

Mesure des spectres avec échantillonnage irrégulier des fonctions d'autocorrélation

DAVID BONACCI, BERNARD LACAZE

Laboratoire TESA (Télécommunications Spatiales et Aéronautiques)
14-16 Port Saint Etienne, 31000 TOULOUSE, France

David.Bonacci@tesa.prd.fr, Bernard.Lacaze@tesa.prd.fr

Résumé - Ce travail aborde le problème de la reconstruction de spectres $F(\omega)$ à partir de l'échantillonnage irrégulier de fonctions d'autocorrélation $f(t)$. On suppose que $F(\omega)$ s'annule à l'extérieur de l'intervalle $[-\pi, \pi]$: le nombre $2L$ d'instant d'échantillonnage est supposé tel que la variation de $F(\omega)$ sur des intervalles de longueur π/L est assez petite pour aboutir à une bonne interpolation de cette fonction. Les formules de reconstruction démontrées ici reposent le PNS d'ordre $2L$ (Periodic Nonuniform Sampling). Elles permettent des reconstructions qui ne demandent pas de rééchantillonnage périodique et suppriment deux étapes dans la méthode de calcul classique. La méthode proposée peut également être facilement généralisée à des spectres modulés sur bandes de fréquences symétriques.

Abstract - This work addresses the problem of reconstruction of spectra $F(\omega)$ from the irregular sampling of autocorrelation functions $f(t)$. We assume that $F(\omega)$ has bounded support $[-\pi, \pi]$: The number $2L$ of sampling times is such that the variation of $F(\omega)$ on intervals of length π/L is small enough to lead to a good interpolation of this function. Reconstruction formulas are based on PNS (Periodic Nonuniform Sampling) plans. They allow reconstructions not demanding periodic resampling and suppress two stages in classical computations. The method can also be easily generalized to spectra in symmetric frequency bands (bandpass signals).

1 Introduction

Certains appareils mesurent des fonctions d'autocorrélation $f(t)$ à des instants a_k qui seraient périodiques sans des défauts de fabrication introduisant des écarts qui néanmoins sont mesurables. C'est par exemple le cas des interféromètres à échelles constitués de miroirs fixes [1], [2]. La quantité d'intérêt est la transformée de Fourier $F(\omega)$ qui est supposée à support borné $[-\pi, \pi]$:

$$f(t) = \int_{-\pi}^{\pi} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1)$$

Une technique répandue de calcul de $F(\omega)$ à partir des $f(a_k)$ consiste à effectuer un rééchantillonnage à l'aide d'une formule de reconstruction puis d'utiliser une Transformée de Fourier Discrète. Ce problème de rééchantillonner régulièrement des données irrégulièrement échantillonnées avec des instants d'échantillonnage connus a donné lieu à de nombreux articles dans la littérature. On parle souvent de « non uniform sampling » ou de « pseudo-random sampling » (alors que le « random sampling » sous-entend un échantillonnage non régulier dans lequel les instants d'échantillonnage ne sont pas connus).

De nombreuses solutions proposées sont à base d'interpolation (mais le signal doit alors être de type passe-bas). En particulier, il existe des théorèmes équivalents à l'interpolation de Shannon à base de sinus cardinaux dans le cas d'un échantillonnage uniforme pour l'échantillonnage non uniforme. Les théorèmes les plus célèbres sont le théorème de Kadec 1/4 (Kadec's

one-quarter theorem) [3] et la formule Lomb Scargle [4]. Plusieurs articles mentionnent également l'interpolation par les splines (par exemple [5], [6], [7]). Là encore, le signal doit être de type passe-bas.

Dans cet article, nous montrons qu'il est possible de compléter la suite d'échantillonnage de façon à construire un schéma du type PNS (Periodic Nonuniform Sampling) [8]. Lorsque les échantillons utilisables sont suffisamment nombreux, ceux (inconnus) qui sont ajoutés n'ont qu'une importance négligeable. Les formules qui sont démontrées permettent d'obtenir de bonnes approximations à la fois de $f(t)$ et de $F(\omega)$. Des simulations justifient ces assertions.

2 Les formules de reconstruction

2.1 Introduction

Soient $K = \{-L, -L+1, \dots, -1, 1, \dots, L\}$ et la séquence de réels $t = \{t_{kn}, k \in K, n \in Z\}$ (construite à partir des instants d'échantillonnage a_k) où :

$$t_{kn} = a_k + 2nL.$$

On suppose que les a_k sont différents (modulo 1) et que $|a_k| < L$ pour chaque k . Ainsi, les t_{kn} sont différents et $t_{kn} > L$ si $n > 0$. Dans ces conditions, il est bien connu que $f(t)$ peut être reconstruite linéairement et sans erreur en supposant par exemple que $F(\omega)$ s'annule au voisinage de $\pm\pi$.

