

Sur la mesure spectrale de l'oscillateur harmonique excité par un bruit α -stable

Steeve ZOZOR¹, Christophe VIGNAT²

¹GIPSA-Lab, 961 rue de la Houille Blanche, 38402 Saint Martin d'Hères Cedex, France

²L.T.H.I., E.P.F.L., Station 14, Lausanne, CH-1015, Suisse et Supélec, L.S.S., Orsay, France
steeve.zozor@gipsa-lab.grenoble-inp.fr, christophe.vignat@epfl.ch

Résumé – Dans cet article, nous étudions l'oscillateur harmonique amorti excité par un bruit α -stable, dans le plan de phase position-vitesse. Ces deux composantes suivent une loi α -stable bivariable : nous en explicitons la mesure spectrale et étudions ses propriétés. Nous montrons en particulier que les propriétés d'indépendance et d'ellipticité du cas Gaussien sont perdues dans le cas α -stable non-Gaussien et proposons des indicateurs possibles d'écart à l'ellipticité.

Abstract – In this paper, we study the harmonic oscillator excited by an α -stable noise in the position-velocity phase space. These two components are bivariate α -stable: in this paper we explicit the associated spectral measure and we study its properties. In particular, we show that, contrarily to the Gaussian case, the position and the velocity are not independent and do not follow an elliptical distribution anymore. We then propose possible measures of deviation from ellipticity.

1 Introduction.

Dans une contribution récente [1], Sokolov et al. étudient le comportement de l'oscillateur harmonique excité par un bruit de type α -stable. Ils montrent que, sauf dans le cas limite Gaussien, la loi mutuelle de la position et de la vitesse n'est ni séparable ni elliptiquement distribuée, mais reste toutefois α -stable bivariable [1, 2]. De plus, ils fournissent une mesure de la dépendance entre ces coordonnées. Dans cet article, nous montrons plus directement que la loi mutuelle de la position et de la vitesse est α -stable et surtout nous explicitons sa mesure spectrale. L'expression de cette dernière nous permet de prouver analytiquement la non-indépendance et la non-ellipticité de ces composantes. La connaissance de la mesure spectrale nous permet également de mesurer un écart à l'ellipticité, en la comparant à la forme d'un vecteur α -stable elliptiquement distribué. Dans des problèmes de détection ou d'estimation, les méthodes utilisées dans le cas Gaussien s'étendent plus ou moins facilement au cadre non-Gaussien mais toujours elliptiquement distribué [3]. Cependant, la perte de la propriété d'ellipticité peut remettre en cause la pertinence de ces approches, ce qui motive notre étude.

2 Brefs rappels sur les vecteurs aléatoires α -stables.

2.1 Fonction caractéristique.

Un vecteur aléatoire $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^d$ est α -stable si [4, Def. 2.1.1] pour tous réels positifs a et b , il existe un réel positif c et un vecteur $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^d$ tels que $a\mathbf{X}_{(1)} + b\mathbf{X}_{(2)} \stackrel{d}{=} c\mathbf{X} + \mathbf{d}$ où $\stackrel{d}{=}$ désigne l'égalité en distribution et $\mathbf{X}_{(i)}$ sont des copies indépendantes

de \mathbf{X} . On montre alors qu'il existe un réel $\alpha \in [0 ; 2]$ appelé indice de stabilité tel que $a^\alpha + b^\alpha = c^\alpha$. En dehors des cas connus Gaussien ($\alpha = 2$), Cauchy ($\alpha = 1$) ou Lévy ($\alpha = \frac{1}{2}$), il n'existe pas de forme explicite de la densité α -stable à l'aide des fonctions usuelles. On notera toutefois l'existence de formes explicites en termes de fonctions spéciales dans le cas où α est rationnel [5]. Cependant, pour tout indice α la fonction caractéristique $\Phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}) = E[e^{i\mathbf{u}^t \mathbf{X}}]$ peut être explicitée sous plusieurs formes équivalentes.

