

Turbo-égalisation MMSE linéaire de canaux non linéaires

Bouchra BENAMMAR¹, Nathalie THOMAS¹, Charly POUILLIAT¹, Marie-Laure BOUCHERET¹, Mathieu DERVIN²

¹Université de Toulouse INPT-ENSEEIH/IRIT
2 rue Charles Camichel, BP 7122 31071 Toulouse cedex 7, France

²Thales Alenia Space
26 av Jean Francois Champollion, BP 33787, 31037 Toulouse, France

bouchra.benammar@enseeiht.fr, nathalie.thomas@enseeiht.fr
charly.poulliat@enseeiht.fr, marie-laure.boucheret@enseeiht.fr
mathieu.dervin@thalesaleniaspace.com

Résumé – Cet article traite de la turbo-égalisation linéaire de type Minimum Mean Squared Error (MMSE) dans le cadre d'un canal à interférences non linéaires modélisé par la décomposition en séries de Volterra. Il a été souvent argumenté dans la littérature que l'utilisation d'un égaliseur linéaire MMSE ne permettrait pas d'annuler l'Interférence Entre Symboles (IES) non linéaire. Toutefois, ce constat n'est valable que dans le cas d'un égaliseur non itératif. En effet, nous montrons que par une dérivation adéquate du critère MMSE nous sommes à même d'annuler en théorie toute l'interférence en utilisant un schéma itératif. L'implémentation exacte de l'égaliseur itératif ainsi que des implémentations à faible complexité calculatoire sont évaluées.

Abstract – This article deals with Minimum Mean Square Error (MMSE) turbo equalization of nonlinear interference using a Volterra series decomposition of the underlying nonlinear channel. Although it has been often argued that linear MMSE based equalization is unsuited for cancelling nonlinear interference, we show that this common belief is only valid for a non iterative equalizer. By a proper derivation of the linear based MMSE turbo-equalizer we show that it is able to cope with both the linear and nonlinear interference. Performance of the exact MMSE solution and some low complexity approximations is investigated.

1 Introduction

La nécessité d'offrir des débits de plus en plus élevés sur les liaisons satellites, nous pousse, lorsque la liaison le permet, à envisager l'utilisation de modulations à haute efficacité spectrale à l'instar des modulations de phase et d'amplitude Amplitude and Phase Shift Keying (16APSK et 32APSK) présentées dans le standard DVBS2 [1]. Toutefois, les amplificateurs à bord des satellites opérant proche de la saturation, les signaux amplifiés subissent des distorsions non linéaires qui sont d'autant plus importantes lorsque ces modulations ont plusieurs niveaux d'amplitude. Afin de modéliser les distorsions non linéaires, notre choix s'est porté sur le modèle de Volterra qui consiste en une représentation sous forme d'un canal à mémoire avec des termes d'interférences linéaires et non linéaires. Les traitements de ces IES peuvent être implantés soit au niveau de l'émetteur par des techniques de pré-compensation ou de pré-distorsion, soit au niveau du récepteur au travers de techniques d'égalisation qui feront l'objet de notre étude. Nous nous sommes plus spécialement intéressés aux techniques d'égalisation itératives, dites de turbo-égalisation, proposées par [2] qui permettent d'améliorer notablement les performances en terme de taux d'erreurs au prix d'une complexité plus élevée. Si la connaissance parfaite du canal permet de déployer des égaliseurs optimaux en terme de taux d'erreurs tels que le Maxi-

mum A Posteriori (MAP) ou le Maximum de Vraisemblance (MV), leur forte complexité nous mène à envisager des solutions sous-optimales. A cet effet, nous nous sommes intéressés aux méthodes d'égalisation de type Minimum Mean Square Error (MMSE) qui permettent d'atteindre un compromis très satisfaisant entre complexité et performances. Des travaux précédemment menés par [3] et [4] ont proposé des égaliseurs itératifs MMSE dits "non linéaires" en se basant sur l'idée que les distorsions non linéaires ne pouvaient être supprimées en utilisant un égaliseur MMSE **linéaire**. Nous démontrons dans cet article que les estimateurs "non linéaires" proposés sont en fait des cas particuliers de l'égaliseur MMSE linéaire adapté au traitement des interférences non linéaires. Nous étudierons aussi certaines approximations afin de réduire la complexité calculatoire de la solution exacte. Le reste de l'article est organisé comme suit : Nous commençons par une présentation du modèle de Volterra, ensuite nous dériverons la solution MMSE ainsi que certaines approximations à faible complexité calculatoire, enfin les résultats des différentes approches sont comparés au travers de simulations.

