

Borne de Cramér-Rao modifiée pour le temps d'arrivée et la période symbole. Application aux signaux de recherche et de sauvetage.

Victor BISSOLI NICOLAU^{1,2}, Martial COULON¹, Yoan GRÉGOIRE³, Thibaud CALMETTES⁴, Jean-Yves TOURNERET¹

¹Université de Toulouse, INP-ENSEEIH/IRIT, 2 rue Charles Camichel, BP 7122, 31071 Toulouse Cedex 7, France

²TéSA, 14-16 Port Saint-Etienne, 31000 Toulouse, France ³CNES, 18 Av. Edouard Belin, 31401 Toulouse Cedex 9, France

⁴Thales Alenia Space, 26 Av. Jean-François Champollion, 31037 Toulouse Cedex 1, France
{victor.bissolinicolau, martial.coulon, jean-yves.tourneret}@enseeiht.fr
yoan.gregoire@cnes.fr, thibaud.calmettes@thalesaleniaspace.com

Résumé – Cet article étudie la performance des estimateurs de temps d'arrivée de signaux de détresse qui sont définis par des formes d'onde ayant des transitions douces. Ces signaux sont utilisés dans le système de recherche et sauvetage par satellite Cospas-Sarsat. Nous proposons un modèle de signal basé sur des transitions sigmoïdales. Des expressions analytiques des bornes de Cramér-Rao modifiées associées aux paramètres de ce modèle sont déterminées. Les expressions obtenues sont faciles à interpréter, car elles dépendent analytiquement des paramètres du système. Des simulations effectuées avec des signaux réalistes concordent avec les résultats théoriques.

Abstract – This paper focuses on the performance of time of arrival estimators for distress beacon signals which are defined by pulses with smooth transitions. These signals are used in the satellite-based search and rescue Cospas-Sarsat system. We propose a signal model based on sigmoidal functions. Closed-form expressions for the modified Cramér-Rao bounds associated with the parameters of this model are derived. The obtained expressions are easy to interpret since they analytically depend on the system parameters. Simulations conducted on realistic search and rescue signals show good agreement with the theoretical results.

1 Introduction

Le système de recherche et sauvetage Cospas-Sarsat [1] a été conçu pour localiser des balises de détresse, en utilisant des satellites en orbite basse et le traitement Doppler. La constellation actuelle est en cours de remplacement par des satellites en orbite moyenne qui couvrent de plus grandes zones de la surface de la Terre permettant des alertes quasi instantanées [2]. Toutefois, en raison des orbites plus élevées, les signaux reçus seront plus faibles et l'effet Doppler moins important. Dans ce scénario, des méthodes d'estimation basées sur les temps d'arrivée (ou TOA pour *Time of Arrival*), ou en utilisant aussi les fréquences d'arrivée, sont actuellement étudiées [3].

Le but de ce travail est d'étudier la performance des estimateurs des temps d'arrivée des signaux issus du système Cospas-Sarsat. Nous introduisons des fonctions sigmoïdales pour modéliser les transitions de ces signaux. Nous calculons ensuite les bornes de Cramér-Rao modifiées (ou MCRBs pour *Modified Cramér-Rao Bounds*) [4] pour les paramètres du modèle.

Cet article est structuré comme suit : la Section 2 introduit le modèle de signal proposé dont les transitions sont des fonctions sigmoïdales. Dans la Section 3, les MCRBs pour les estimateurs de TOA et de la période symbole sont déterminées. La Section 4 montre les résultats de simulation, avec un bon accord par rapport aux bornes théoriques obtenues. Les conclusions sont présentées dans la Section 5.

Les auteurs souhaitent remercier Thales Alenia Space et le CNES pour les conseils techniques et le financement.

