

Opérateur d'inter-énergie $\Psi_{\mathbb{H}}$ et densité inter-spectrale

Abdel-Ouahab BOUDRAA*, THIERRY CHONAVEL⁺ ET JEAN-CHRISTOPHE CEXUS[†]

*IRENav (EA 3634), Ecole Navale/Arts et Métiers ParisTech, BCRM Brest, CC 600, 29240 Brest.

⁺LabSTICC, Télécom Bretagne, Technopole Brest-Iroise, BP 832, 29285, Brest.

[†]LabSTICC, ENSTA Bretagne, 2 rue François Verny, 29806 Brest.

(boudra@ecole-navale.fr, thierry.chonavel@telecom-bretagne.eu,
Jean-Christophe.Cexus@ensta-bretagne.fr)

Résumé – Dans cet article, nous présentons la version Hermitienne, notée $\Psi_{\mathbb{H}}$, de l'opérateur d'inter-énergie $\Psi_{\mathbb{B}}$ [1] où les termes croisés sont issus de la représentation vectorielle des signaux. Nous nous intéressons au lien entre l'opérateur bilinéaire $\Psi_{\mathbb{H}}$ et la densité inter-spectrale de deux signaux complexes. Le lien établi permet d'utiliser l'opérateur $\Psi_{\mathbb{H}}$ pour estimer la fonction de cohérence entre deux signaux. Les résultats obtenus sur des données simulées et réelles montrent l'intérêt de $\Psi_{\mathbb{H}}$ comme mesure de similarité entre deux signaux dans le domaine fréquentiel.

Abstract – In this paper the Hermitian version of the cross- $\Psi_{\mathbb{B}}$ energy operator [1], denoted by $\Psi_{\mathbb{H}}$, is introduced. Its cross-energy terms are formalized through multivariate signals representation. The relationship between the bilinear operator $\Psi_{\mathbb{H}}$ and the cross-power spectral density of two complex-valued signals is investigated. This relationship permits to use the operator $\Psi_{\mathbb{H}}$ to estimate the coherence function between two signals. The effectiveness of $\Psi_{\mathbb{H}}$ is illustrated both on synthetic and real data. Results show the interest of $\Psi_{\mathbb{H}}$ as a similarity measure between two complex-valued signals in the frequency domain.

1 Introduction

L'opérateur d'inter-énergie $\Psi_{\mathbb{B}}$ est une extension de l'opérateur non-linéaire d'énergie de Teager-Kaiser [2], utilisé en démodulation des signaux AM-FM [3], aux signaux complexes [1]. Cet opérateur permet d'estimer l'interaction en énergie entre deux signaux complexes. Nous avons récemment montré l'intérêt de cet opérateur pour l'analyse des signaux non-stationnaires. On peut citer comme applications de $\Psi_{\mathbb{B}}$, l'analyse des séries temporelles [4], la classification de profils d'expression de gènes [5], l'équation des ondes [6], le calcul de temps de retard [7], l'analyse temps-fréquence [8] ou la segmentation d'images [9]. Ces applications montrent l'intérêt de l'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$ pour le traitement des signaux et des images. Dans cet article nous introduisons la version Hermitienne de $\Psi_{\mathbb{B}}$, notée $\Psi_{\mathbb{H}}$ qui possède une expression plus compacte. De plus, nous établissons le lien entre $\Psi_{\mathbb{H}}$ et la densité inter-spectrale et montrons comment $\Psi_{\mathbb{H}}$ peut être utilisé pour mesurer la cohérence entre deux signaux à une fréquence donnée.

2 Densité inter-spectrale et opérateur d'énergie $\Psi_{\mathbb{H}}$

Soient x_t et y_t deux signaux à valeurs complexes. L'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$ est défini comme suit [1] :

$$\Psi_{\mathbb{B}}[x_t, y_t] = \frac{1}{2}[\dot{x}_t^* \dot{y}_t + \dot{x}_t \dot{y}_t^*] - \frac{1}{4}[x_t \ddot{y}_t^* + x_t^* \ddot{y}_t + y_t \ddot{x}_t^* + y_t^* \ddot{x}_t] \quad (1)$$