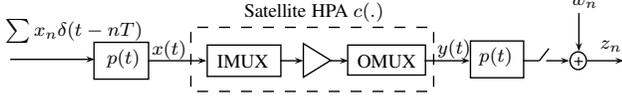


FIGURE 1 – Schéma d'une communication par satellite

2 Modèle de Volterra

Le répéteur du satellite est représenté par un filtre IMUX (Input MULTipleXer), une réponse non linéaire sans mémoire, suivis d'un filtre OMUX (Output MULTipleXer). L'IMUX permet de pallier les interférences inter-canaux à l'entrée du satellite tandis que l'OMUX permet de réduire l'expansion spectrale introduite par la fonction non linéaire. De ce fait, le répéteur du satellite peut être modélisé comme étant une fonction non linéaire d'amplification passe-bande dépendant uniquement de l'amplitude du signal qui y est traité.

Considérons le modèle de communication par satellite présenté dans Fig.1. Soit $x(t)$ le signal en bande de base transmis :

$$x(t) = \sum_n x_n p(t - nT), \quad (1)$$

où x_n sont des symboles indépendants identiquement distribués d'une modulation M-aire issus de bits codés et entrelacés, $p(t)$ représente le filtre de mise en forme normalisé et T est la durée symbole. Le signal amplifié $y(t)$ est affecté dans la liaison descendante d'un bruit additif supposé blanc et Gaussien. Le signal reçu après filtrage adapté et échantillonnage aux instants $t = t_0 + nT$ se décompose en une série de Volterra comme suit :

$$z_n \triangleq z(t_0 + nT) = \sum_{m=0}^{v_m} \sum_{n_1} \dots \sum_{n_{2m+1}} x_{n-n_1} \dots x_{n-n_{m+1}} x_{n-n_{m+2}}^* \dots x_{n-n_{2m+1}}^* h_{n_1, \dots, n_{2m+1}} + w_n \quad (2)$$

où v_m détermine l'ordre de la décomposition de Volterra, $h_{n_1, \dots, n_{2m+1}}$ sont dits noyaux de Volterra, et w_n est le bruit additif filtré et échantillonné à $t_0 + nT$ de variance σ_w^2 . Dans la suite de cet article nous tronquons le modèle de Volterra au troisième ordre puisque les ordres supérieurs ont généralement une contribution négligeable :

$$z_n = \sum_{i=-L_{02}}^{L_{01}} h_i x_{n-i} + \sum_i \sum_j \sum_k h_{ijk} x_{n-i} x_{n-j} x_{n-k}^* + w_n \quad (3)$$

où L_{02} et L_{01} déterminent la longueur de la partie linéaire de l'IES.

3 Turbo égalisation MMSE linéaire d'un canal de Volterra

Considérons les notations vectorielles suivantes :

$$\mathbf{z}_n \triangleq [z_{n-N_1}, \dots, z_{n+N_2}]^T, \quad \mathbf{w}_n \triangleq [w_{n-N_1}, \dots, w_{n+N_2}]^T \text{ et}$$

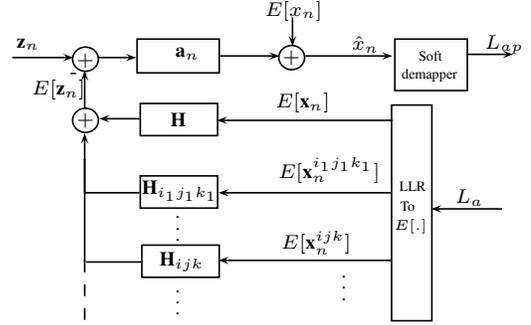


FIGURE 2 – Egaliseur MMSE du canal de Volterra

$$\mathbf{x}_n \triangleq [x_{n-N_1-L_{01}}, \dots, x_{n+N_2+L_{02}}]^T.$$

Le vecteur des symboles reçus s'écrit comme suit :

