

Estimation de Directions D'Arrivées sous l'hypothèse de sources partiellement corrélées

Petter WIRFÄLT¹, Guillaume BOULEUX², Magnus JANSSON¹

¹KTH Royal Institute of Technology ACCESS Linnaeus Center
Signal Processing Osqualdas v.10, SE-100 44 Stockholm, Sweden

²Université de Lyon, Université de Saint Etienne, LASPI
20 Av. de Paris, 42334 Roanne Cedex, France
wirfalt@kth.se, janssonm@kth.se
guillaume.bouleux@univ-st-etienne.fr

Résumé – On peut imaginer que dans certain scénario relatifs à l'estimation des directions d'arrivées d'ondes planes, certaines directions sont déjà connues; conséquences de trajets multiples ou d'éléments physiques fixes, on pensera par exemple aux buildings dans un scénario urbain. Plutôt que d'utiliser des méthodes d'estimation classiques, pour lesquels toutes les directions seraient estimées, nous proposons d'incorporer cette connaissance afin d'utiliser au mieux les échantillons disponibles. Nous supposons enfin que les ondes de directions connues et celles inconnues sont décorréelées; aucune hypothèse n'étant faite sur la possible dépendance mutuelle entre les ondes de direction connues ou celles de directions inconnues. Au travers de simulations numériques nous montrons les bonnes performances de la méthode proposée. Nous montrons en outre que cette méthode répond plus favorablement qu'une méthode dédiée à l'estimation des directions d'arrivées lorsque les émetteurs sont supposés totalement décorréelés.

Abstract – In certain direction-of-arrival (DOA) estimation scenarios some of the source directions are known to the operator even before measurements are acquired. It is then undesirable to use regular DOA-algorithms which waste data samples estimating the known directions. Additionally, in some applications it is known that the signals emanating from the known directions are uncorrelated with those coming from the unknown directions. In this article we present a novel algorithm which exploits the combination of such prior knowledge in a manner more efficient (in terms of accuracy) than any algorithm known to the authors. Though numerical Monte-Carlo simulations we show the estimator to attain the theoretical accuracy bound for significantly lower signal-to-noise ratios than current state-of-the-art methods. Additionally we show the proposed algorithm to treat the stricter problem of entirely uncorrelated emitters better than current state-of-the-art methods.

1 Introduction

On peut imaginer que dans certains scénarios relatifs à l'estimation des directions d'arrivées (DDA) d'ondes planes, certaines directions sont déjà connues. Ces directions ont alors un double effet négatif sur les méthodes d'estimations. D'une part, un nombre important d'échantillons acquis sont utilisés et de ce fait gaspillés pour estimer ce qui est déjà connue et d'autre part ces directions peuvent interférer avec les directions d'intérêts [10]. L'objectif est donc de s'absoudre ou au moins réduire ces effets.

Ce problème a suscité un intérêt grandissant depuis quelques années, dans [8] par exemple il est montré comment exploiter une telle connaissance en modifiant la matrice de covariance des observations lorsque le nombre d'observations disponibles est faible. Une approche différente est prise dans [10] où les méthodes proposées sont asymptotiquement (par rapport aux nombre d'observations) efficaces. En outre il est montré qu'un gain réellement non

négligeable peut être atteint lorsque l'on couple à la fois l'hypothèse de décorrélation des ondes et la connaissance de certaines directions [10].

La méthode proposée dans cette article relaxe cependant l'hypothèse de décorrélation totale entre les ondes de [10] et ne conserve que l'hypothèse de décorrélation partielle entre les ondes de directions connues et celles inconnues. Sous ces hypothèses, une première réponse a été proposée dans [3] puis dans [10] où il s'agit de traiter le problème par déflation orthogonale. Toutefois, cette méthode est sous-optimale et biaisée lorsque la variance du bruit est plus faible que la variance de l'erreur de projection. Compte tenu du faible coût calculatoire et des bonnes performances selon la puissance du bruit, nous proposons donc de modifier cette méthode afin de la rendre optimale, par pondération appropriée, et de ce faite non biaisée.

