres de façon continue. Ce sont des méthodes paramétriques qui résolvent un problème des moindres carrés non-linéaire [1]. Ce genre d'approche peut être sensible aux erreurs de modèles et aux minima locaux. Les méthodes à sous-espace ont également été utilisées dans ce contexte, même si

elles ont plutôt été développées dans le cadre d'acquisitions multiples [2]. Par ailleurs, de nombreuses recherches ont été menées sur les méthodes de déconvolution [3]. Ces dernières utilisent une représentation convolutive de l'équation (1) :

$$y(t) = (h * x)(t) + e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau + e(t), \quad (2)$$

où $*$ désigne la convolution et $x(t) = \sum_i a_i \delta(t - t_i)$ est un signal parcimonieux composé des amplitudes non nulles a_i aux instants t_i , qu'il s'agit d'estimer. Usuellement, on considère une version discrète et linéaire $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{e}$ où \mathbf{H} est une matrice de convolution discrète associée à la forme de référence. Ce problème inverse est mal posé, car \mathbf{H} est mal conditionnée [3], et est régularisé pour favoriser dans notre cas une solution parcimonieuse de \mathbf{x} . Néanmoins, la précision temporelle est limitée par la discrétisation de \mathbf{x} , souvent choisie à la période d'échantillonnage de $y(t)$. Dans cet article, nous montrons qu'il est possible d'obtenir un modèle discret plus précis grâce à une procédure de sur-échantillonnage du modèle par rapport au données. Pour effectuer la déconvolution impulsionnelle, nous proposons de revisiter plusieurs algorithmes bien connus d'approximation parcimonieuse basés sur des stratégies gloutonnes [4], une pénalisation ℓ_0 [5] et ℓ_1 [6].

La deuxième section de cet article traite du modèle sur-

échantillonné, qui est reformulé en système MISO avec entrées parcimonieuses. LA section suivante présente comment régler le facteur de sur-échantillonnage. Ensuite, nous présentons les algorithmes de déconvolution optimisés pour les systèmes *Multiple Input Single Output* MISO dans la section 4. La section 5 illustre ces contributions par des résultats issus de simulations. Enfin, des conclusions sont données dans la dernière section.

2 Discrétisation de la fonction de convolution

Généralement, on dispose de données numériques $y_n = y(nT_e)$, avec T_e la période d'échantillonnage. A notre connaissance, les travaux en déconvolution considèrent une discrétisation de la partie droite de l'équation (2) à la même période T_e . On obtient alors le modèle classique de convolution discrète suivant :

$$y_n = \sum_{m=0}^{M-1} h_m x_{n-m} + e_n, \quad (3)$$

avec $h_n = h(nT_e)$ et $x_n = x(nT_e)$. Le signal d'erreur e_n inclut à la fois le bruit additif et les erreurs de discrétisation. Pour des données de longueur finie N , les échantillons de y_n , h_n , x_n et e_n peuvent être regroupés pour former respectivement les vecteurs \mathbf{y} , \mathbf{h} , \mathbf{x} and \mathbf{e} . On aboutit alors à la forme compacte $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{e}$ où \mathbf{H} est la matrice de convolution associée à \mathbf{h} [3]. Cette matrice a N lignes et environ N colonnes (en fonction des hypothèses de bord). Les algorithmes de déconvolution peuvent alors exploiter la structure Toeplitz de cette matrice grâce à des transformées de Fourier rapides (FFT) [7]. Les temps d'arrivée correspondant aux positions des valeurs non nulles dans le vecteur \mathbf{x} étant discrétisés à la cadence des données, leur résolution est limitée à T_e . Cette limitation peut être gênante en terme de précision du modèle, de surcroît lorsque le signal à estimer $x(t)$ est impulsionnel. Nous proposons de discrétiser la partie droite de l'équation (2) à une précision de T_e/K , où K est un facteur entier de sur-échantillonnage. On montre que le modèle discret (3) devient alors :

$$y_n = \sum_{p=0}^{P-1} \bar{h}_p \bar{x}_{nK-p} + e_n, \quad (4)$$

avec $\bar{h}_p = h(pT_e/K)$, $\bar{x}_p = x(pT_e/K)$ et $P = KM$. Comme précédemment, on peut former une équation compacte $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{e}$. Nous manipulons des versions sur-échantillonnées de h et x , et $\bar{\mathbf{x}}$ a donc une précision temporelle de T_e/K . La matrice $\bar{\mathbf{H}}$ n'est plus Toeplitz et possède toujours N lignes mais environ KN colonnes (selon les hypothèses de bord). On peut alors montrer qu'elle correspond à K matrices Toeplitz entrelacées. Le modèle $\bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{x}}$ est en fait équivalent à la somme de K convolutions discrètes, tel que :