$$\mathbf{z}_n = \mathbf{H}\mathbf{x}_n + \sum_i \sum_j \sum_k \mathbf{H}_{ijk} \mathbf{x}_n^{ijk} + \mathbf{w}_n$$

où $\mathbf{H} \triangleq \text{Toeplitz}([h_{L_{01}} \dots h_0 \dots h_{-L_{02}}, \mathbf{0}_{1 \times N_1 + N_2}])$ est la matrice de convolution ayant $[h_{L_{01}} \dots h_0 \dots h_{-L_{02}}, \mathbf{0}_{1 \times N_1 + N_2}]$ comme première ligne ; $\mathbf{0}_{1 \times N_1 + N_2}$ est le vecteur nul de dimensions $(1, N_1 + N_2)$; $\mathbf{H}_{ijk} = h_{i,j,k} \mathbb{I}_N$ sont les matrices d'IES non linéaires telles que $N = N_1 + N_2 + 1$ et \mathbb{I}_N est la matrice identité de taille $N \times N$; \mathbf{x}_n^{ijk} sont les termes d'IES non linéaire du troisième ordre :

$$\mathbf{x}_n^{ijk} \triangleq \begin{bmatrix} x_{n-N_1-i} x_{n-N_1-j} x_{n-N_1-k}^* \\ \vdots \\ x_{n+N_2-i} x_{n+N_2-j} x_{n+N_2-k}^* \end{bmatrix}$$

3.1 Implémentation MMSE exacte

L'estimateur MMSE linéaire consiste en une transformation affine des symboles reçus [5] [6] :

$$\hat{x}_n = \mathbf{a}_n^H \mathbf{z}_n + b_n \quad (4)$$

qui minimise l'erreur quadratique moyenne entre les symboles estimés et ceux transmis $E[|\hat{x}_n - x_n|^2]$. La solution dépend de l'instant n et s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{a}_n = \text{Cov}(\mathbf{z}_n, \mathbf{z}_n)^{-1} \text{Cov}(\mathbf{z}_n, x_n) \\ b_n = E[x_n] - \mathbf{a}_n^H E[\mathbf{z}_n] \end{cases} \quad (5)$$

où $\text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \triangleq E[\mathbf{xy}^H] - E[\mathbf{x}] E[\mathbf{y}^H]$.

Les symboles estimés s'écrivent :

$$\hat{x}_n = \mathbf{a}_n^H (\mathbf{z}_n - E[\mathbf{z}_n]) + E[x_n] \quad (6)$$

où

$$E[\mathbf{z}_n] = \mathbf{H} E[\mathbf{x}_n] + \sum_i \sum_j \sum_k \mathbf{H}_{ijk} E[\mathbf{x}_n^{ijk}] \quad (7)$$

Les quantités statistiques d'espérance et de covariance sont calculées à partir des Log de Rapport de Vraisemblance (LRV) a priori issus du décodeur à l'itération précédente. Nous reconnaissons dans la formule (6) et la figure Fig.2 la structure d'un annulateur d'interférence où les termes d'IES linéaires et