2 Positionnement

Considérons d ondes planes bande-étroites suffisamment éloignées de l'émetteur frappant une antenne composée de m capteurs espacés chacun d'une demi-longueur d'onde. La réponse de l'antenne à un instant t donné, se paramétrise de la manière suivante

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

où $\mathbf{a}(\theta_i) = [1 \ e^{-j\pi \sin(\theta_i)} \ \dots \ e^{-j(m-1)\pi \sin(\theta_i)}]$ est le i^{e} vecteur d'antenne (vecteur directionnel). Nous supposons disposer de N acquisitions temporelles, d'où $t = 1, \dots, N$. Les amplitudes des ondes $\mathbf{x}(t)$ ainsi que le bruit $\mathbf{n}(t)$ sont supposés être des processus stochastiques circulaire et stationnaire Gaussien centrés et dont les moments du second ordre valent

$$\mathbb{E}[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)] = \mathbf{P} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(t)] = \sigma^2 \mathbf{I} \quad (2)$$

où \mathbb{E} représente l'espérance mathématique et H l'opérateur transposé conjugué. Par soucis de clarté pour la suite, nous introduisons également ici l'opérateur T correspondant à la transposée.

Les 2 hypothèses majeures faites dans cet article sont :

- i) la connaissance a priori de d_k DOA, d'où $d_u = d - d_k$ le nombre de DOA inconnues et

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta} &= [\boldsymbol{\theta}_u^T \ \boldsymbol{\theta}_k^T]^T, \\ \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) &= [\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_u) \ \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_k)] \triangleq [\mathbf{A}_u \ \mathbf{A}_k], \\ \mathbf{P} &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_u & \mathbf{P}_{uk} \\ \mathbf{P}_{uk}^H & \mathbf{P}_k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- ii) la décorrélation entre les ondes de directions connues et celles de directions inconnues, impliquant $\mathbf{P}_{uk} = \mathbf{0}$, aucune hypothèse n'étant faite sur \mathbf{P}_k et \mathbf{P}_u .

En supposant que la matrice de covariance des observations vaut $\mathbf{R} = \mathbb{E}[\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^H(t)]$, la méthode présentée dans [3] consiste en la déflation d'une partie du sous espace engendré par les colonnes de \mathbf{R} afin d'effectuer une recherche uniquement sur le sous-espace associé aux directions inconnues. Cela se caractérise par

$$\begin{aligned} (\mathbf{R} - \sigma^2 \mathbf{I}) \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{A}_k}^\perp &= \mathbf{A}_u \mathbf{P}_u \mathbf{A}_u^H \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{A}_k}^\perp + \mathbf{A}_k \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k^H \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{A}_k}^\perp \\ &= \mathbf{A}_u \mathbf{P}_u \mathbf{A}_u^H \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{A}_k}^\perp = \mathbf{U}_s \boldsymbol{\Sigma}_s \mathbf{V}_s^H \end{aligned} \quad (3)$$

avec $\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{A}_k}^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{A}_k (\mathbf{A}_k^H \mathbf{A}_k)^{-1} \mathbf{A}_k^H$, et où \mathbf{U}_s contient une estimation du sous-espace associé aux directions inconnues, \mathbf{V}_s étant une estimation altérée (due au projecteur) du sous-espace associé aux directions inconnues. Ne disposant que d'une estimation de la matrice de covariance des observations,

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{y}(t)\mathbf{y}^H(t), \quad (4)$$

de décomposition définie par

$$\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{E}}_S \hat{\boldsymbol{\Lambda}}_S \hat{\mathbf{E}}_S^H + \hat{\mathbf{E}}_N \hat{\boldsymbol{\Lambda}}_N \hat{\mathbf{E}}_N^H \quad (5)$$

l'expression (3) devient plus naturellement

$$(\hat{\mathbf{R}} - \hat{\sigma}^2 \mathbf{I}) \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{A}_k}^\perp = \hat{\mathbf{U}}_s \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_s \mathbf{V}_s^H + \hat{\mathbf{U}}_n \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_n \hat{\mathbf{V}}_n^H, \quad (6)$$

où $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{m-d} \text{Tr}(\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_n)$ et où les termes indicés par n sont dus à l'estimation de \mathbf{R} . Nous pouvons à présent donner une expression de la matrice $\hat{\mathbf{U}}_s$ en utilisant l'orthogonalité entre $\hat{\mathbf{V}}_s$ et $\hat{\mathbf{V}}_n^*$, cette dernière a donc pour expression

$$\hat{\mathbf{U}}_s = (\hat{\mathbf{R}} - \hat{\sigma}^2 \mathbf{I}) \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{A}_k}^\perp \hat{\mathbf{V}}_s \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_s^{-1}. \quad (7)$$