La représentation classique est [4, th. 2.3.1]

$$\Phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}) = \exp\left(-\int_{\mathbb{S}_d} |\mathbf{u}^t \mathbf{s}|^\alpha (1 + i\eta_\alpha(\mathbf{u}^t \mathbf{s})) \Lambda(d\mathbf{s}) + i\mathbf{u}^t \boldsymbol{\mu}\right), \quad (1)$$

où \mathbb{S}_d est la sphère unité de \mathbb{R}^d et Λ une mesure finie sur \mathbb{S}_d appelée la *mesure spectrale* du vecteur \mathbf{X} . Le vecteur $\boldsymbol{\mu}$ est un paramètre de position et la fonction d'asymétrie $\eta_\alpha(u) = -\text{sign}(u) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)$ si $\alpha \neq 1$ et $\eta_\alpha(u) = \frac{2}{\pi} \text{sign}(u) \log|u|$ si $\alpha = 1$. Si la mesure spectrale admet une densité par rapport à la mesure de Haar $\mathcal{A}(d\mathbf{s})$ sur la sphère, nous la noterons λ si bien que $\Lambda(d\mathbf{s}) = \lambda(\mathbf{s}) \mathcal{A}(d\mathbf{s})$. Pour $d = 1$, $\mathbb{S}_1 = \{-1, 1\}$ et l'expression (1) devient

$$\Phi_{\mathbf{X}}(u) = \exp(-\sigma^\alpha |u|^\alpha (1 + i\beta \eta_\alpha(u)) + iu\boldsymbol{\mu}), \quad (2)$$

où $\sigma \geq 0$ est le paramètre d'échelle et $\beta \in [-1 ; 1]$ le facteur d'asymétrie.

Une représentation équivalente à (1) est la suivante [4, §3.2]

$$\Phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}) = \exp\left(-\int_{\mathcal{D}} |\mathbf{u}^t \mathbf{G}(\mathbf{y})|^\alpha (1 + i\beta(\mathbf{y})\eta_\alpha(\mathbf{u}^t \mathbf{G}(\mathbf{y}))) \times M(d\mathbf{y}) + i\mathbf{u}^t \boldsymbol{\mu}_0\right), \quad (3)$$

où \mathcal{D} est un espace M -mesurable, $\beta : \mathcal{D} \mapsto [-1 ; 1]$ une fonction M -mesurable et $\mathbf{G} : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}^d$ une fonction M -mesurable telle que $\int_{\mathcal{D}} \|\mathbf{G}(\mathbf{y})\|^\alpha M(d\mathbf{y}) < +\infty$ et de plus $\int_{\mathcal{D}} \mathbf{G}(\mathbf{y}) \log \|\mathbf{G}(\mathbf{y})\| M(d\mathbf{y}) < +\infty$ si $\alpha = 1$.

2.2 Quelques propriétés.

On rappelle que lorsque $\alpha < 2$, les vecteurs α -stables n'admettent pas de moments d'ordre supérieur ou égal à α . En particulier, ils n'admettent pas de matrice de covariance. Lorsque $\alpha = 2$, l'asymétrie disparaît de (1)-(3) et l'on retrouve le cas Gaussien de moyenne $\boldsymbol{\mu}$ et de matrice de covariance $\mathbf{R} = 2 \int_{\mathbb{S}_d} \mathbf{s} \mathbf{s}^t \Lambda(ds) = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{G}(\mathbf{y}) \mathbf{G}(\mathbf{y})^t M(d\mathbf{y})$.

Un vecteur α -stable est à composantes indépendantes si et seulement si sa mesure spectrale est discrète et concentrée sur les intersections des axes avec la sphère \mathbb{S}_d [4, Ex. 2.3.5].

Lorsque le paramètre de position $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ et que la mesure Λ est symétrique, la distribution est dite centro-symétrique et la fonction d'asymétrie η_α disparaît dans (1) [4, Th. 2.4.3].

Enfin, le vecteur \mathbf{X} est dit elliptique si les niveaux d'isoprobabilité de sa densité de probabilité – ou, de manière équivalente, de sa fonction caractéristique – sont des ellipsoïdes. Une condition nécessaire et suffisante d'ellipticité est que la fonction caractéristique soit de la forme

$$\Phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}) = \exp\left(-(\mathbf{u}^t \mathbf{R} \mathbf{u})^{\frac{\alpha}{2}}\right), \quad (4)$$

où \mathbf{R} est une matrice symétrique définie positive. Si \mathbf{R} est proportionnelle à la matrice identité, le vecteur est dit sphériquement invariant, ou isotrope, ou encore orthogonal. L'étude de l'oscillateur harmonique nous invite à introduire le résultat suivant.