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^K \mathbf{H}^k \mathbf{x}^k + \mathbf{e}, \quad (5)$$

où $\mathbf{H}^k, k = 1 \dots K$ sont des matrices Toeplitz issues de $\bar{\mathbf{H}}$. Plus précisément, \mathbf{H}^k est la matrice de convolution discrète correspondant à la réponse impulsionnelle h^k définie par : $h_n^k = h((k-1)T_e/K + nT_e)$. Les données peuvent donc être modélisées comme un système MISO avec K entrées parcimonieuses \mathbf{x}^k ($k = 1, \dots, K$).

3 Éclairage sur le réglage du facteur de sur-échantillonnage

Dans cette partie, nous nous intéressons au réglage du facteur de sur-échantillonnage. En effet, le coût de calcul des algorithmes d'estimation va naturellement augmenter en fonction de K . De surcroît, l'estimation des temps de retard est limitée par le contenu fréquentiel de l'écho recherché et par le niveau de bruit [8]. Il faut donc trouver un compromis. Par exemple, dans [8], la variance minimale sur l'estimation d'un temps de retard pour un signal continu est :

$$\sigma^2 = \frac{3}{8\pi^2 T} \frac{1}{\text{RSB}} \frac{1}{f_2^3 - f_1^3}, \quad (6)$$

où T est la durée d'observation, f_1 et f_2 sont les bornes de la bande passante du signal et RSB est le Rapport Signal à Bruit.

Pour illustrer ce propos, nous nous plaçons dans le cas discret d'une seule forme d'onde de 5 MHz dans un bruit Gaussien de RSB 0 dB. Nous estimons alors de façon optimale la position de l'écho par un calcul d'intercorrélation [8]. La dispersion intrinsèque à ce problème, donnée par l'équation (6) est de $\pm\sigma = \pm 3.43$ ns. Nous traçons sur la figure 1 les histogrammes de l'estimation du temps de retard pour 10000 réalisations, et ce pour $K = 1$ et $K = 20$. Dans le premier cas, l'erreur est importante comparée à σ alors que pour le modèle sur-échantillonné, l'estimation est davantage en accord avec σ . Dans ce cas, il serait raisonnable de régler $K \simeq 10$ pour que la dispersion d'écart-type σ couvre quelques éléments de la grille sur-échantillonnée de précision T_e/K .

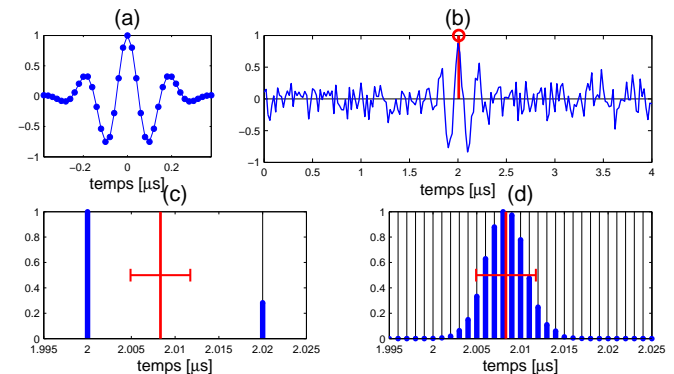


FIG. 1: Estimation du temps de retard d'un écho (RSB = 0 dB). (a) : forme d'onde, (b) : vrai temps (\circ) et données ($-$), distribution des temps de retard estimés pour $K = 1$ (c) et pour $K = 20$ (d). Les traits rouges représentent le vrai temps de retard et les barres d'erreur $\pm\sigma$ de l'équation (6).