3 L'estimateur POWDER

Dans [3] la matrice $\hat{\mathbf{U}}_s$ était utilisée par la suite pour effectuer une recherche de type MUSIC des DOA. Nous proposons ici de rechercher les DOA par la recherche de racines d'un polynôme dont les coefficients sont éléments d'un vecteur associé au sous-espace complémentaire au sous-espace engendré par les colonnes de $\hat{\mathbf{U}}_s$ [9, 4]. Soit

$$Q(z) = b_0 z^{d_u} + b_1 z^{d_u-1} + \dots + b_{d_u} = b_0 \prod_{i=1}^{d_u} (z - e^{-j\pi \sin(\theta_i)}) \quad (8)$$

ce polynôme, par définition nous avons alors que $\mathbf{B}^H \hat{\mathbf{U}}_s = \mathbf{0}$ avec $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{m \times (m-d_u)}$ définie par

$$\mathbf{B}^H = \begin{bmatrix} b_{d_u} & b_{d_u-1} & \dots & b_0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & b_{d_u} & b_{d_u-1} & \dots & b_0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Les DOA sont alors estimées par minimisation du critère

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{\epsilon}^H \mathbf{W} \boldsymbol{\epsilon} \quad (10)$$

avec $\boldsymbol{\epsilon} = \text{vec}(\hat{\mathbf{U}}_s^H \mathbf{B}) = (\mathbf{I}_{m-d} \otimes \hat{\mathbf{U}}_s^H) \text{vec}(\mathbf{B}) \triangleq \mathbf{K} \mathbf{b}$ et \otimes le produit de Kronecker. La recherche des DOA est donc remplacée par la recherche du vecteur \mathbf{b} obtenu par résolution d'un problème aux valeurs propres [2, 10]. Reste néanmoins la question de la matrice de pondération \mathbf{W} dans (10). Il est bien connue que cette matrice va compenser les erreurs de projection et dépend directement donc des statistiques du vecteur $\boldsymbol{\epsilon}$; son expression est

$$\mathbf{W} = \text{cov}^{-1}(\boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{\epsilon}^H). \quad (11)$$

En ré-écrivant le vecteur $\boldsymbol{\epsilon}$ comme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon} &= \text{vec}(\hat{\mathbf{U}}_s^H \mathbf{B}) \\ &= (\mathbf{B}^T \otimes \boldsymbol{\Sigma}_s^{-1} \mathbf{V}_s^H \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{A}_k}^\perp) \text{vec}(\hat{\mathbf{R}} - \hat{\sigma}^2 \mathbf{I}) \triangleq \mathbf{M} \tilde{\mathbf{f}} \end{aligned} \quad (12)$$

et en observant que

$$\tilde{\mathbf{f}} = \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}) - \frac{1}{m-d} \text{vec}(\mathbf{I}_m) \text{vec}^H(\mathbf{I}_m - \mathbf{E}_s \mathbf{E}_s^H) \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}) \quad (13)$$

grâce notamment à la méthodologie donnée dans [5] qui montre que

$$\text{vec}(\hat{\sigma}^2 \mathbf{I}) = \frac{1}{m-d} \text{vec}(\mathbf{I}_m) \text{vec}^H(\mathbf{I}_m - \mathbf{E}_s \mathbf{E}_s^H) \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}). \quad (14)$$