Théorème 1. *Si $\alpha < 2$, la densité de la mesure spectrale d'un vecteur \mathbf{X} elliptiquement distribué s'écrit*

$$\lambda(\mathbf{s}) \propto (\mathbf{s}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s})^{-\frac{\alpha+d}{2}}. \quad (5)$$

La preuve utilise la diagonalisation $\mathbf{R} = \mathbf{P} \boldsymbol{\Delta} \mathbf{P}^t$ et le fait que $\mathbf{Y} = \boldsymbol{\Delta}^{\frac{1}{2}} \mathbf{P}^t \mathbf{X}$ est sphériquement invariant et donc de mesure spectrale uniforme, $\Lambda(ds) \propto \mathcal{A}(ds)$ [4, th. 2.5.5]. Écrivant $\Phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}) = \Phi_{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{\Delta}^{\frac{1}{2}} \mathbf{P}^t \mathbf{u})$ à l'aide de la représentation (1), on calcule la représentation équivalente (3) en paramétrant la sphère \mathbb{S}_d via la boule $\mathbb{B}_{d-1} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{d-1} : \mathbf{s} = [\mathbf{y} \pm \sqrt{1 - \|\mathbf{y}\|^2}]^t \in \mathbb{S}_d\}$. Le changement de variable $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$ de $\mathbb{B}_{d-1} \rightarrow \mathbb{B}_{d-1}$ tel que $[\mathbf{y} \pm \sqrt{1 - \|\mathbf{y}\|^2}]^t = \boldsymbol{\Delta}^{\frac{1}{2}} \mathbf{s} / \|\boldsymbol{\Delta}^{\frac{1}{2}} \mathbf{s}\|$ nous ramène alors à la représentation classique, ce qui, après avoir constaté que \mathbf{P} est une matrice de rotation, aboutit au résultat (5).

3 Oscillateur harmonique excité par un bruit α -stable.

Considérons à présent l'oscillateur harmonique amorti d'équation normalisée

$$\ddot{x}(t) = -2\omega_0 \zeta \dot{x}(t) - \omega_0^2 x(t) + \xi(t), \quad (6)$$

où ω_0 est la pulsation propre et $\zeta > 0$ le coefficient d'amortissement (nous excluons le cas instable de l'oscillateur pur $\zeta = 0$). L'excitation $\xi(t)$ est supposée aléatoire, à "échantillons"

indépendants et identiquement distribués de loi α -stable (2). Sans perte de généralité, nous supposons que $\mu = 0$ et $\sigma = 1$.

Dans le cas Gaussien $\alpha = 2$, on montre aisément que la distribution du couple $(x(t), \dot{x}(t))$ est Gaussienne, et donc elliptiquement distribuée (et donc aussi centro-symétrique). De plus, position et vitesse sont indépendantes [1, 2]. Dans le cas plus général où $0 < \alpha < 2$, il est montré à travers de quelques exemples dans [1] que l'ellipticité et l'indépendance sont perdues. Nous notons d'ailleurs que d'après le théorème de Maxwell-Hershell [6, Prop. 4.1.1], seul un vecteur Gaussien peut être à la fois elliptiquement distribué et à composantes indépendantes.

3.1 Solution de l'équation.

En utilisant la transformée de Laplace, il est aisé d'obtenir la relation de filtrage

$$\mathbf{x}(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{G}(t-t') \xi(t') dt', \quad (7)$$

où $\mathbf{x}(t) = [x(t) \ \dot{x}(t)]^t$ est le couple position-vitesse et où le vecteur $\mathbf{G}(t) = [G_x(t) \ G_{\dot{x}}(t)]^t$ des fonctions de Green $G_x(t)$ de la position et $G_{\dot{x}}(t) = \frac{d}{dt} G_x(t)$ de la vitesse est égal à

$$\mathbf{G}(t) = \frac{e^{-\zeta \omega_0 t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)}{\omega_c} \begin{bmatrix} \sin(\omega_c t) \\ -\zeta \omega_0 \sin(\omega_c t) + \omega_c \cos(\omega_c t) \end{bmatrix},$$

avec $\omega_c = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$ la pulsation complexe de l'oscillateur et $\mathbb{1}_A$ la fonction indicatrice de l'ensemble A . Dans le cas sous-amorti $\zeta < 1$, le comportement est sinusoïdal amorti, tandis qu'il est exponentiel décroissant dans le cas sur-amorti $\zeta > 1$ (ω_c est alors imaginaire pure). Le cas critique $\zeta = 1$ est obtenu par passage à la limite.