4 Algorithmes de déconvolution pour des systèmes MISO

Pour identifier les entrées du système MISO de l'équation (5), nous proposons d'utiliser des algorithmes reconnus d'approximation parcimonieuse des signaux, et qui ont montré de bons résultats dans le cas d'un problème de déconvolution classique ($K = 1$) [9]. Ici, le but est d'approcher le signal \mathbf{y} par K vecteurs parcimonieux $\mathbf{x}^k, k = 1 \dots K$, sous le modèle (5). La valeur ajoutée de ce travail est de prendre en compte le caractère générique MISO dans les algorithmes de déconvolution impulsioneille. Nous proposons de revisiter cinq algorithmes d'approximation parcimonieuse dans un cadre MISO :

- Trois algorithmes *gloutons* sont mis en œuvre: *Matching Pursuit* (MP), *Orthogonal Matching Pursuit* (OMP) et *Orthogonal Least Squares* (OLS) [4].
- L'algorithme *Single Best Replacement* (SBR) qui a récemment été présenté [5]. Il effectue la minimisation locale du critère des moindres carrés pénalisé suivant :

$$J(\bar{\mathbf{x}}) = \|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{x}}\|^2 + \mu\|\bar{\mathbf{x}}\|_0 \quad (7)$$

où $\|\bar{\mathbf{x}}\|_0$ est le nombre d'éléments non nuls de $\bar{\mathbf{x}}$. Chaque itération calcule la valeur minimale du critère pour l'ajout ou la suppression d'une composante. Le meilleur mouvement est alors exécuté.

- Un algorithme de déconvolution par pénalisation de norme ℓ_1 qui minimise :

$$J(\bar{\mathbf{x}}) = \|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{x}}\|^2 + \lambda\|\bar{\mathbf{x}}\|_1. \quad (8)$$

L'optimisation est effectuée par méthode homotopique [6], de complexité analogue à celle de OMP; ℓ_1 -H fera référence à cet algorithme.

La mise en œuvre de chaque algorithme a été optimisée dans le cadre générique des systèmes MISO. A chaque itération, l'étape de sélection de MP et OMP fait appel au produit $\bar{\mathbf{H}}^T \mathbf{r}$, où \mathbf{r} est le résidu entre les données et l'approximation [4]. Pour un système MISO, ce calcul revient à des produits $(\mathbf{H}^k)^T \mathbf{r}$ où les matrices \mathbf{H}^k sont Toeplitz. Chaque produit peut alors être réalisé par un calcul d'intercorrélation entre \mathbf{h}^k et \mathbf{r} , équivalent à deux FFT et une IFFT [7]. En pratique, nous calculons les K FFT des \mathbf{h}^k à l'avance. Ensuite, à chaque itération, la FFT de \mathbf{r} et les K IFFT de $(\mathbf{H}^k)^T \mathbf{r}$ sont calculées pour l'étape de sélection. En terme de coût de calcul, l'accroissement est proportionnel à K . Pour MP et OMP, l'étape de mise à jour du résidu est identique à un algorithme standard. Pour OMP, cela nécessite l'inversion de $\bar{\mathbf{H}}_*^T \bar{\mathbf{H}}_*$ où $\bar{\mathbf{H}}_*$ représente les colonnes de $\bar{\mathbf{H}}$ sélectionnées à une itération donnée. Dans notre mise en œuvre, nous utilisons une factorisation de Cholesky pour effectuer l'inversion à moindre coût [7]. L'inversion du système revient ici à l'inversion de deux systèmes triangulaires de complexité $\mathcal{O}(i^2)$ où i est le nombre d'indices actifs.

Pour sélectionner l'élément à rajouter, OLS et SBR utilisent de façon intensive les éléments de la matrice de Gram $\bar{\mathbf{H}}_*^T \bar{\mathbf{H}}_*$

(voir [4, 5] pour les détails). Ce sont en fait les éléments des matrices $(\mathbf{H}^k)^T \mathbf{H}^\ell$, où \mathbf{H}^k et \mathbf{H}^ℓ sont Toeplitz, et qui peuvent être calculés préalablement à partir des séquences d'intercorrélation entre \mathbf{h}^k et \mathbf{h}^ℓ . Nous avons donc besoin des $K(K+1)/2$ intercorrélations entre les K filtres \mathbf{h}^k et \mathbf{h}^ℓ , dans le domaine de Fourier. Pour OLS et SBR, le coût de calcul dans l'algorithme lui-même reste approximativement constant en fonction de K , l'accroissement du coût étant très majoritairement associé aux pré-calculs d'intercorrélation.

L'algorithme ℓ_1 -H minimise le critère (8) en faisant progressivement décroître les valeurs du paramètre λ [6]. La solution optimale est alors calculée pour chaque saut de λ , signifiant un changement de support de la solution d'un élément. On a donc un comportement similaire aux stratégies gloutonnes. A chaque itération, l'ajout d'un élément nécessite deux produits $\bar{\mathbf{H}}^T \mathbf{r}$, ce qui correspond à $2(K+1)$ FFT. Le test des retraits requiert lui l'inversion de deux systèmes $\bar{\mathbf{H}}_*^T \bar{\mathbf{H}}_*$, effectués également par une factorisation de Cholesky. En terme de complexité, ℓ_1 -H est donc équivalent à deux algorithmes OMP.