non linéaires sont annulés. Il faut cependant noter qu'afin de ne pas annuler le symbole d'intérêt x_n , le LRV du symbole n doit être égal à zéro lors du calcul $E[\mathbf{x}_n]$ i.e. $E[x_n] = 0$ et $var(x_n) \triangleq v_n = 1$. Toutefois, contrairement à la solution proposée par [4], les espérances des symboles non linéaires sont calculées à partir des vraies valeurs des LRV puisque l'IES non linéaire doit être supprimée en intégralité même si celle-ci fait intervenir le symbole x_n . La solution MMSE est donc calculée en se basant sur les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
Cov(\mathbf{z}_n, \mathbf{z}_n) &= \sigma_w^2 \mathbb{I}_N + \mathbf{H} Cov(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n) \mathbf{H}^H + (1 - v_n) \mathbf{h}_n \mathbf{h}_n^H \\
&+ \sum_{i,j,k} \mathbf{H}_{ijk} Cov(\mathbf{x}_n^{ijk}, \mathbf{x}_n) \mathbf{H}^H \\
&+ \sum_{i,j,k} \mathbf{H} Cov(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n^{ijk}) \mathbf{H}_{ijk}^H \\
&+ \sum_{i,j,k} \sum_{i',j',k'} \mathbf{H}_{ijk} Cov(\mathbf{x}_n^{ijk}, \mathbf{x}_n^{i'j'k'}) \mathbf{H}_{i'j'k'}^H \\
Cov(\mathbf{z}_n, x_n) &= \mathbf{H} Cov(\mathbf{x}_n, x_n) + (1 - v_n) \mathbf{h}_n \\
&+ \sum_{i,j,k} \mathbf{H}_{ijk} Cov(\mathbf{x}_n^{ijk}, x_n) \\
E[\mathbf{z}_n] &= \mathbf{H} E[\mathbf{x}_n] - \mathbf{h}_n E[x_n] + \sum_{i,j,k} \mathbf{H}_{ijk} E[\mathbf{x}_n^{ijk}] \quad (8)
\end{aligned}$$

où $\mathbf{h}_n = \mathbf{H} \times [\mathbf{0}_{1 \times N_1 + L_{01}}, 1, \mathbf{0}_{1 \times N_2 + L_{02}}]^T$.

Le calcul des termes exacts dans les formules (8) à chaque instant n , en plus des inversions matricielles, induisent une forte complexité calculatoire. Toutefois, on peut remarquer que les termes statistiques peuvent être calculés de manière récursive en exploitant les sous-matrices communes entre instants successifs comme expliqué dans [7].

3.2 Approximations MMSE invariantes dans le temps

Une seconde alternative à la complexité calculatoire de l'implémentation exacte du MMSE est de considérer une solution MMSE invariante dans le temps.

3.2.1 Implémentation MMSE Sans A priori (SA)

Dans cette première approximation, les coefficients MMSE sont calculés en supposant que l'égaliseur ne reçoit aucun a priori. Dans ce cas, $E[x_n] = 0$ et $v_n = 1 \forall n$. La simplification de la solution MMSE dépend de l'ordre, du type de la modulation utilisée ainsi que des mémoires linéaires et non linéaires du canal. Lorsqu'il s'agit d'une modulation à module constant, les indices (i, j, k) des noyaux de troisième ordre de Volterra vérifient $i \neq k$ and $j \neq k$ car sinon ils contribueraient à la partie linéaire de l'IES. Ainsi, nous pouvons démontrer que pour

une modulation dont l'ordre est supérieur à 2 :

$$\begin{aligned}
\forall n \quad \forall(i, j, k) \quad E[\mathbf{x}_n^{ijk}] &= \mathbf{0}_{N \times 1} \\
\forall n \quad \forall(i, j, k) \quad Cov(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n^{ijk}) &= \mathbb{0}_{N + L_{01} + L_{02} \times N} \\
\forall n \quad \forall(i, j, k) \quad Cov(\mathbf{x}_n^{ijk}, \mathbf{x}_n) &= \mathbb{0}_{N \times N + L_{01} + L_{02}} \\
\forall n \quad \forall(i, j, k) \neq (i', j', k') \quad Cov(\mathbf{x}_n^{ijk}, \mathbf{x}_n^{i'j'k'}) &= \mathbb{0}_N \\
\forall n \quad \forall(i, j, k) \quad Cov(\mathbf{x}_n^{ijk}, \mathbf{x}_n^{ijk}) &= \mathbb{I}_N \quad (9)
\end{aligned}$$

Ceci donne lieu à une solution MMSE-SA sous la forme :

$$\mathbf{a}_{SA} = \left(\sigma_w^2 \mathbb{I}_N + \mathbf{H} \mathbf{H}^H + \sum_{(i,j,k) \in \mathcal{T}} |h_{ijk}|^2 \mathbb{I}_N \right)^{-1} \mathbf{h}_n \quad (10)$$

Nous retrouvons ainsi la solution de filtrage proposée par [3], qui est donc une sous-classe de l'égaliseur MMSE linéaire. L'interférence non linéaire est dans ce cas assimilable à un bruit additif de variance $\sum_{(i,j,k)} |h_{ijk}|^2$.