La fonction caractéristique du couple $(x(t), \dot{x}(t))$ vaut alors

$$\Phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}) = \exp\left(-\int_{\mathbb{R}_+} |\mathbf{u}^t \mathbf{G}(t)|^\alpha (1 + i\beta \eta_\alpha(\mathbf{u}^t \mathbf{G}(t))) dt\right). \quad (8)$$

Ce résultat n'est pas nouveau [2] et peut être obtenu par une discrétisation convenable du filtrage (7), faisant apparaître les incréments du bruit α -stable de facteur d'échelle $(\delta t)^{\frac{1}{\alpha}}$ (voir aussi [4, chap. 3]). Cette représentation est précisément (3), et donc $\forall t$, le couple $(x(t), \dot{x}(t))$ est α -stable bivarié. Nous remarquons au passage que c'est l'orthogonalité des fonctions de Green G_x et $G_{\dot{x}}$ qui induit l'indépendance de $x(t)$ et $\dot{x}(t)$ dans le cas Gaussien.

Par la suite, nous restreindrons l'étude au cas $\beta = 0$; dans le cas contraire, la présence de la fonction d'asymétrie η_α interdit tout espoir d'ellipticité.

3.2 Mesure spectrale.

Le principe consiste à écrire le vecteur de Green sous la forme $\mathbf{G} = \|\mathbf{G}\| \mathbf{g}$ avec $\mathbf{g} \in \mathbb{S}_2$. Après changements de variables du type $\frac{g_{\dot{x}}(t)}{g_x(t)} = \tan \theta$ et au prix de quelques calculs

fastidieux, nous obtenons la densité de la mesure spectrale

$$\lambda(\mathbf{s}) = (\omega_0^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 2\zeta\omega_0 \cos \theta \sin \theta)^{-\frac{\alpha}{2}-1} \times \frac{1}{2} e^{-\frac{\zeta\omega_0}{\omega_c} \arctan\left(\frac{\omega_c}{\zeta\omega_0 + \tan \theta}\right)} D(\theta), \quad (9)$$

avec

$$D(\theta) = \frac{\exp\left(\varepsilon(\theta) \frac{\pi\alpha\zeta\omega_0}{2\omega}\right)}{2 \sinh\left(\frac{\pi\alpha\zeta\omega_0}{2\omega}\right)},$$

$$\varepsilon(\theta) = \mathbb{1}_{(-\frac{\pi}{2}; -\theta_0) \cup (\frac{\pi}{2}; \pi - \theta_0)}(\theta) - \mathbb{1}_{(-\theta_0; \frac{\pi}{2}) \cup (\pi - \theta_0; \frac{3\pi}{2})}(\theta)$$

dans le cas sous-amorti, et

$$D(\theta) = \mathbb{1}_{(-\theta_0; \frac{\pi}{2}) \cup (\pi - \theta_0; \frac{3\pi}{2})}(\theta)$$

dans le cas sur-amorti, où $\theta_0 = \arctan(\zeta\omega_0 - \Im(\omega_c))$ et $\mathbf{s} = [\cos \theta \quad \sin \theta]^t$. Le cas critique est obtenu par passage à la limite $\zeta \rightarrow 1$. On notera que le support de λ n'est pas le cercle \mathbb{S}_2 entier dans les cas sur-amorti et critique, ce qui montre clairement la non-ellipticité du couple $(x(t), \dot{x}(t))$ dans ces cas.