On considère les fonctions $f_k(t)$ qui résultent du filtrage passe-bande de $f(t)$ sur les bandes de fréquence de la forme

$$D_k = \begin{cases} \left[\frac{(k-1)\pi}{L}, \frac{k\pi}{L} \right] & \text{pour } k = 1, 2, \dots, L \\ \left[\frac{k\pi}{L}, \frac{(k+1)\pi}{L} \right] & \text{pour } k = -L, -L+1, \dots, -1 \end{cases}$$

De manière équivalente :

$$f_k(t) = \int_{D_k} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (2)$$

Dans la mesure où l'ensemble des bandes $\{D_k\}_{k=-L, \dots, L}$ constitue une partition de $[-\pi, \pi]$, (1) et (2) nous permettent de remarquer que :

$$f(t) = \sum_{k \in K} f_k(t) \quad (3)$$

Dans la section 2.2 on montre qu'on peut écrire :

$$\forall m \in K, \quad \sum_{k=1}^L f_k(t) e^{-i(k-\frac{1}{2})(t-a_m)\frac{\pi}{L}} + \sum_{k=-L}^{-1} f_k(t) e^{-i(k+\frac{1}{2})(t-a_m)\frac{\pi}{L}} = V_m(t) \quad (4)$$

avec :

$$V_m(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n f(a_m + 2nL) \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi}{2L} (t - a_m) - n\pi \right], \quad (5)$$

où $\operatorname{sinc}(x) = \sin(x)/x$.

Lorsque L est suffisamment grand, on peut alors montrer que $V_m(t)$ peut être approché par le terme correspondant à $n = 0$ (seul terme significatif) dans (5) :

$$V_m(t) \simeq f(a_m) \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi}{2L} (t - a_m) \right]. \quad (6)$$

Ceci permet de réécrire (4) comme le système suivant de $2L$ équations à $2L$ inconnues $\{f_k(t)\}_{k \in K}$:

$$\forall m \in K, \quad \sum_{k \in K} f_k(t) e^{-i(k-\frac{\varepsilon_k}{2})(t-a_m)\frac{\pi}{L}} = f(a_m) \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi}{2L} (t - a_m) \right] \quad (7)$$

avec $\varepsilon_k = 1$ si $k > 0$ et $\varepsilon_k = -1$ si $k < 0$. A condition que (4) soit un système de Cramer, on en déduit les $f_k(t)$ et donc $f(t)$ par (3).

De plus, lorsque la variation de $F(\omega)$ est faible sur des intervalles de largeur $\frac{\pi}{L}$, on a l'approximation :

$$f_k(0) = \int_{D_k} F(\omega) d\omega \simeq \frac{\pi}{L} F\left(\frac{k\pi}{L}\right) \quad (8)$$

qui permet de reconstruire par morceaux la fonction $F(\omega)$.

Enfin, remarquons que l'approximation consistant à ne conserver que le terme $n = 0$ dans (5) revient à une apodisation qui remplace $f(t)$ par $\tilde{f}(t)$, $F(\omega)$ par $\tilde{F}(\omega)$ définis par :

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & |t| < L \\ 0, & |t| > L \end{cases}, \quad \tilde{F}(\omega) = \frac{L}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \operatorname{sinc}[L(\omega - u)] du$$

ce qui permet de montrer que l'erreur d'interpolation $f(t) - \tilde{f}(t)$ tend vers 0 avec $1/L$.

2.2 Démonstration

Dans cette section, on démontre les formules (4) et (5). On considère d'abord la fonction $e^{i\omega t}$ pour $\omega \in \left[\alpha, \alpha + \frac{\pi}{L}\right]$, t étant fixé. Le développement en série de Fourier sur cet intervalle est :

$$h_t(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(t) e^{i2nL\omega} \quad (9)$$

$$a_n(t) = e^{i\alpha(t-2nL) + \frac{i\pi t}{2L} - in\pi} \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi t}{2L} - n\pi \right)$$

$h_t(\omega)$ est égal à $e^{i\omega t}$ sur $\left[\alpha, \alpha + \frac{\pi}{L}\right]$ mais pas à l'extérieur de cet intervalle sauf lorsque $\pi t/L$ est un entier pair. Par exemple, on a :

$$h_t(\omega) = e^{i(\omega - \frac{\pi}{L})t} \quad \omega \in \left[\alpha + \frac{\pi}{L}, \alpha + \frac{2\pi}{L}\right]$$