2 Modèle de signal Cospas-Sarsat

Suivant les spécifications des balises de détresse [5], le signal de recherche et sauvetage utilisé pour le système Cospas-Sarsat peut être modélisé par

$$r(t) = s(t) + w(t) \quad (1)$$

avec

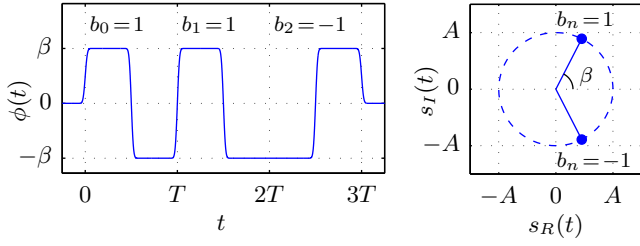
$$s(t) = A \exp \left\{ j \left[2\pi\nu t + \beta \sum_{n=0}^{N-1} b_n g(t - nT - \tau) \right] \right\} \quad (2)$$

où le terme $w(t)$ est un bruit blanc gaussien dont les parties réelle et imaginaire ont chacune une densité spectrale de puissance égale à N_0 , A est un facteur d'amplitude, ν est le résidu de la porteuse, N est le nombre de symboles, β est l'indice de modulation, $\mathbf{b} = \{b_n\}$ est une suite de variables aléatoires de moyennes nulles, indépendantes et identiquement distribuées (iid) associées aux bits d'information, T est la largeur symbole et τ est le délai de transmission. La Fig. 1(a) montre la phase $\phi(t)$ du signal et la Fig. 1(b) illustre le plan complexe, où $s_R(t)$ et $s_I(t)$ sont les parties réelles et imaginaires de $s(t)$. Afin de tenir compte des transitions continues de phase entre $-\beta$ et β , nous proposons la fonction suivante pour modéliser la mise en forme de Manchester $g(t)$

$$g(t) = \frac{1}{2}f_\alpha(t) - f_\alpha(t - T/2) + \frac{1}{2}f_\alpha(t - T) \quad (3)$$

où $f_\alpha(t)$ est une fonction sigmoïde définie comme suit

$$f_\alpha(t) = \operatorname{erf}(\alpha t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha t} e^{-x^2} dx. \quad (4)$$



(a) Phase de $s(t)$ pour $\mathbf{b} = (1, 1, -1)$. (b) Plan complexe.

FIGURE 1 – Phase (a) et plan complexe (b) du signal $s(t)$.

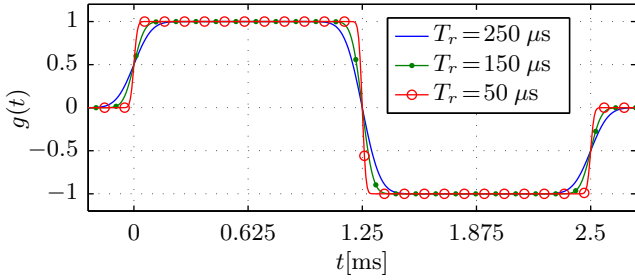


FIGURE 2 – Impulsion de Manchester $g(t)$ pour différents T_r .

La motivation pour utiliser (4) est que sa dérivée est une impulsion gaussienne dont la transformée de Fourier est simple. Cette caractéristique est importante pour obtenir une expression analytique des MCRBs d'intérêt. Le paramètre α permet de régler le temps de montée du signal, noté T_r . Dans le cas du signal Cospas-Sarsat, T_r est défini comme le temps compris par la phase pour passer de 10% à 90% [5], c'est-à-dire, pour que $f_\alpha(t)$ change son amplitude de -0.9 à 0.9 . Ainsi

$$\alpha = \frac{2 \operatorname{erf}^{-1}(0.9)}{T_r} \approx \frac{2.3262}{T_r} \quad (5)$$

où $\operatorname{erf}^{-1}(\cdot)$ est la fonction d'erreur inverse. La forme de l'impulsion $g(t)$ est illustrée sur la Fig. 2 pour des temps de montée minimum ($T_r = 50 \mu\text{s}$), nominal ($T_r = 150 \mu\text{s}$) et maximum ($T_r = 250 \mu\text{s}$) suivant les spécifications du système [5].