où \cdot^* est l'opération conjugaison. On montre que l'opérateur $\Psi_{\mathbb{B}}$ est lié à la fonction d'intercorrélation instantanée $R_{xy}(t, \tau)$ par la relation suivante [1] :

$$\Psi_{\mathbb{B}}[x_t, y_t] = - \left. \frac{\partial^2 R_{xy}(t, \tau)}{\partial \tau^2} \right|_{\tau=0} - \left. \frac{\partial^2 R_{xy}^*(t, \tau)}{\partial \tau^2} \right|_{\tau=0} \quad (2)$$

où $R_{xy}(t, \tau)$ est donnée par

$$R_{xy}(t, \tau) = x(t + \frac{\tau}{2}) \cdot y^*(t - \frac{\tau}{2}) \quad (3)$$

De façon analogue à $\Psi_{\mathbb{B}}$, nous définissons l'opérateur $\Psi_{\mathbb{H}}$ par l'équation suivante :

$$\Psi_{\mathbb{H}}[x_t, y_t] = \dot{x}_t \dot{y}_t^* - \frac{1}{2}[x_t \ddot{y}_t^* + \ddot{x}_t y_t^*]. \quad (4)$$

Si \mathbf{z}_1 et \mathbf{z}_2 désignent deux processus vectoriels, l'opérateur $\Psi_{\mathbb{H}}$ s'écrit

$$\Psi_{\mathbb{H}}[\mathbf{z}_{1t}, \mathbf{z}_{2t}] = \dot{\mathbf{z}}_{1t} \dot{\mathbf{z}}_{2t}^H - \frac{1}{2}[\mathbf{z}_{1t} \ddot{\mathbf{z}}_{2t}^H + \ddot{\mathbf{z}}_{1t} \mathbf{z}_{2t}^H] \quad (5)$$

où \cdot^H est la conjugaison Hermitienne. Pour $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = \mathbf{z}$, avec $\mathbf{z} = [x, y]^T$, nous obtenons la représentation matricielle suivante

$$\Psi_{\mathbb{H}}[\mathbf{z}_t, \mathbf{z}_t] = \begin{bmatrix} \Psi_{\mathbb{H}}[x_t, x_t] & \Psi_{\mathbb{H}}[x_t, y_t] \\ \Psi_{\mathbb{H}}[y_t, x_t] & \Psi_{\mathbb{H}}[y_t, y_t] \end{bmatrix} \quad (6)$$

Les termes croisés de $\Psi_{\mathbb{H}}[\mathbf{z}_t, \mathbf{z}_t]$ mesurent le couplage entre x_t et y_t . L'énergie moyenne d'interaction entre deux signaux

à énergie finie mesurée par $\Psi_{\mathbb{H}}$ a été introduite dans [7]. De même, nous définissons l'énergie moyenne de $\Psi_{\mathbb{H}}$ par

$$\mathbb{E}_{\mathbb{H}} \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \Psi_{\mathbb{H}}[\mathbf{z}_{1t}, \mathbf{z}_{2(t-\tau)}] dt. \quad (7)$$

Si $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = \mathbf{z}$ l'énergie d'interaction entre x et y est donnée par

$$\mathbb{E}_{\mathbb{H}xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \Psi_{\mathbb{H}}[x_t, y_{t-\tau}] dt. \quad (8)$$

Plus exactement, $\mathbb{E}_{\mathbb{H}xy}(\tau)$ mesure le couplage moyen entre x_t et $y_{t-\tau}$.

Pour deux processus vectorielles \mathbf{z}_1 et \mathbf{z}_2 , l'intercorrélacion est donnée par

$$R_{\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \mathbf{z}_{1t} \mathbf{z}_{2(t-\tau)}^H dt. \quad (9)$$

Pour $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = [x, y]^T$ nous avons, $R_{yx}(\tau) = R_{xy}^*(-\tau)$.

Dans ce qui suit, nous établissons le lien entre $\mathbb{E}_{\mathbb{H}}$ et la fonction de corrélation.