Comme (9) est vraie quel que soit t , on a aussi :

$$e^{i\omega t} = e^{i\omega c} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(t-c) e^{i2nL\omega} \quad \omega \in \left[\alpha, \alpha + \frac{\pi}{L}\right]$$

Cette variante de (9) est vraie quel que soit le réel c . La somme du terme de droite converge uniformément, ce qui permet des changements dans l'ordre des sommations. Ainsi, en remplaçant $e^{i\omega t}$ dans (2) par cette expression avec $c = a_m$ et les valeurs de α permettant de scinder uniformément l'intervalle $[-\pi, \pi]$ ($\alpha = \frac{(k-1)\pi}{L}$ ou $\frac{k\pi}{L}$ selon le signe de k), on obtient :

$$f_k(t) = e^{i\frac{\pi}{L}(k-\frac{1}{2})(t-a_m)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_k(a_m + 2nL) (-1)^n \operatorname{sinc} \pi \left[\frac{t-a_m}{2L} - n \right] \quad (10)$$

pour $k > 0$ et :

$$f_k(t) = e^{i\frac{\pi}{L}(k+\frac{1}{2})(t-a_m)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_k(a_m + 2nL) (-1)^n \operatorname{sinc} \pi \left[\frac{t-a_m}{2L} - n \right] \quad (11)$$

pour $k < 0$. Le problème clé est de mettre en évidence les données, c'est-à-dire les

$$f(a_m) = \sum_{k \in K} f_k(a_m).$$

En multipliant (10) et (11) par $e^{i\frac{\pi}{L}(k-\frac{1}{2})(t-a_m)}$ ou $e^{i\frac{\pi}{L}(k+\frac{1}{2})(t-a_m)}$, on retrouve bien les équations (4) et (5).

2.3 Remarques

Cette démonstration n'utilise aucune propriété liée au fait qu'on mesure des fonctions d'autocorrélation $f(t)$. Autrement dit, la transformée de Fourier $F(\omega)$ peut très bien être négative. En fait la seule hypothèse utilisée est que le support de $F(\omega)$ soit un intervalle borné.

D'autre part, il est possible de généraliser ces formules au cas où le support spectral est divisé en 2 intervalles symétriques (signaux bande étroite).

3 Simulations

3.1 Estimation spectrale

On considère pour les simulations la fonction $F(\omega)$ suivante, ainsi que sa transformée de Fourier inverse $f(t)$:

$$F(\omega) = \begin{cases} 4\omega + \frac{\pi}{2} & \omega \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right] \\ -4\omega & \omega \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right] \\ 0 & \omega \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ 16\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right) & \omega \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}\right] \\ -16\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) & \omega \in \left[\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} . \quad (12)$$

De façon équivalente :

$$f(t) = \frac{16}{t^2} \sin^2\left(\frac{\pi t}{8}\right) e^{-i\frac{\pi t}{4}} + \frac{64}{t^2} \sin^2\left(\frac{\pi t}{16}\right) e^{i\frac{3\pi t}{8}} \quad (13)$$

Même avec un faible nombre d'observation non uniformes en temps (en choisissant $L=30$ et des instants d'échantillonnage uniformément répartis sur $[-L, L]$), on reconstruit avec une bonne précision la fonction temporelle $f(t)$ sur $[-L, L]$ grâce à (7), ainsi que sa transformée de Fourier $F(\omega)$ grâce à (8) :

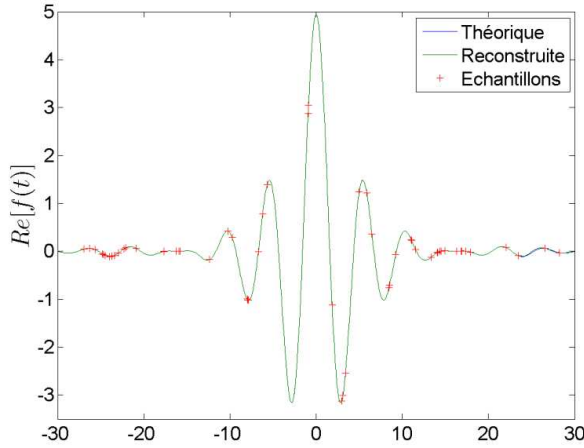


Figure 1 : Partie réelle de la fonction temporelle théorique et reconstruite en fonction du temps t

La figure 1 montre que les fonctions $f(t)$ théorique et reconstruite sont confondues (on ne montre ici que la partie réelle). La figure 2 montre également une coïncidence quasi-parfaite des fonctions $F(\omega)$ théorique et reconstruite au centre des intervalles D_k .