3.2.2 Implémentation approchée à Faible Complexité (FC)

Dans cette seconde implémentation, nous étudions une autre solution invariante dans le temps introduite par [7]. La solution MMSE doit à présent minimiser $\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} E[|\hat{x}_n - x_n|^2]$ et s'écrit alors :

$$\mathbf{a}_{FC} = \left(\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} Cov(\mathbf{z}_n, \mathbf{z}_n) \right)^{-1} \left(\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} Cov(\mathbf{z}_n, x_n) \right) \quad (11)$$

La matrice $\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} Cov(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n)$ devient une matrice diagonale si les effets de bords sont négligés, et elle s'écrit alors sous la forme $\frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} var(x_n) \mathbb{I}_N$.

Les covariances des termes d'IES non linéaires sont des matrices de Toeplitz mais n'ont malheureusement pas de structure particulière permettant plus de simplifications.

4 Le démappeur souple

Afin de transformer les symboles estimés en information à postériori utilisable par le décodeur, un démappeur est utilisé. L'erreur d'estimation $e_n = \hat{x}_n - x_n$ est supposée gaussienne de moyenne nulle et de variance $var(e_n) = 1 + Cov(\hat{x}_n, \hat{x}_n) - 2R_e(Cov(\hat{x}_n, x_n))$.

Pour l'estimateur MMSE exact $var(e_n) = 1 - Cov(x_n, \mathbf{z}_n) \mathbf{a}_n$. Quant à l'implémentation approchée MMSE-SA, nous considérerons deux cas de figure :

- Implémentation (a) : l'expression exacte de la variance.
- Implémentation (b) : une expression approchée de la variance en négligeant les covariances des termes non linéaires. Cette approximation a été proposée par [3] et devrait avoir des performances réduites à fort Rapport Signal à Bruit (RSB) en comparaison avec l'implémentation (a).

Noyaux du 1er ordre	Noyaux du 3ème ordre
$h_0 = 0.8529 + 0.4502i$	$h_{002} = 0.1091 - 0.0615i$
$h_1 = 0.0881 - 0.0014i$	$h_{330} = 0.0503 - 0.0503i$
$h_2 = -0.0336 - 0.0196i$	$h_{001} = 0.0979 - 0.0979i$
$h_3 = 0.0503 + 0.0433i$	$h_{003} = -0.1119 - 0.0252i$
	$h_{110} = -0.0280 - 0.0475i$

TABLE 1 – Noyaux de Volterra du canal de test

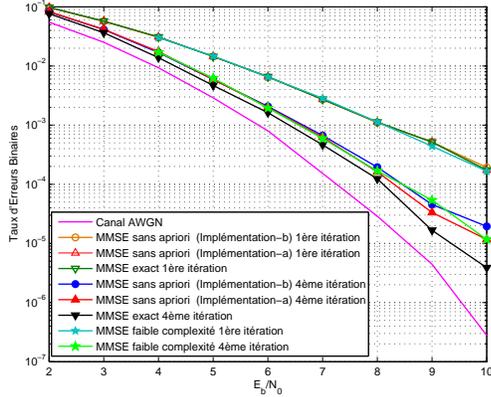


FIGURE 3 – Performances de l'égaliseur MMSE itératif

Les LRV en sortie de l'égaliseur sont calculés de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
L_{ap}(c_{n,i}|\hat{x}_n) &\triangleq \ln \frac{P(c_{n,i} = 0|\hat{x}_n)}{P(c_{n,i} = 1|\hat{x}_n)} \\
&= \ln \frac{\sum_{s_j:s_{ji}=0} \left(\exp \left(\frac{-|\hat{x}_n - s_j|^2}{\text{var}(e_n)} \right) \right) \prod_k P(c_{n,k} = s_{j,k})}{\sum_{s_j:s_{ji}=1} \left(\exp \left(\frac{-|\hat{x}_n - s_j|^2}{\text{var}(e_n)} \right) \right) \prod_k P(c_{n,k} = s_{j,k})}
\end{aligned} \quad (12)$$

où $c_{n,k}$ est le k^{eme} bit codé du symbole x_n et $s_{j,k}$ est le k^{eme} bit du symbole s_j de la constellation. Les LRV a posteriori sont rendus extrinsèques (L_e) après soustraction des LRV a priori L_a suivant $L_e(c_{n,i}) = L_{ap}(c_{n,i}|\hat{x}_n) - L_a(c_{n,i})$.