3 Calcul des MCRBs

L'estimation du TOA τ est liée à la connaissance précise de la période symbole, qui varie selon le rythme symbole, $R_s = 1/T = 400 \text{ bps} \pm 1\%$, selon [5]. Cette section développe les MCRBs pour l'estimation conjointe du vecteur de paramètres $\boldsymbol{\lambda} = (T, \tau)^T$. La matrice de covariance d'un estimateur de $\boldsymbol{\lambda}$, dénotée $\mathbf{C}_{\hat{\boldsymbol{\lambda}}}$ (où $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = (\hat{T}, \hat{\tau})^T$), est telle que [6]

$$\mathbf{C}_{\hat{\boldsymbol{\lambda}}} - \mathbf{I}_M^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) \succeq \mathbf{0} \quad (6)$$

où $\mathbf{I}_M(\boldsymbol{\lambda})$ représente la matrice d'information de Fisher modifiée (MFIM), ici de dimension 2×2 , et $\succeq \mathbf{0}$ signifie que la matrice est semi-définie positive. En suivant les calculs menés dans [7], les éléments de la MFIM sont donnés par

$$[\mathbf{I}_M(\boldsymbol{\lambda})]_{ij} = \mathbb{E}_{\mathbf{r}, \mathbf{u}} \left[\frac{\partial \ln p(\mathbf{r}|\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \ln p(\mathbf{r}|\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_j} \right] \quad (7)$$

où \mathbf{r} est le vecteur des données, $\mathbf{u} = (A, \nu, \mathbf{b})^T$ est le vecteur des paramètres indésirables et $p(\mathbf{r}|\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ est la densité de probabilité du vecteur d'observation. Il est habituel d'utiliser un

formalisme basé sur des signaux à temps continu. Selon [8, p. 292], à la limite, quand les dimensions de \mathbf{r} tendent vers l'infini, $p(\mathbf{r}|\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ peut s'exprimer comme

$$p(\mathbf{r}|\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \exp \left[-\frac{1}{2N_0} \int_{T_0} |r(t) - s(t)|^2 dt \right] \quad (8)$$

où T_0 est la durée du signal. Avec (8) et (7), suivant les développements de [4], les éléments de la MFIM sont donnés par

$$[\mathbf{I}_M(\boldsymbol{\lambda})]_{ij} = \frac{1}{N_0} \mathbb{E}_{\mathbf{u}} \left[\int_{T_0} I_t(\lambda_i, \lambda_j) dt \right] \quad (9)$$

où

$$I_t(\lambda_i, \lambda_j) = \frac{\partial s_R(t)}{\partial \lambda_i} \frac{\partial s_R(t)}{\partial \lambda_j} + \frac{\partial s_I(t)}{\partial \lambda_i} \frac{\partial s_I(t)}{\partial \lambda_j}. \quad (10)$$

Dans la suite de cette section, les éléments hors diagonaux de la MFIM sont calculés pour $\boldsymbol{\lambda} = (T, \tau)^T$. Avec les notations $\phi_\nu(t) = 2\pi\nu t$ et $\phi_g(t) = \beta \sum_{n=0}^{N-1} b_n g(t - nT - \tau)$, $s_R(t)$ et $s_I(t)$ peuvent se réécrire comme $s_R(t) = A \cos[\phi_\nu(t) + \phi_g(t)]$ et $s_I(t) = A \sin[\phi_\nu(t) + \phi_g(t)]$. Ainsi $I_t(T, \tau)$ devient

$$I_t(T, \tau) = A^2 \frac{\partial \phi_g(t)}{\partial T} \frac{\partial \phi_g(t)}{\partial \tau}. \quad (11)$$

En calculant les dérivées partielles de $\phi_g(t)$ par rapport à T et τ , on obtient

$$I_t(T, \tau) = A^2 \beta^2 \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} b_n b_m p_{n,T}(t) p_{m,\tau}(t) \quad (12)$$

où $p_{n,T}(t) = \partial g(t - nT - \tau) / \partial T$ et $p_{m,\tau}(t) = \partial g(t - mT - \tau) / \partial \tau$. Comme les symboles b_n et b_m sont indépendants pour $n \neq m$, $\mathbb{E}[b_n b_m^*] = \delta_{nm}$ (où δ_{nm} est le delta de Kronecker), d'où

$$[\mathbf{I}_M(\boldsymbol{\lambda})]_{12} = \frac{A^2 \beta^2}{N_0} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{T_0} p_{n,T}(t) p_{n,\tau}(t) dt. \quad (13)$$