Une simple factorisation nous conduit ensuite à avoir

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{H} \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}) \quad (15)$$

où $\mathbf{H} = \mathbf{M} \left(\mathbf{I}_{m^2} - \frac{1}{m-d} \text{vec}(\mathbf{I}_m) \text{vec}^H(\mathbf{I}_m - \mathbf{E}_s \mathbf{E}_s^H) \right)$. Or nous savons que $\text{cov}(\text{vec}(\hat{\mathbf{R}})) = N^{-1}(\mathbf{R}^T \otimes \mathbf{R})$ [5], d'où

$$\mathbf{W}^{-1} = \text{cov}(\boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{\epsilon}^H) = \frac{1}{N} \mathbf{H}(\mathbf{R}^T \otimes \mathbf{R}) \mathbf{H}^H. \quad (16)$$

Dues aux hypothèses, la Borne de Cramer-Rao (BCR) s'obtient facilement en se sens qu'elle est similaire à celle du cas de décorrélation totale avec directions connues [10] mais où l'interaction entre les ondes de DOA connues ou celles de DOA inconnues se matérialise par un produit de Kronecker au lieu d'un produit de Katrie-Rao. Nous laissons donc le lecteur retrouver l'expression analytique de cette borne en exercice.

4 Simulations et discussion

Nous confirmons l'efficacité attendue de l'algorithme POWDER au moyen de simulations de Monté-Carlo (MC). Nous générons un ensemble d'observations issues du réseau de capteur conformément au modèle établi en (1). Le signal des amplitudes complexes $x(t)$ ainsi que le signal représentatif du bruit $n(t)$ sont des processus pseudo-aléatoire de matrice de covariance \mathbf{P} et $\sigma^2 \mathbf{I}$ respectivement. Nous avons choisi la racine de l'erreur quadratique moyenne comme indicateur de performances

$$\text{REQM}_i = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{k=1}^L (\hat{\theta}_{i,k} - \theta_i)^2}, \quad i = 1, \dots, d_u \quad (17)$$

où L est le nombre de réalisations de Monté-Carlo. Nous étudions le cas où $\boldsymbol{\theta}_k = [12^\circ \ 20^\circ]^T$ et $\boldsymbol{\theta}_u = [10^\circ \ 15^\circ]^T$. Le premier scénario testé est celui où les ondes sont cohérentes, cela correspond à un scénario très difficile en terme d'estimation puisque de nombreux algorithmes, typiquement les dérivés de MUSIC [3, 10, 7] sont défaillants. Nous avons par conséquent

$$\mathbf{P}_u = \mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

avec $\sigma^2 = 1/\text{RSB}$ et toujours $\mathbf{P}_{uk} = \mathbf{0}$. Nous avons fixé $m = 10$ et $N = 100$ puis estimé $\hat{\mathbf{R}}$. Sur la Figure1-(a) nous affichons la racine de l'erreur quadratique moyenne des estimés des directions obtenus par la méthode PLEDGE proposé dans [2] ainsi que les estimés obtenus par la méthode POWDER. Dans [1] l'auteur montre que la méthode PLEDGE atteint de manière asymptotique la BCR

associée au modèle d'observation. Afin d'avoir également une idée des performances ultimes nous avons donc tracé sur la Figure1-(a) la BCR associé à PLEDGE, nommée CRB_P et la BCR correspondant à POWDER, nommée CRB_{BD} . Enfin, pour quantifier la qualité de la réjection de l'influence des ondes de directions connues sur les ondes de directions inconnues nous avons tracé la BCR, notée CRB_Θ , associée à un modèle d'observation où les ondes de directions connues sont absentes.

Nous constatons par évidence que l'intégration de l'hypothèse de décorrélation entre les émetteurs dont les directions sont connues et ceux d'intérêts, soit $\mathbf{P}_{uk} = \mathbf{0}$, a un impact non négligeable sur la qualité de la localisation. En effet on constate que globalement POWDER est 10 fois plus précis que PLEDGE et on peut mesurer un gain maximum de 25 dB pour un RSB donné. Nous montrons de plus empiriquement que POWDER atteint la BCR associée et ce beaucoup plus rapidement que PLEDGE par exemple. Enfin, nous constatons que l'écart entre la BCR_{BD} et la BCR_Θ est assez faible, de l'ordre de 5dB. Cela montre, pour ce jeu de paramètres que POWDER a fortement réduit l'influence des émetteurs connus sur ceux d'intérêts.