Proposition 1

$$\mathbb{E}_{\mathbb{H}} \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2(\tau) = 2R_{\dot{\mathbf{z}}_1 \dot{\mathbf{z}}_2}(\tau) \quad (10)$$

En particulier, pour deux signaux scalaires x et y nous obtenons $\mathbb{E}_{\mathbb{H}xy}(\tau) = 2R_{\dot{x}\dot{y}}(\tau)$.

Preuve :

En utilisant la propriété

$$\frac{\partial^{l+m}}{\partial \tau^{l+m}} R_{\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2}(\tau) = (-1)^{(m)} R_{\mathbf{z}_1^{(l)} \mathbf{z}_2^{(m)}}(\tau) \quad (11)$$

où l et m sont deux entiers naturels, il facile de montrer que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{H}} \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \dot{\mathbf{z}}_{1t} \dot{\mathbf{z}}_{2(t-\tau)}^H - \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{z}}_{1t} \mathbf{z}_{2(t-\tau)}^H \\ &+ \mathbf{z}_{1t} \dot{\mathbf{z}}_{2(t-\tau)}^H] dt. \\ &= R_{\dot{\mathbf{z}}_1 \dot{\mathbf{z}}_2}(\tau) - \frac{1}{2} [R_{\mathbf{z}_1 \dot{\mathbf{z}}_2}(\tau) - R_{\dot{\mathbf{z}}_1 \mathbf{z}_2}(\tau)] \\ &= 2R_{\dot{\mathbf{z}}_1 \dot{\mathbf{z}}_2}(\tau) \end{aligned} \quad (12)$$

La densité inter-spectrale de \mathbf{z}_1 et \mathbf{z}_2 est la transformée de Fourier de $R_{\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2}(\tau)$: $S_{\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2}(f) = \mathcal{F}[R_{\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2}(\tau)]$. Pour $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = \mathbf{z}$, nous avons

$$S_{\mathbf{z}\mathbf{z}}(f) = \begin{bmatrix} S_{xx}(f) & S_{xy}(f) \\ S_{yx}(f) & S_{yy}(f) \end{bmatrix} \quad (13)$$

Comme $R_{yx}(\tau) = R_{xy}^*(-\tau)$, il en résulte que $S_{yx}(f) = S_{xy}^*(f)$. De la proposition 1, on déduit le résultat suivant :

Proposition 2

$$\mathcal{F}[\mathbb{E}_{\mathbb{H}} \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2(\tau)] = 2S_{\dot{\mathbf{z}}_1 \dot{\mathbf{z}}_2}(f) \quad (14)$$

En particulier, pour deux signaux scalaires x et y nous avons $\mathcal{F}[\mathbb{E}_{\mathbb{H}xy}(\tau)] = 2S_{\dot{x}\dot{y}}(f)$.

Si \mathbf{z}_1 et \mathbf{z}_2 sont des processus vectoriels à valeurs complexes dans \mathbb{C}^n , comme la dérivation se ramène à un filtrage de réponse fréquentielle $\hat{h}(f) = 2i\pi f$, on a

$$\mathcal{F} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{h}(f)\mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & \hat{h}(f)\mathbf{I}_n \end{bmatrix} \times \mathcal{F} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

où \mathbf{I}_n et $\mathbf{0}_n$ sont les matrices identité et nulle de taille n . Des équations (14) et (15), on peut écrire

$$S_{\dot{\mathbf{z}}_1 \dot{\mathbf{z}}_2}(f) = |\hat{h}(f)|^2 S_{\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2}(f) = \frac{1}{2} \mathcal{F}[\mathbb{E}_{\mathbb{H}} \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2(\tau)] \quad (16)$$

En appliquant la transformée Fourier à l'équation ci-dessus il vient d'après la proposition 14 que :

Proposition 3

$$\mathbb{E}_{\mathbb{H}} \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2(\tau) = 8\pi^2 \int_{\mathbb{R}} f^2 S_{\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2}(f) e^{2j\pi f\tau} df. \quad (17)$$

Pour deux signaux scalaires x et y , l'expression de $\mathbb{E}_{\mathbb{H}xy}(\tau)$ en fonction de l'inter-spectre de x et y est donnée par :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{H}xy}(\tau) = 8\pi^2 \int_{\mathbb{R}} f^2 S_{xy}(f) e^{2j\pi f\tau} df. \quad (18)$$