3.3 Quelques propriétés.

L'existence même d'une densité pour la mesure spectrale implique que les composantes ne sont pas indépendantes. Ce constat a déjà été établi dans [1] où des mesures d'écart à l'indépendance sont proposées (principalement basées sur des covariations). Cette densité ne peut pas non plus être écrite sous la forme (5) : la distribution jointe du couple $(x(t), \dot{x}(t))$ n'est donc pas elliptique hors cas Gaussien. On constate toutefois que $\lambda(\theta + \pi) = \lambda(\theta)$: la centro-symétrie est conservée. La connaissance explicite de la densité de la mesure spectrale, et sa comparaison à la forme qu'elle devrait avoir dans le cas elliptique, permettent de caractériser un écart à l'ellipticité.

Tout d'abord dans l'expression (9) apparaît un terme

$$\lambda_e(\theta) \equiv (\omega_0^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 2\zeta\omega_0 \cos \theta \sin \theta)^{-\frac{\alpha}{2}-1} \quad (10)$$

qui ressemble curieusement à une densité de la forme (5), associée à une matrice \mathbf{R} qu'on notera

$$\mathbf{R}_e = \begin{bmatrix} \omega_0^2 & \zeta\omega_0 \\ \zeta\omega_0 & 1 \end{bmatrix},$$

ce terme étant en quelque sorte "modulé". Toutefois, la forme quadratique qui apparaît dans λ_e n'est strictement positive que dans le cas sous-amorti. Dans les autres cas, le domaine sur lequel elle est négative coïncide avec le domaine où $\lambda = 0$, et λ_e n'est pas définie sur ce domaine. Ces observations montrent sous un nouvel angle la non-ellipticité du couple $(x(t), \dot{x}(t))$, au moins dans les cas sur-amorti et critique. En raison de la forme (5), les axes de symétrie d'une distribution elliptique et ceux de la densité de sa mesure spectrale coïncident. Une mesure possible d'un écart à l'ellipticité pourrait consister en la comparaison des axes de symétrie de λ_e (qui existent, qu'elle soit elliptique ou non) et des axes donnés par le minimum et le maximum de $\Phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{u})$ lorsque \mathbf{u} décrit le cercle unité. En effet, pour une distribution elliptique, les axes de symétrie coïncident

avec la direction des extrema de sa fonction caractéristique sur le cercle unité. Toutefois, la distribution de $(x(t), \dot{x}(t))$ n'étant pas elliptique, il n'y a aucune raison pour que ces axes soient axes de symétrie de cette dernière (il se trouve qu'elle n'en a pas), ni qu'ils soient orthogonaux (contrairement au résultat suggéré dans [1], ils ne le sont pas). Pour éviter toute confusion, nous les appellerons "pseudo-axes". D'autre part, les axes de symétrie de la partie "pseudo-elliptique" λ_e sont donnés par les direction propres de \mathbf{R}_e .

La figure 1 représente la densité (9) de la mesure spectrale, sa partie pseudo-elliptique (10), ainsi que les pseudo-axes donnés par les extrema de $\Phi_{\mathbf{X}}$ sur le cercle unité et les axes de symétrie de λ_e . Nous pouvons constater que, comme la présence du facteur de λ_e dans (9) l'indique, la distribution du couple position-vitesse n'est pas elliptique. Une mesure de distance entre λ et λ_e peut naturellement mesurer un écart à l'ellipticité, au moins dans le cas du régime sous-amorti. Dans tous les régimes, un écart entre les pseudo-axes de la distribution et les axes de symétrie de la partie pseudo-elliptique mesure également une divergence à l'ellipticité. On notera qu'une coïncidence des axes n'implique pas forcément l'ellipticité de la distribution. Nous noterons enfin que les pseudo-axes ne sont ni axes de symétrie, ni orthogonaux, confirmant clairement que la distribution ne peut être elliptique.