Tous les algorithmes exigent le pré-calcul des produits $(\mathbf{H}^k)^T \mathbf{y}$, calculés dans le domaine de Fourier. Pour résumer, les algorithmes MP, OMP et ℓ_1 -H ont une complexité proportionnelle à K à chaque itération. D'un autre côté, OLS et SBR nécessitent le pré-calcul de $(K+1)^2$ FFT, mais le cœur de l'algorithme reste à peu près le même quand K augmente.

5 Résultats issus de simulations

On considère les données présentées sur la figure 2-b. Elles sont composées de 6 échos dont les temps d'arrivée sont choisis de façon continue sur toute la durée du signal. On ne peut donc jamais retrouver les vraies positions, mais en être le plus proche possible. La forme d'onde de convolution est une gaussienne modulée par une sinusoïde de 5 MHz [1] (voir figure 2-a). Les données sont échantillonnées à 25 MHz et le rapport signal à bruit est de 12 dB. Il y a dans ces données trois problèmes de superposition d'échos difficiles.

La déconvolution est effectuée de façon classique ($K=1$) et avec sur-échantillonnage ($K=6$). Les algorithmes sont arrêtés de sorte que la norme du résidu $\|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{x}}\|^2$ soit au niveau de la puissance du bruit (voir par exemple [9]). Les résultats sont présentés respectivement sur les figures 2-c et 2-d. Nous voyons que, pour tous les algorithmes, le sur-échantillonnage permet de mieux résoudre un certain nombre de problèmes de pics proches par rapport à l'approche classique. OLS et SBR aboutissent à de bons résultats mais ne parviennent pas à détecter les deux pics centraux qui interfèrent de manière très critique. SBR réussit néanmoins à détecter un des deux pics. D'un autre côté, la déconvolution sur-échantillonnée par ℓ_1 -H permet de retrouver ces deux pics mais au prix de quelques fausses détections de faibles amplitudes, comportement typique de la pénalisation ℓ_1 [9]. Des résultats quantitatifs issus de simulations de Monte-Carlo ont été présentés dans [10] et confirment une baisse de l'erreur en fonction de K .

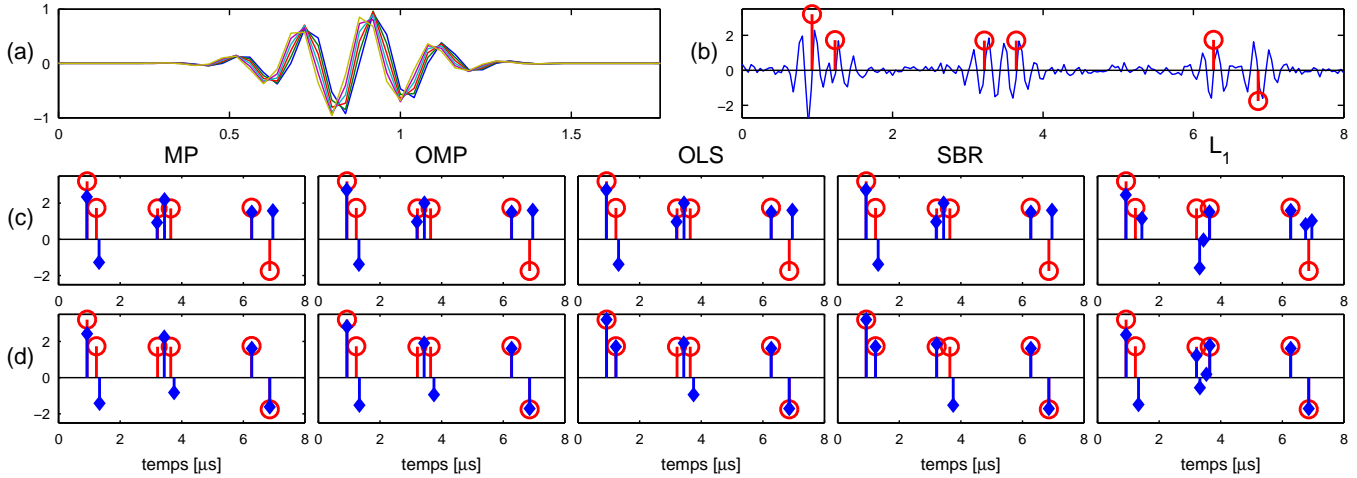


FIG. 2: Exemple de déconvolution de données synthétiques. (a) : formes d'onde utilisées pour la déconvolution $K = 6$. (b) : données (-) et vrais pics (o). (c) : résultats avec $K = 1$. (d) : résultats avec $K = 6$. Vrais pics (o) et pics estimés (\diamond).