Au facteur $8\pi^2$ près, $\mathbb{E}_{\mathbb{H}} \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2(\tau)$ est le moment d'ordre deux de $S_{\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2}(f)$. Cette relation peut encore se réécrire

$$S_{xy}(f) = (8\pi^2 f^2)^{-1} \mathcal{F}[\mathbb{E}_{\mathbb{H}xy}(\tau)] \quad (19)$$

Soient x et y deux signaux stationnaires de moyenne nulle. La fonction de coherence est définie par :

$$\gamma_{xy}^S(f) = \frac{|S_{xy}(f)|}{\sqrt{S_{xx}(f)} \cdot \sqrt{S_{yy}(f)}}. \quad (20)$$

Les relations (19) et (20) permettent d'écrire la fonction de coherence en utilisant l'opérateur $\Psi_{\mathbb{H}}$

$$\gamma_{xy}^{\mathbb{H}}(f) = \frac{|\mathcal{F}[\mathbb{E}_{\mathbb{H}xy}](f)|}{\sqrt{\mathcal{F}[\mathbb{E}_{\mathbb{H}xx}](f)} \times \sqrt{\mathcal{F}[\mathbb{E}_{\mathbb{H}yy}](f)}}. \quad (21)$$

Comme $(\gamma_{xy}^{\mathbb{H}}(f))^2 \leq 1$, il est facile de voir que

$$|\mathcal{F}[\mathbb{E}_{\mathbb{H}xy}](f)|^2 \leq \mathcal{F}[\mathbb{E}_{\mathbb{H}xx}](f) \cdot \mathcal{F}[\mathbb{E}_{\mathbb{H}yy}](f) \quad (22)$$

Pour $\mathcal{F}[\mathbb{E}_{\mathbb{H}xy}](f) = 0$, les signaux x et y sont non corrélés à cette fréquence, tandis que la relation $|\mathcal{F}[\mathbb{E}_{\mathbb{H}xy}](f)| = 1$ indique une totale corrélation de x et y ;

3 Résultats

Nous montrons d'abord l'intérêt de $\Psi_{\mathbb{H}}$ pour mesurer l'interaction entre un signal synthétique x_t et sa version filtrée et bruitée (Fig. 1). Soit x_t un signal AM-FM décrit comme suit :

$$\begin{aligned} x_t &= a_t e^{j\phi(t)} \\ a_t &= 1 + \kappa \cos(\omega_a t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \omega_c t + \omega_m \int_0^t q_\tau d\tau \\ q_t &= \sin(\omega_q t)\end{aligned}\quad (23)$$

où a_t est l'amplitude instantanée, ω_c est la fréquence de la porteuse, κ est l'indice de la modulation AM, q_t est la fréquence du signal modulant et ω_m est la fréquence maximale. Pour les simulations nous utilisons les paramètres suivants : $\omega_q = 0.63, \omega_a = 0.63, \omega_c = 1.57, \omega_m = 0.94, \kappa = 0.7$. Soit y_t le signal résultant du filtrage de x_t par un filtre de réponse impulsionnelle g_t et entaché d'un bruit blanc Gaussien complexe, n_t

$$y_t = (g * x)_t + n_t \quad (24)$$

La fonction de transfert du filtre est donnée par

$$G(z) = 1 + \sum_{k=1}^{L-1} g_k z^{-k} \quad (25)$$

avec $g_k \sim 0.1 \times \mathcal{N}(0, 1)$ et $L = 10$. Le rapport signal à bruit est de 0dB.