5 Simulations et résultats

Afin de comparer les performances de l'égaliseur linéaire MMSE avec certaines solutions précédemment proposées, les noyaux du canal de test (Table.1) ont été extraits de [3]. Les bits d'informations sont codés par un code convolutif de polynômes générateurs (5,7) en octal en prenant en compte la terminaison du treillis. Les bits codés sont ensuite entrelacés aléatoirement, puis modulés en symboles 8PSK. Au niveau du récepteur, les filtres MMSE ont 9 coefficients $N_1 = 5$ et $N_2 = 3$. La sortie de l'égaliseur est désentrelacée puis transmise à un décodeur de type MAP. La sortie de ce dernier est entrelacée puis transmise à l'égaliseur en tant qu'a priori. Les courbes de la figure Fig.3 présentent les résultats obtenus pour les Taux d'Erreurs Binaires (TEB) de l'égaliseur MMSE exact, MMSE-faible complexité et MMSE-sans a priori (implémentations (a)

et (b)). Une amélioration du TEB est observée au fur et à mesure des itérations. Un gain de 2dB est atteint pour un TEB cible de 10^{-4} entre la première et la quatrième itération. Il est à noter que les égaliseurs sont alimentés par des a priori nuls à la première itération ce qui explique que leurs performances coïncident toutes pour la première itération. En outre, les performances de l'implémentation(a) du MMSE-SA sont meilleures que celles de l'implémentation(b) à fort RSB comme prévu car les variances des termes non linéaires ne sont plus négligeables devant la variance du bruit.

6 Conclusion

Ce travail a fourni une dérivation exacte de l'égaliseur MMSE pour un canal non linéaire de type Volterra. La structure itérative de l'égaliseur obtenu est telle qu'elle permet asymptotiquement (i.e. avec des a priori parfaits) de supprimer toute l'interférence aussi bien linéaire que non linéaire. L'étude théorique est confirmée par des résultats de taux d'erreurs binaires, montrant les gains obtenus avec l'égaliseur présenté sous ses formes exacte et approchées.

Références

- [1] ETSI EN 302 307 V1.2.1 (2009-08), "Digital video broadcasting (DVB) ; second generation framing structure, channel coding and modulation systems for broadcasting, interactive services, news gathering and other broadband satellite applications (DVB-S2)," *European Standard (Telecommunications series)*, 08 2009.
- [2] C. Douillard, M. Jezequel, and C. Berrou, "Iterative correction of intersymbol interference : Turbo equalization," *European Trans. Telecommun.*, vol. 6, no. 5, pp. 507–511, Sept.–Oct 1995.
- [3] D. Ampeliotis, A.A. Rontogiannis, K. Berberidis, M. Papaleo, and G.E. Corazza, "Turbo equalization of non-linear satellite channels using soft interference cancellation," in *Advanced Satellite Mobile Systems, 2008. ASMS 2008. 4th*, aug. 2008, pp. 289–292.
- [4] D.N. Liu and M.P. Fitz, "Iterative equalization in non-linear satellite channels," in *Turbo Codes and Iterative Information Processing (ISTC), 2012 7th International Symposium on*, aug. 2012, pp. 220–224.
- [5] M. Tuchler, A.C. Singer, and R. Koetter, "Minimum mean squared error equalization using a priori information," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 50, no. 3, pp. 673–683, mar 2002.
- [6] H. Vincent Poor, *An introduction to signal detection and estimation (2nd ed.)*, Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1994.
- [7] M. Tuchler and A.C. Singer, "Turbo equalization : An overview," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 57, no. 2, pp. 920–952, feb. 2011.
- [8] S. Benedetto, E. Biglieri, and R. Daffara, "Modeling and performance evaluation of nonlinear satellite links-a volterra series approach," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-15, no. 4, pp. 494–507, july 1979.