Nous étudions pour finir le coût de calcul des différents algorithmes en fonction du facteur de sur-échantillonnage. Pour ce faire, nous moyennons les temps de calcul sur 2000 réalisations aléatoires des données similaires à celles utilisées plus haut. Les résultats sont présentés en table 1. Sans surprise le coût de chaque algorithme est en rapport avec ses performances. Les nombreux petits pics obtenus par l'algorithme ℓ_1 -H provoquent un coût de calcul plus élevé dû à de plus nombreuses itérations. Grâce à une mise en œuvre efficace, le temps de calcul ne fait que doubler ou tripler selon l'algorithme lorsque K , donc le nombre d'inconnues, est multiplié par huit.

algo./K	1	2	4	6	8
MP	4.3	4.1	5.0	6.4	7.7
OMP	4.8	4.6	5.2	6.3	7.5
OLS	8.3	9.6	13.1	18.0	24.1
SBR	9.7	10.7	14.1	18.0	22.6
ℓ_1 -H	9.6	11.8	16.3	21.3	27.9

TAB. 1: Coût des différents algorithmes en fonction de K (ms).

6 Conclusion

Un modèle sur-échantillonné de signaux discrets a été proposé pour la déconvolution impulsionnelle. Celui-ci a permis de reformuler le modèle en un système MISO. Le facteur d'échantillonnage peut être réglé en fonction du bruit et de la nature de l'écho de référence. Des algorithmes, issus de l'approximation parcimonieuse des signaux, ont été revisités et optimisés pour ce type de système. Les résultats issus de données synthétiques ont montré le progrès en terme d'estimation des temps d'arrivée et de robustesse du modèle. L'optimisation spécifique pour les systèmes MISO permet également la maîtrise du coût de calcul lorsque l'on augmente le facteur de sur-échantillonnage. D'après cette étude, les algorithmes OLS, SBR et par pénalisation ℓ_1 donnent les meilleurs résultats, et pour un temps de calcul légèrement supérieur à une approche standard.

Références

- [1] R. Demirli et J. Saniie, Model-based estimation of ultrasonic echoes. Part I: Analysis and algorithms, *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, volume 48, no. 3, pages 787–802, mai 2001.
- [2] A. Bruckstein, Tie-Jun Shan, et T. Kailath, The resolution of overlapping echoes. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, volume 33, no. 6, pp. 1357–1367, déc. 1985.
- [3] J. Idier. *Approche bayésienne pour les problèmes inverses*. Traité IC2, Série traitement du signal et de l'image, Hermès, Paris, nov. 2001.
- [4] T. Blumensath et M. E. Davies. On the difference between Orthogonal Matching Pursuit and Orthogonal Least Squares. Rapport technique, Université d'Edimbourg, mars 2007.
- [5] C. Soussen, J. Idier, D. Brie, et J. Duan. From Bernoulli Gaussian Deconvolution to Sparse Signal Restoration. *IEEE Transactions on Signal Processing*, volume 59, no. 10, pages 4572–4584, oct. 2011.
- [6] D. M. Malioutov, M. Cetin, et A. S. Willsky. Homotopy continuation for sparse signal representation. Dans *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, et Signal Processing*, volume 5, pages 733–736, Philadelphie, USA, mars 2005.
- [7] G.H. Golub et C.F. Van Loan, *Matrix Computations*, vol. 3, Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, oct. 1996.
- [8] A. Quazi, An overview on the time delay estimate in active and passive systems for target localization, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, volume 29, no. 3, pages 527–533, juin 1981.
- [9] S. Bourguignon, C. Soussen, H. Carfantan, and J. Idier, Sparse deconvolution: Comparison of statistical and deterministic approaches, Dans *IEEE Statistical Signal Processing Workshop*, juin 2011, pages 317–320.
- [10] E. Carcreff, S. Bourguignon, J. Idier et L. Simon. Resolution enhancement of ultrasonic signals by up-sampled sparse deconvolution. Dans *IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing*, Vancouver, Canada, mai 2013.