Pour détecter la présence de x_t dans y_t , nous utilisons la fonction de cohérence basée sur la densité inter-spectrale classique (Eq. 20) ainsi que celle de $\Psi_{\mathbb{H}}$ (Eq. 21). Nous présentons sur les figures 1(a) et 1(b) les spectres de x_t et y_t . Les figures 1(c) et 1(d) représentent les résultats du calcul de $\gamma_{xy}^{\mathbb{H}}(f)$ obtenus par moyennage sur 1 et 15 réalisations respectivement. Ces résultats montrent que malgré un très faible rapport signal à bruit (0dB), $\gamma_{xy}^{\mathbb{H}}(f)$ identifie correctement les fréquences communes à x_t et y_t . Ces fréquences sont d'autant mieux localisées que le nombre de réalisations est élevé. Comparé au spectre de y_t moyenné sur 15 réalisations (Fig. 1(b)) et celui de $\gamma_{xy}^{\mathbb{S}}(f)$ (Fig. 1(e)), nous observons que les pics en fréquence sont mieux identifiés avec $\gamma_{xy}^{\mathbb{H}}(f)$ et avec une meilleure résolution (Fig. 1(d)). Pour le calcul de la cohérence $\gamma_{xy}^{\mathbb{S}}(f)$ (Eq. 20) nous avons utilisé la fonction `mscohere.m` de MatLab avec le même nombre de points de la FFT que celui de $\gamma_{xy}^{\mathbb{H}}(f)$ (Eq. 21) et en utilisant une fenêtre rectangulaire. Notons que malgré la meilleure résolution de $\gamma_{xy}^{\mathbb{H}}(f)$, les pics détectés sont moins élevés que ceux obtenus par la cohérence classique.

Nous illustrons aussi l'intérêt de $\Psi_{\mathbb{H}}$ sur des signaux réels. Des données aérodynamiques sont enregistrés au niveau du mât d'un voilier instrumenté pour les mesures en mer des sollicitations dynamiques sur les voiles (vent, houle, ...) [10]. Le signal correspondant au vent apparent, noté x_t , induit par le tangage du voilier est mesuré par un anémomètre acoustique. L'attitude en tangage du voilier, noté y_t , est mesurée par une centrale inertielle placée au niveau de la coque. Les signaux x_t et y_t de durée 20 secondes sont enregistrés en présence de deux houles par l'avant et de fréquences différentes $f_1 = 0.73\text{Hz}$ et $f_2 = 0.85\text{Hz}$. Ainsi, les variations de x_t et y_t sont liées en partie aux fréquences des ces deux houles. Les deux processus sont supposés ergodiques. Les spectres d'amplitudes correspondants, $|X(f)|$ et $|Y(f)|$, sont représentés sur la figure 1. Les deux fréquences de houle, présentes dans x_t et y_t , sont bien identifiées

par $\mathcal{F}[\mathbb{E}_{\mathbb{H}xy}](f)$ comme deux fréquences communes. Comme l'indique la figure 2, $\mathcal{F}[\mathbb{E}_{\mathbb{H}xy}](f)$ présente deux pics bien localisés en $\mathcal{F}[\mathbb{E}_{\mathbb{H}xy}](f)$ montrant ainsi la parfaite interaction ou corrélation en f_1 et f_2 (Eq. 22) des signaux x_t et y_t . Ce résultat confirme l'intérêt de $\Psi_{\mathbb{H}}$ pour la mesure de similarité entre deux signaux dans le domaine fréquentiel.

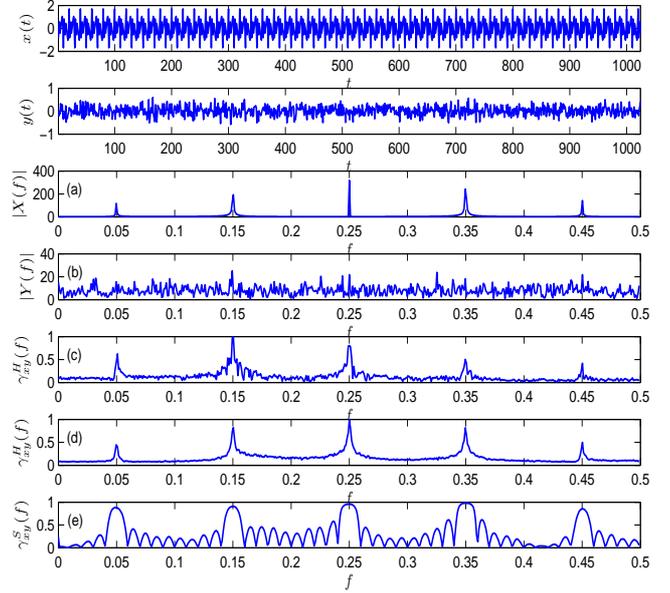


FIGURE 1 – Analyse de signaux AM-FM.