L'intégrale $\int_{T_0} p_{n,T}(t) p_{n,\tau}(t) dt$ (notée $E_{p,n}$) peut être évaluée dans le domaine fréquentiel en considérant la largeur de bande B et l'impulsion de Manchester sigmoïdale

$$E_{p,n} = \int_{T_0} p_{n,T}(t) p_{n,\tau}^*(t) dt = \int_{-B/2}^{B/2} P_{n,T}(f) P_{n,\tau}^*(f) df. \quad (14)$$

Suivant les calculs détaillés en Annexe, $E_{p,n}$ devient

$$E_{p,n} = \frac{3\alpha}{\sqrt{2\pi}} (2n+1) \quad (15)$$

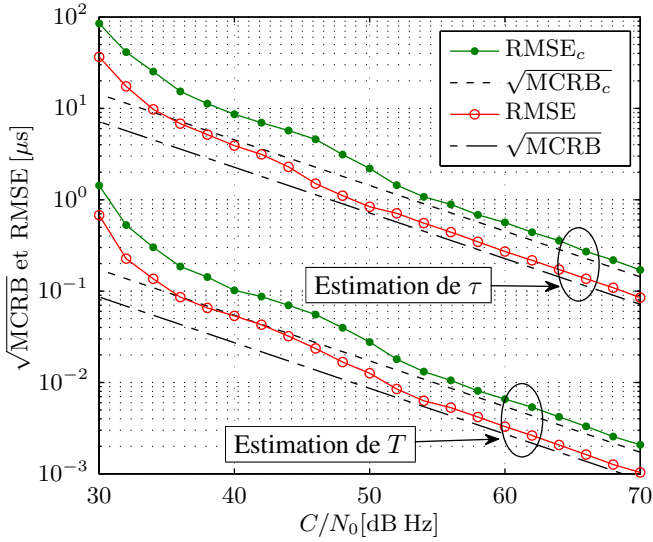
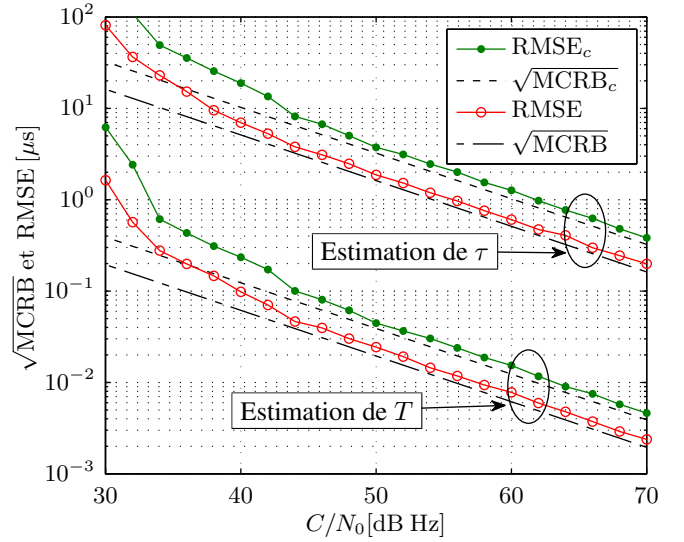
où $B \geq \alpha\sqrt{2}$. En remplaçant l'expression de $E_{p,n}$ dans (13), les éléments extradiagonaux de la MFIM deviennent

$$[\mathbf{I}_M(\boldsymbol{\lambda})]_{12} = \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\alpha A^2 \beta^2}{N_0} \right) N^2 \quad (16)$$