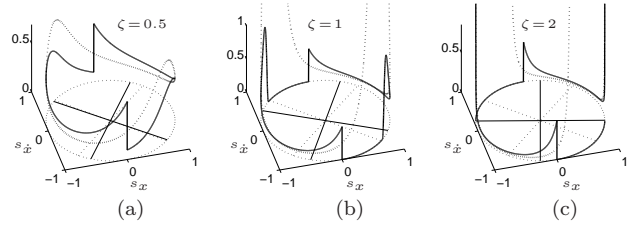


FIGURE 1 – Densité $\lambda(\mathbf{s})$ de la mesure spectrale (trait plein) et sa partie pseudo-elliptique (pointillés) du couple position-vitesse de l'oscillateur harmonique excité par un bruit α -stable. Les axes en trait plein représentent les directions des extrema de $\Phi_{\mathbf{X}}$ tandis que ceux en pointillés donnent les axes de symétrie de la partie pseudo-elliptique. Le cas (a) correspond au régime sous-amorti ($\zeta = 0.5$), le (b) au régime critique ($\zeta = 1$) et le (c) au régime sur-amorti ($\zeta = 2$). Les autres paramètres sont $\omega_0 = 1$ et le bruit est de Cauchy $\alpha = 1$.

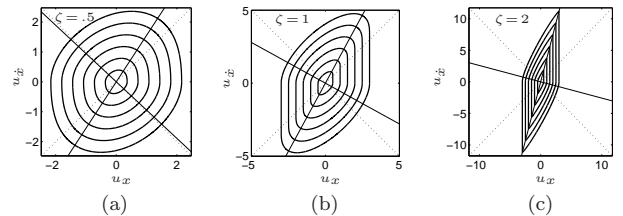


FIGURE 2 – Courbes de niveau de $\Phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{u})$ dans le contexte de la figure 1, avec les mêmes légendes concernant les axes.

Une autre approche pour quantifier la non-ellipticité de la distribution consiste à chercher les ellipses qui se rapprochent au mieux des courbes de niveau de la fonction caractéristique (8). En se basant sur (4) et (8), un critère simple consiste à

minimiser la distance L_2 entre la fonction

$$f(\theta) = \left(\int_{\mathbb{R}_+} |\mathbf{s}(\theta)^t \mathbf{G}(t)|^\alpha dt \right)^{\frac{2}{\alpha}} \quad (11)$$

et la forme quadratique

$$g_{\mathbf{R}}(\theta) = \mathbf{s}(\theta)^t \mathbf{R} \mathbf{s}(\theta), \quad (12)$$

avec $\mathbf{s} \in \mathbb{S}_2$. Supposant \mathbf{R} symétrique, on en déduit facilement, à l'aide du théorème de la projection orthogonale, la matrice optimale

$$\mathbf{R}_o = \frac{1}{\pi} \begin{bmatrix} \int_0^\pi (1+2\cos(2\theta))f(\theta)d\theta & \int_0^\pi 2\sin(2\theta)f(\theta)d\theta \\ \int_0^\pi 2\sin(2\theta)f(\theta)d\theta & \int_0^\pi (1-2\cos(2\theta))f(\theta)d\theta \end{bmatrix}.$$

N'importe quelle mesure de distance entre les fonctions $f(\theta)$ eq. (11) et $g_{\mathbf{R}_o}(\theta)$ eq. (12) fournit alors une mesure d'écart à l'ellipticité. A titre d'illustration, les figures 3 représentent la densité $\lambda(\mathbf{s})$ de la mesure spectrale, ainsi que son approximation elliptique donnée par (5). Les figures 4 montrent les courbes de niveau de la distribution, de sa partie pseudo-elliptique quand elle est elliptique (cas sous-amorti), ainsi que de son approximation elliptique. Sont également représentés les différents pseudo-axes de la distribution et les axes de symétrie des parties elliptiques et approximations elliptiques.

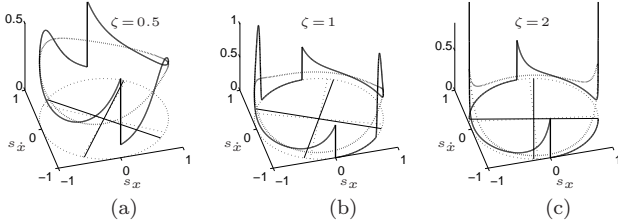


FIGURE 3 – Densité $\lambda(\mathbf{s})$ de la mesure spectrale (trait plein) et son approximation elliptique (tirets). Les axes en trait plein représentent les directions des extrema de $\Phi_{\mathbf{X}}$ tandis que ceux en tirets sont les axes de symétrie de l'approximation elliptique. Les paramètres sont ceux de la figure 1.