Nous étudions ensuite le scénario où nous savons que les émetteurs sont tous statistiquement décorrélés. Sous cette hypothèse, nous avons $\mathbf{P} = \mathbf{I}$. Nous gardons les mêmes paramètres de simulation présentés pour le précédent cas de simulation mais nous augmentons toutefois le nombre d'observations à $N = 1000$. Pour un tel scénario, une méthode optimale bien adaptée est celle proposée dans [10] et ici référencée comme PLEDGE-UC. Cette méthode exploite de manière optimale la structure diagonale de la matrice \mathbf{P} en inspirant de la méthodologie donnée dans [6]. L'analyse de la Figure1-(b) nous montre qu'asymptotiquement POWDER et PLEDGE-UC sont aussi précis l'un que l'autre pour localiser les émetteurs mais nous constatons cependant que POWDER atteint la BCR pour un RSB plus faible que PLEDGE-UC. Ce résultat, lié à la simulation et qui pour l'instant n'a pas de justification théorique, est pour le moins surprenant puisque POWDER est plus performant qu'une méthode purement dédiée. Il semble que POWDER exploite plus efficacement sa structure réduite par rapport à une méthode qui minimise une paramétrisation de la covariance. En fait, les BCR associées à POWDER et PLEDGE-UC sont réellement très proche et se confondent rapidement, en tout cas pour le scénario considéré. Cela signifie finalement que l'hypothèse de décorrélation partielle est suffisante et elle répond également au cas de décorrélation totale bien que le nombre de paramètres soit réduit pour ce dernier cas. Nous terminons l'analyse de ce scénario en notant qu'il semble plus difficile de supprimer l'influence des ondes de directions connues sur les ondes de directions d'intérêts.

Nous terminons l'analyse des performances en testant

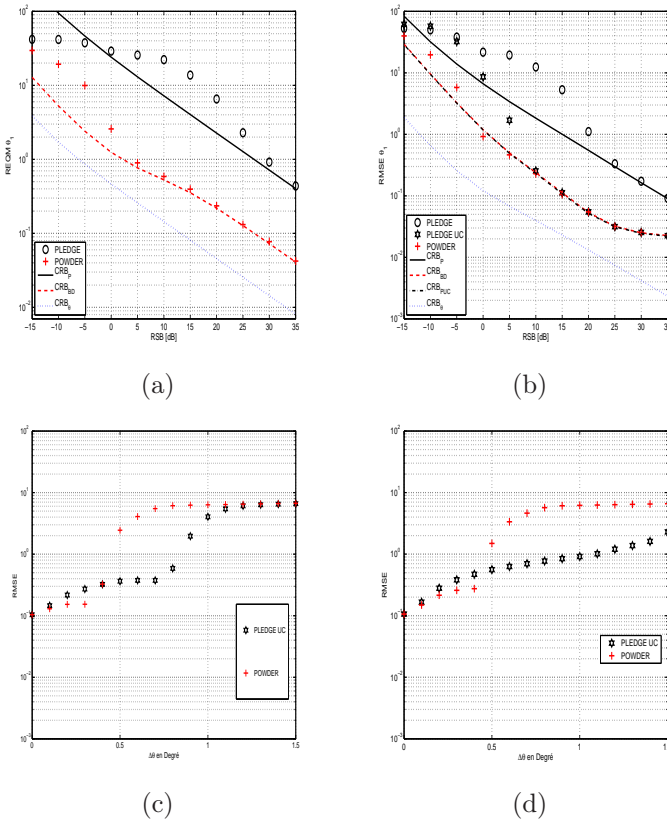


FIGURE 1 – 2 émetteurs connus de directions $\theta_k = [12^\circ \ 20^\circ]^T$ et 2 émetteurs de direction inconnues $\theta_u = [10^\circ \ 15^\circ]^T$, $m=10$, 1000 réalisations MC; (a) matrice \mathbf{P} block-diagonale avec cohérence totale entre les émetteurs, $N=100$; (b) décorrélation totale entre les émetteurs avec \mathbf{P} diagonale, $N=1000$; (c) $N=1000$, $\theta_k = [12^\circ \ (20 + \Delta\theta)^\circ]^T$; $N=1000$, $\theta_k = [(12 + \Delta\theta)^\circ \ (20 + \Delta\theta)^\circ]^T$