où $B \geq \alpha\sqrt{2}$. Les éléments diagonaux de la MFIM sont calculés de façon similaire avec $\lambda_i = \lambda_j = T$ pour $[\mathbf{I}_M(\boldsymbol{\lambda})]_{11}$ et $\lambda_i = \lambda_j = \tau$ pour $[\mathbf{I}_M(\boldsymbol{\lambda})]_{22}$. La MFIM $\mathbf{I}_M(\boldsymbol{\lambda})$ s'écrit alors

$$\mathbf{I}_M(\boldsymbol{\lambda}) = 3\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\alpha A^2 \beta^2}{N_0} \right) \begin{bmatrix} \frac{N^3}{3} & \frac{N^2}{2} \\ \frac{N^2}{2} & N \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Cette expression peut être utilisée pour calculer la MCRB conjointe pour l'estimation de (T, τ) , pour l'estimation de τ (avec T connu) et pour l'estimation de T (avec τ connu). Ces résultats sont présentés dans les sections suivantes.

(a) $T_r = 50 \mu\text{s}$.(b) $T_r = 250 \mu\text{s}$.FIGURE 3 – Performance d'estimation du TOA et de T pour les temps de montée minimum (a) et maximum (b) autorisés.

3.1 Estimation conjointe de (T, τ)

La diagonale de $\mathbf{I}_M^{-1}(\boldsymbol{\lambda})$ définit les MCRBs de T et de τ dans le cas de l'estimation conjointe de ces paramètres. À partir de

$$\mathbf{I}_M^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) = 4\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{N_0}{\alpha A^2 \beta^2 N^3} \right) \begin{bmatrix} 1 & -\frac{N}{2} \\ -\frac{N}{2} & \frac{N^2}{3} \end{bmatrix} \quad (18)$$

on obtient, pour $B \geq \alpha\sqrt{2}$,

$$\text{MCRB}_c(T) = 4\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\alpha\beta^2 \left(\frac{C}{N_0}\right) N^3}, \quad (19)$$

$$\text{MCRB}_c(\tau) = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\alpha\beta^2 \left(\frac{C}{N_0}\right) N} \quad (20)$$

où $C = A^2$ et l'indice c indique une estimation conjointe de T et de τ . Ces expressions montrent qu'un plus grand rapport C/N_0 donne des résultats plus précis. De plus, en augmentant α (en réduisant le temps de montée), ou en augmentant β (l'amplitude de l'impulsion en phase), on obtient des impulsions plus abruptes et de meilleures estimations. La MCRB de T est inversement proportionnelle à N^3 , ce qui est classique pour un rythme symbole [9, 10]. La MCRB pour τ est inversement proportionnelle à N , ce qui est aussi un résultat classique (voir des bornes similaires dans [4]).

3.2 Estimation de T pour τ connu

L'inversion de $[\mathbf{I}_M(\boldsymbol{\lambda})]_{11}$ dans (17) donne la borne modifiée pour un estimateur de T pour une valeur de τ connue

$$\text{MCRB}(T) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\alpha\beta^2 \left(\frac{C}{N_0}\right) N^3} \quad (21)$$

où $B \geq \alpha\sqrt{2}$. Par rapport à (19), on note une perte de performance de l'estimation de T lorsque τ est estimé, soit :

$$\text{MCRB}_c(T) = 4\text{MCRB}(T). \quad (22)$$

3.3 Estimation de τ pour T connu

L'inversion de $[\mathbf{I}_M(\boldsymbol{\lambda})]_{22}$ dans (17) donne la borne modifiée pour un estimateur de τ pour une valeur de T connue

$$\text{MCRB}(\tau) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\alpha\beta^2 \left(\frac{C}{N_0}\right) N} \quad (23)$$

où $B \geq \alpha\sqrt{2}$. En comparaison avec (20), la perte de performance liée à l'estimation de τ lorsque T est estimée est

$$\text{MCRB}_c(\tau) = 4\text{MCRB}(\tau) \quad (24)$$

qui sera vérifiée dans la partie suivante dédiée aux simulations.