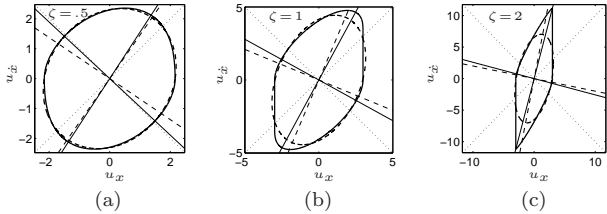


FIGURE 4 – Tracé d'une courbe de niveau de $\Phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{u})$ (trait plein), de sa partie elliptique (cas sous-amorti, en pointillés) et de l'approximation elliptique (tirets). Les pseudo-axes et axes sont indiqués avec la même légende et le contexte et les paramètres sont ceux des figures 1 et 3.

La distance

$$L_2 = \int_{\mathbb{S}_2} \left(\int_{\mathbb{S}_2} |\mathbf{u}^t \mathbf{s}|^\alpha \lambda(\mathbf{s}) ds - (\mathbf{u}^t \mathbf{R}_o \mathbf{u})^{\frac{\alpha}{2}} \right)^2 du \quad (13)$$

mesurant un écart à l'ellipticité est tracée figure 5 en fonction de l'amortissement ζ ou de l'indice de stabilité α de l'excitation. Ces courbes confirment les conclusions précédentes, à savoir que l'on s'écarte de l'ellipticité à mesure que l'amortissement augmente ou à mesure que l'indice de stabilité diminue. Rappelons que dans le cas Gaussien $\alpha = 2$, la distribution est toujours elliptique.

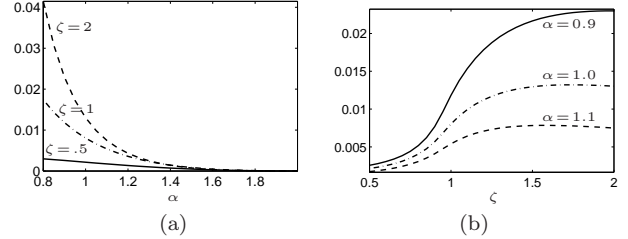


FIGURE 5 – Distance L_2 , eq. (13) en fonction de α pour $\zeta = .5$ (trait plein), $\zeta = 1$ (trait mixte) et $\zeta = 2$ (tirets) sur la courbe (a) et en fonction de ζ pour $\alpha = 0.9$ (trait plein), $\alpha = 1$ (trait mixte) et $\alpha = 1.1$ (tirets) sur la courbe (b).

4 Conclusion

Dans cet article, nous calculons explicitement la mesure spectrale du vecteur position - vitesse de l'oscillateur harmonique amorti excité par un bruit α -stable. Ce calcul nous permet de caractériser la non-indépendance des composantes ainsi que leur non-ellipticité, contrairement au cas Gaussien. Ces résultats suggèrent l'étude future d'une équation d'état linéaire d'un système de dimension quelconque excité par du bruit α -stable, $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\xi}(t)$. Il s'agira alors de déterminer les propriétés de la matrice \mathbf{A} et/ou du bruit α -stable $\boldsymbol{\xi}$ qui assurent l'ellipticité du vecteur \mathbf{x} .

Références

- [1] I.M. Sokolov, W. Ebellig, and B. Dybiec. Harmonic oscillator under Lévy noise : Unexpected properties in the phase space. *Physical Review E*, 83(4) :041118, April 2011.
- [2] B. J. West and V. Seshadri. Linear systems with Lévy fluctuations. *Physica A*, 113A(1-2) :203–216, July 1982.
- [3] K.-C. Chu. Estimation and decision for linear systems with elliptical random processes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 18(5) :499–505, October 1973.
- [4] G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu. *Stable Non-Gaussian Random Processes. Stochastic Models with infinite Variance*. Chapman & Hall, New-York, 1994.
- [5] T. M. Geroni and N. E. Frankel. Lévy flights : exact results and asymptotics beyond all orders. *Journal of Mathematical Physics*, 43(5) :2670–2689, May 2002.
- [6] M. Bilodeau and D. Brenner. *Theory of Multivariate Statistics*. Springer, New-York, 1999.