la robustesse de la méthode. Nous nous plaçons dans le même contexte que la Figure1-(b) et faisons varier une quantité $\Delta\theta$ exprimée en degré autour d'une des directions connues, les résultats de cette simulation sont exposés via la Figure1-(c). La Figure1-(d) teste les méthodes lorsque la quantité $\Delta\theta$ vient perturber les directions supposées connues. Dans ce scénario l'algorithme PLEDGE-UC semble légèrement plus performant que la méthode POWDER. Que la perturbation concerne une partie ou la totalité des directions supposées connues, au delà de 1° PLEDGE-UC décroche. Le résultat est bien plus pessimiste pour la méthode POWDER puisque la tolérance autour de la direction n'est que de 0.5° environ. Ce sont des résultats que l'on pouvait prédire dans le sens où les méthodes sont développées pour une connaissance exacte des directions. On peut par exemple autoriser des variations de cette connaissance pour rendre plus robuste les méthodes, ceci a par exemple été introduit dans [11].

5 Conclusion

Dans cet article nous avons dérivé une nouvelle méthode pour l'estimation des Directions D'Arrivées lorsque l'opérateur dispose à la fois de la connaissance de la position de certains émetteurs et à la fois la connaissance d'une décorrélation entre les émetteurs connus et ceux d'intérêts. Cette méthode que nous nommons POWDER est très performantes dans de nombreux scénarios et ce quelque soit la corrélation entre les émetteurs. En outre, elle s'avère être de meilleur choix comparativement à une méthode dédiée lorsque toutes les ondes sont décorréliées.

Références

- [1] G. Bouleux. Prior knowledge optimum understanding by means of oblique projectors and their first order derivatives. *IEEE Signal Processing Letters*, 20(3) :205–208, March 2013.
- [2] G. Bouleux, P. Stoica, and R. Boyer. An Optimal Prior knowledge-based DOA Estimation Method. In *17th European Signal Processing Conference*, Aug. 2009.
- [3] R. Boyer and G. Bouleux. Oblique Projections for Direction-Of-Arrival Estimation with Prior Knowledge. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 56(4) :1374–1387, April 2008.
- [4] Y. Bresler and A. Macovski. Exact Maximum Likelihood Parameter Estimation of Superimposed Exponential Signals in Noise. *IEEE ASSP Magazine*, 34 :1081–1089, 1986.
- [5] M. Jansson, B. Göransson, and B. Otersten. A Subspace Method for Direction of Arrival Estimation of uncorrelated Emitter Signals. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 47(4) :945–956, April 1999.
- [6] M. Jansson and B. Ottersten. Structured Covariance Matrix Estimation : A Parametric Approach. In *ICASSP*, pages 3172–3175, June 2000.
- [7] D.A. Linebarger, R.D. DeGroat, E.M. Dowling, P. Stoica, and G.L. Fudge. Incorporating a Priori Information Into MUSIC-Algorithms and Analysis. *Signal Processing*, 46(1), 1995.
- [8] J. Steinwandt, R.C. de Lamare, and M. Haardt. Knowledge-aided direction finding based on unitary ESPRIT. In *Asilomar Conf. on Signals, Systems, and Computers*, 45 :613–617, Nov. 2012.
- [9] P. Stoica and K. Sharman. Maximum Likelihood Methods for Direction Of Arrival Estimation. *IEEE Trans. on Acoustics Speech and Signal Processing*, 38 :1132–1143, 1990.
- [10] P. Wirfält, G. Bouleux, M. Jansson, and P. Stoica. Optimal prior knowledge-based direction of arrival estimation. *IET Signal Processing*, 6(8) :731–742, Oct. 2012.
- [11] P. Wirfält and M. Jansson. Robust prior-based Direction of Arrival estimation. In *IEEE Signal Processing Workshop (SSP)*, pages 81–84, Aug. 2012.