4 Résultats de simulation

Dans cette partie, les bornes déterminées dans la section précédente sont comparées avec les erreurs quadratiques moyennes d'estimateurs calculées à partir de 1000 messages de détresse simulés. L'estimation de T et de τ est réalisée par une méthode de rééchantillonnage adaptée de [11], en exploitant la cyclostationnarité du signal et la symétrie de l'impulsion $g(t)$. Plus précisément, l'intégration d'une séquence d'impulsions de Manchester produit une somme de fonctions triangulaires situées aux instants kT , $k = 1, \dots, N$, qui sont concaves ou convexes suivant la valeur de bits d'information b_n . Ceci est réalisé pour différents valeurs de τ et de T suivant une grille pré-spécifiée avec une résolution suffisante (40 valeurs pour T et 40 valeurs pour τ) afin d'assurer une bonne performance d'estimation. Puis, la valeur de $\boldsymbol{\lambda} = (T, \tau)^T$ qui maximise une *fonction de contraste* définie dans [11] est retenue pour construire $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$.

Les paramètres de simulation correspondant aux spécifications du système [5] sont regroupés dans le Tableau 1. La Figure 3 compare la racine carrée des MCRBs avec celle des erreurs quadratiques moyennes (ou RMSE pour *Root Mean Square Errors*) de τ et T pour $T_r = 50 \mu\text{s}$ et $T_r = 250 \mu\text{s}$

TABLE 1 – Paramètres de la simulation

Paramètre	Symbole	Valeur	Unité
Rythme Symbole	R_s	404	symboles/s
Nombre de symboles	N	144	symboles
Indice de modulation	β	1.1	radians
Largeur de bande	B	$\alpha\sqrt{2}$	Hz

(valeurs minimum et maximum permises pour le signal de détresse). Comme prévu, des résultats plus précis sont obtenus pour un T_r plus court (Fig. 3(a)). Les RMSEs des estimateurs sont proches des bornes correspondantes, ce qui signifie une bonne performance. Ces courbes sont utiles pour évaluer la performance du système pour différentes valeurs des paramètres.

5 Conclusion

Dans cet article, nous avons déterminé des expressions analytiques pour les bornes de Cramér-Rao modifiées de la période symbole et du temps d'arrivée d'un signal de détresse du système Cospas-Sarsat modélisé à l'aide de transitions sigmoïdales. Ces bornes fournissent une référence pour les erreurs quadratiques moyennes des estimateurs et peuvent être utilisées pour ajuster certains paramètres du système. Une meilleure précision peut être obtenue, par exemple, en augmentant le nombre de symboles, ou en limitant le temps de montée. Les travaux futurs pourraient être orientés vers l'estimation des fréquences d'arrivée, ainsi que de la position de la balise de détresse, en tenant compte des paramètres déjà estimés.

6 Annexe

Dans cette Annexe, nous calculons $E_{p,n}$ en utilisant (14). À l'aide des transformées de Fourier $P_{n,T}(f)$ et $P_{n,\tau}(f)$ de $p_{n,T}(t)$ et $p_{n,\tau}(t)$, on obtient

$$P_{n,T}(f)P_{n,\tau}^*(f) = e^{-\frac{2\pi^2 f^2}{\alpha^2}} [6n + 3 - (4n + 1)e^{j\pi fT} - (4n + 3)e^{-j\pi fT} + ne^{j2\pi fT} + (n + 1)e^{-j2\pi fT}]. \quad (25)$$

Puisque la partie imaginaire de (25) est composée de fonctions impaires, son intégrale sur l'intervalle $[-B, B]$ est nulle, donc

$$E_{p,n} = (2n + 1) \int_{-B/2}^{B/2} e^{-\frac{2\pi^2 f^2}{\alpha^2}} [3 - 4 \cos(\pi fT) + \cos(2\pi fT)] df. \quad (26)$$