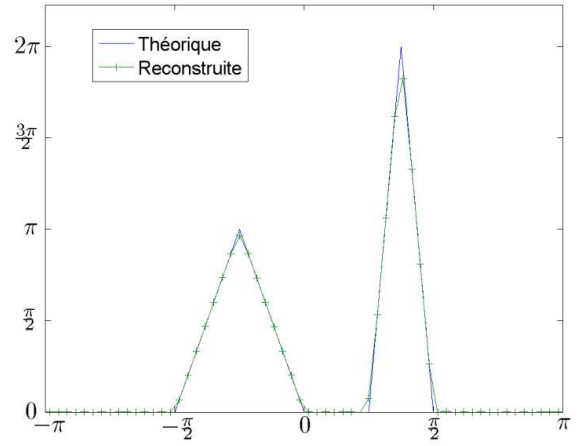


Figure 2 Fonction $F(\omega)$ théorique et reconstruite en fonction de la pulsation ω

3.2 Filtrage

Les formules de reconstruction données dans cet article peuvent également servir à faire du filtrage linéaire à partir d'un échantillonnage irrégulier, toujours sans avoir à ré-échantillonner uniformément les fonctions. On considère dans cette section le cas du calcul du signal analytique à partir de la fonction paire suivante :

$$F(\omega) = \begin{cases} \sin 4\omega & \omega \in \left[0, -\frac{\pi}{4}\right] \\ \sin 8\omega & \omega \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}\right] \\ 8\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) & \omega \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}\right] \\ -8\left(\omega - \frac{3\pi}{4}\right) & \omega \in \left[\frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}\right] \end{cases} . \quad (14)$$

et $F(\omega) = 0$ pour les autres valeurs positives de ω . La fonction temporelle associée par Transformée de Fourier inverse est :

$$f(t) = \frac{8}{16-t^2} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)\right) + \frac{16}{64-t^2} \left(\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi t}{8}\right)\right) + \frac{16}{t^2} \left(2 \cos\left(\frac{5\pi t}{8}\right) - \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\pi t}{4}\right)\right) \quad (15)$$

On choisit $2L=60$ échantillons répartis uniformément sur l'intervalle $[-30, 30]$ correspondant au support temporel de la fonction $f(t)$. Les figures 3 et 4 illustrent cet exemple. Soit aussi le signal analytique $g(t)$ défini par l'opération de filtrage suivante :

$$g(t) = 2 \int_0^\pi e^{i\omega t} F(\omega) d\omega \quad (16)$$

Grâce aux équations (2) et (3), on peut reconstruire $g(t)$ à l'aide des formules de reconstruction de la manière suivante :

$$g(t) = \sum_{k \in K, k > 0} f_k(t) \quad (17)$$

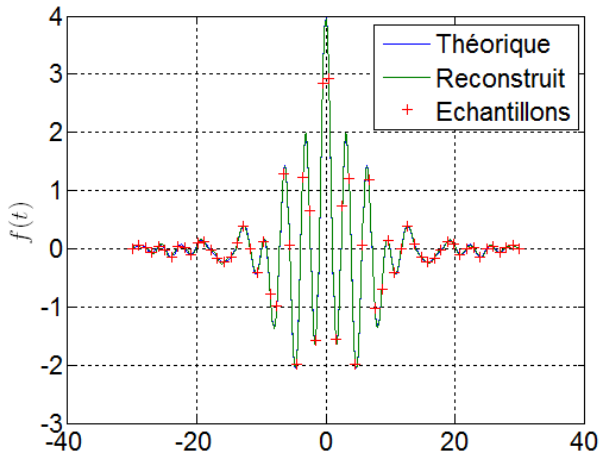


Figure 3 : Partie réelle de la fonction temporelle théorique et reconstruite en fonction du temps t