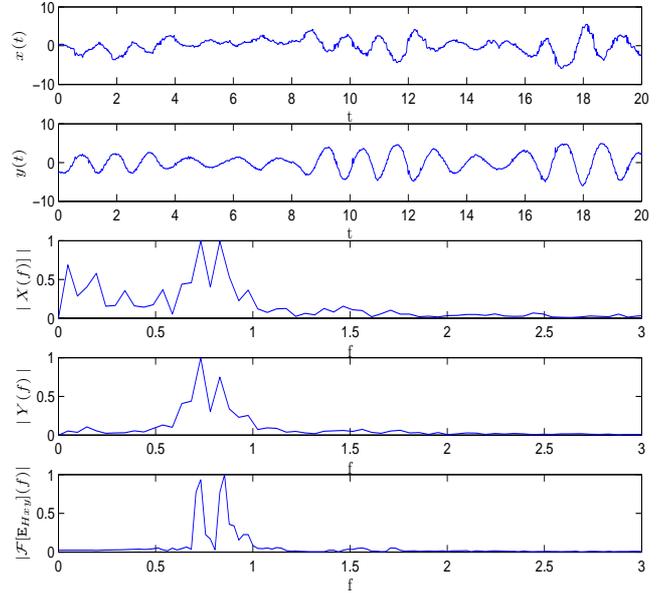


FIGURE 2 – Analyse de signaux aérodynamiques.

4 Conclusions

Dans cet article, on a introduit la version Hermitienne de l'opérateur Ψ_B , notée Ψ_H . Cette extension a permis d'établir le lien avec la densité inter-spectrale de deux signaux complexes, permettant ainsi son estimation via l'opérateur Ψ_H . L'équivalent de la fonction de cohérence basé sur l'emploi de Ψ_H a également été introduit. Les résultats préliminaires, sur des données réelles d'aérodynamisme, montrent l'intérêt de l'opérateur comme mesure de similarité pour l'identification de fréquences communes à deux signaux complexes.

Références

- [1] J.C. Cexus and A.O. Boudraa, "Link between cross-Wigner distribution and cross-Teager energy operator," *Elec. Lett.*, vol. 40, no. 12, pp. 778-780, 2004.
- [2] J.F. Kaiser, "Some useful properties of Teager's energy operators," *Proc. ICASSP*, vol. 3, pp. 149-152, 1993.
- [3] P. Maragos, J. F. Kaiser and T. F. Quatieri, "Energy separation in signal modulations with application to speech analysis," *IEEE Trans. Sig. Proc.*, vol.41, no.10, pp.3024-3051 1993.
- [4] A.O. Boudraa, J.C. Cexus, M. Groussat and P. Brunagel, "An energy-based similarity measure for time series," *Adv. in Sig. Proc.*, ID 135892, 8 pages, 2008.
- [5] W.F. Zhang, C.C. Liu and H. Yan, "Clustering of temporal gene expression data by regularized spline regression an energy based similarity measure," *Patt. Recong.*, vol. 43, pp. 3969-3976, 2010.
- [6] J.P. Montillet, "On a novel approach to decompose finite energy functions by energy operators and its application to the general wave equation," *International Mathematical Forum*, vol. 48, pp. 2387-2400, 2010.
- [7] A.O. Boudraa, J.C. Cexus and K. Abed-Meraim, "Cross- Ψ_B -energy operator-based signal detection," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 123, no. 6, pp. 4283-4289, 2008.
- [8] A.O. Boudraa, "Relationships between Ψ_B -energy operator and some time-frequency representations," *IEEE Sig. Proc. Lett.*, vol. 17, no. 6, pp. 527-530, 2010.
- [9] J.C. Cexus, A.O. Boudraa, A. Baussard, F.H. Ardeyeh and E.H.S. Diop, "2D cross- Ψ_B -energy operator for images analysis," *Proc. IEEE ISCCSP*, 5 pages, 2010, Limassol, Cyprus.
- [10] B. Augier, P. Bot, F. Hauville and M. Durand, "Experimental validation of unsteady models for fluid structure interaction : Application to yacht sails and rigs", *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol. 101, pp 53-66, 2012.