En utilisant l'identité suivante, [12, p. 108]

$$\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} e^{-\frac{2\pi^2 f^2}{\alpha^2}} \cos(2\pi fx) df = \frac{\alpha e^{-\frac{x^2 \alpha^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\pi B + jx\alpha^2}{\alpha\sqrt{2}} \right) \right] \quad (27)$$

l'expression (26) devient

$$E_{p,n} = (6n + 3) \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\pi B}{\alpha\sqrt{2}} \right) \right] - (8n + 4) \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{T^2 \alpha^2}{8}} \operatorname{Re} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\pi B + j(T/2)\alpha^2}{\alpha\sqrt{2}} \right) \right] + (2n + 1) \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{T^2 \alpha^2}{2}} \operatorname{Re} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\pi B + jT\alpha^2}{\alpha\sqrt{2}} \right) \right]. \quad (28)$$

Une approximation peut alors être utilisée. En effet, en considérant la valeur de T_r du signal modulé et les spécifications du rythme symbole, on a

$$e^{-\frac{T^2 \alpha^2}{8}} \Big|_{\substack{T_r=250 \mu\text{s} \\ T=0.0025 \text{ s}}} = 4.2163 \times 10^{-30}. \quad (29)$$

En conséquence, les deux termes $e^{-\frac{T^2 \alpha^2}{2}}$ et $e^{-\frac{T^2 \alpha^2}{8}}$ dans (28) peuvent être négligés, conduisant au résultat

$$E_{p,n} \approx (6n + 3) \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\pi B}{\alpha\sqrt{2}} \right) \right]. \quad (30)$$

D'autre part, pour $B \geq \alpha\sqrt{2}$, on a $\operatorname{erf} \left(\frac{B\pi}{\alpha\sqrt{2}} \right) \in [\operatorname{erf}(\pi), 1]$. Puisque $\operatorname{erf}(\pi) = 99.9991\%$, on obtient l'approximation finale

$$E_{p,n} = \frac{3\alpha}{\sqrt{2\pi}} (2n + 1), \quad B \geq \alpha\sqrt{2}. \quad (31)$$

Références

- [1] Cospas-Sarsat Council, "Cospas-Sarsat 406 MHz MEOSAR Implementation Plan," Tech. Rep. R.012, Issue 1, COSPAS-SARSAT, Oct. 2011.
- [2] A. Mehta, "The Int. Cospas-Sarsat Programme : Taking the "search" out of search and rescue," in *Proc. of the Marine Safety & Security Council*, 2011, vol. 68, pp. 12–15.
- [3] P. C. Gomez, C. F. Prades, J. A. F. Rubio, G. S. Granados, and I. Stojkovic, "Design of Local User Terminals for Search and Rescue Systems with MEO Satellites," in *Proc. of the 2nd ESA Workshop on Satellite Navigation User Equipment Technologies (NAVITEC)*, Noordwijk, The Netherlands, Dec. 2004, ESA/ESTEC.
- [4] U. Mengali and A. N. D'Andrea, *Synchronization Techniques for Digital Receivers*, Applications of Communications Theory. Plenum Press, 1997.
- [5] Cospas-Sarsat Council, "Specification for Cospas-Sarsat 406 MHz distress beacons," Tech. Rep. T.001, Issue 3, COSPAS-SARSAT, Oct. 2011.
- [6] S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing : Estimation theory*, Prentice Hall, 1993.
- [7] A. N. D'Andrea, U. Mengali, and R. Reggiannini, "The modified Cramér-Rao bound and its application to synchronization problems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 42, no. 234, pp. 1391–1399, Feb. 1994.
- [8] J. G. Proakis and M. Salehi, *Digital Communications*, Mc-Graw Hill, Boston, 5th edition, 2008.
- [9] Y. T. Chan, J. W. Plews, and K. C. Ho, "Symbol rate estimation by the wavelet transform," in *Int. Conf. Circuits and Systems*, June 1997, vol. 1, pp. 177–180.
- [10] Z.-M. Deng and Y. Liu, "Modified Cramér-Rao lower bound for symbol width estimation from a phase-shift-keying signal," *J. on Commun.*, vol. 30, no. 2, pp. 117–121, Sept. 2009.
- [11] S. Houcke, A. Chevreuil, and P. Loubaton, "Blind equalization - Case of an Unknown Symbol Period," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 51, no. 3, pp. 781–793, March 2003.
- [12] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, A. Jeffrey, and D. Zwillinger, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, 2007.