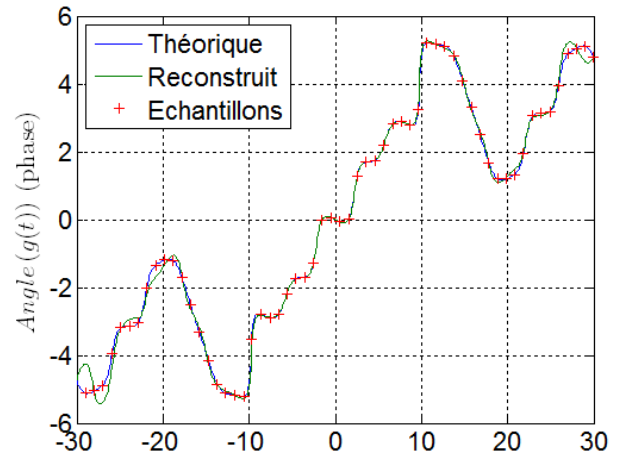


Figure 6 : Phase de $g(t)e^{-i\frac{\pi}{2}t}$

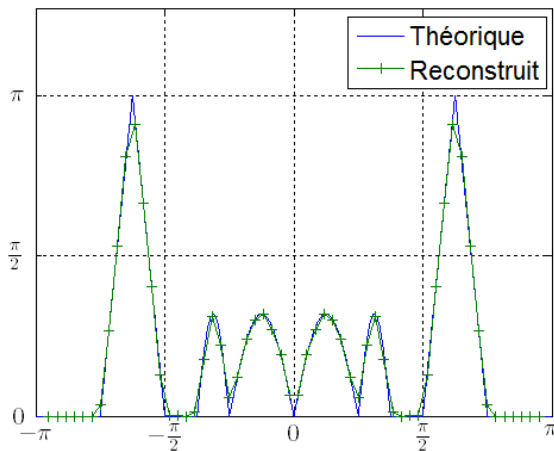


Figure 4 : Fonction $F(\omega)$ théorique et reconstruite en fonction de la pulsation ω

Le signal analytique est représenté figures 5 et 6. Pour un meilleur affichage, on trace la phase de $g(t)e^{-i\frac{\pi}{2}t}$ plutôt que directement la phase de $g(t)$ qui contient une forte variation linéaire en fonction de ω . Ces figures illustrent bien la possibilité de réaliser une opération de filtrage linéaire directement à partir des échantillons irréguliers.

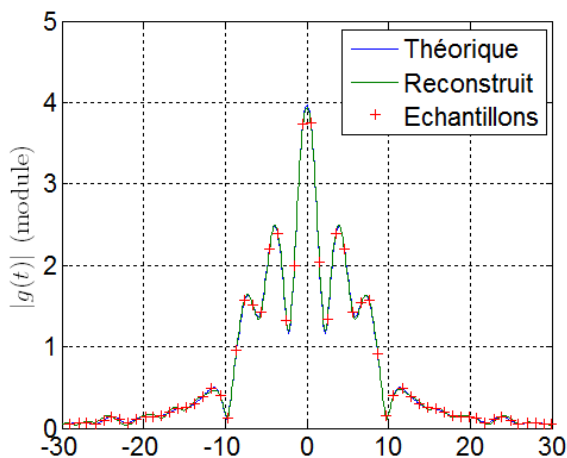


Figure 5 : Module de $g(t)$

4 Conclusion

Les résultats exposés dans cet article peuvent être étendus au cas de fonctions à spectres dans des bandes symétriques : c'est le cas des instruments embarqués du type SIFTI ou TROPOMI. C'est également le cadre naturel des échantillonnages du type PNS. D'autre part on peut construire des formules d'interpolation exactes dans le cas d'échantillonnages irréguliers plus généraux [3]. Mais la méthode que nous avons exposée a l'avantage de calculer le spectre et de faire du filtrage linéaire sans interpoler la fonction qui a été échantillonnée. Les démonstrations des formules sont données dans l'article ainsi que des résultats de simulations sur des cas simples pour valider les formules.

5 Bibliographie

- [1] P. Hebert et al, *Instrumental concept and preliminary performances of SIFTI : static infrared Fourier transform interferometer*, ICSO 2008 Toulouse.
- [2] F. Brachet et al, *Conception and development of a static Fourier transform spectrometer breadboard*, ICSO 2010 Rhodes.
- [3] Farokh A. Marvasti, *Non uniform sampling, theory and practice*, Kluwer Academic Plenum Publishers, 2002.
- [4] J. Scargle, *Statistical Aspects of Spectral Analysis on Unevenly Spaced Data*, The Astrophysical Journal. 263:835–853, 1982.
- [5] Y-R. Sun and S. Signall, *Algorithms for nonuniform bandpass sampling in radio receiver*, ISACS 2003, vol 1, p. I.1-I.4, 25-28 May 2003.
- [6] P. P. Vaidyanathan, *Generalizations of the sampling theorem: seven decades after Nyquist*, IEEE Trans on Circ. and Syst., I, vol 48, Issue 9, p.1094-1109, september 2001.
- [7] Interpolation revisited [medical images application], IEEE Trans on Med. Imaging, Volume 19, Issue 7, p. 739 - 758, July 2000.
- [8] J. R. Higgins, *Some Gap Sampling Series for Multiband Signals*, Signal Processing 12 (1987) 303-309.