

Suivi d'un horizon sismique discontinu par résolution d'une équation de Poisson associée à des conditions de Dirichlet aux bords incrémentales

GUILLAUME ZINCK¹, MARC DONIAS¹, SEBASTIEN GUILLON², OLIVIER LAVIALLE¹

¹ Université de Bordeaux, IPB, Laboratoire IMS CNRS UMR 5218, 351 cours de la Libération, 33405 Talence cedex, France.

² TOTAL CSTJF, Avenue Larribau, 64018 Pau, France.

¹guillaume.zinck, marc.donias, olivier.lavialle@ims-bordeaux.fr, ²sebastien.guillon@total.com

Résumé - Nous proposons une méthode de suivi d'un horizon sismique discontinu, segmenté en deux parties par une faille considérée quasi-v verticale. La démarche suppose la connaissance des deux points délimitant l'horizon à reconstruire ainsi que du lieu et de l'amplitude de la discontinuité. Le suivi s'obtient à l'aide d'une équation aux dérivées partielles non linéaire liant la solution recherchée à l'orientation locale. Sa résolution itérative fait intervenir une équation de Poisson associée à des conditions de Dirichlet aux bords incrémentales. Un schéma ad-hoc efficace sur des données sismiques réelles sans connaissance du lieu et de l'amplitude de la discontinuité est également présenté.

Abstract - We propose a new method to track a seismic horizon with a discontinuity due to a fault throw assumed to be quasi-vertical. Our approach requires the knowledge of the two points delimiting the horizon as well as the discontinuity location and jump. We deal with a non linear partial derivative equation relied on the estimated local dip. Its iterative resolution is based on a Poisson equation with incremental Dirichlet boundary conditions. By exploiting a coherence criterion, we finally present an efficient method even when the discontinuity location and jump are unknown.

1 Introduction

Dans un objectif d'interprétation automatisée de données géologiques [1], cet article traite du suivi d'horizons sismiques [2][3]. Certaines méthodes [4][5] sont fondées sur une équation aux dérivées partielles (EDP) non linéaire faisant intervenir l'orientation locale. Lorsque l'horizon est continu, une résolution itérative à l'aide d'une technique d'optimisation globale est proposée par Lomask *et al.* [5]. Dans le cas où l'horizon est segmenté en deux parties par une faille supposée quasi-v verticale, nous proposons une nouvelle méthode de suivi par résolution d'une EDP, fondée sur une équation de Poisson linéaire associée à des conditions aux bords incrémentales.

2 Algorithme de suivi d'un horizon discontinu

Un horizon sismique discontinu peut être modélisé par une courbe (figure 1a) représentant une fonction τ définie entre deux abscisses x_1 et x_2 et caractérisée par un saut $C_c = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \tau(x) - \lim_{x \rightarrow \alpha^-} \tau(x)$ à l'abscisse $\alpha \in]x_1, x_2[$.

En l'absence de discontinuité, la fonction τ et la tangente p du pendage local sont liées par une EDP :

$$\forall x \in [x_1, x_2], \quad \nabla \tau(x) = p(x, \tau(x)), \quad (1)$$

où ∇ représente l'opérateur gradient. Le pendage local, défini par l'angle entre l'horizon et l'axe horizontal, est un champ dense connu, préalablement estimé sur l'image sismique. Les fonctions τ et p sont supposées respectivement de classe C^2 et C^1 .

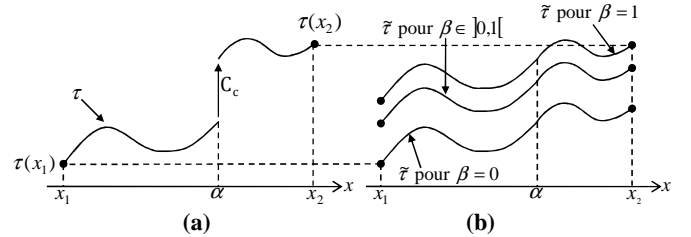


Figure 1a : Horizon sismique discontinu. – 1b : Influence de la valeur de β sur la fonction $\tilde{\tau}$.

Du fait de la discontinuité, nous proposons de décomposer la fonction τ qui est seulement de classe C^2 sur $[x_1, x_2] - \{\alpha\}$ en la somme d'une fonction $\tilde{\tau}$ de classe C^2 sur $[x_1, x_2]$ et d'une fonction discontinue \hat{t} . La fonction $\tilde{\tau}$ vérifie l'équation :

$$\forall x \in [x_1, x_2], \quad \nabla \tilde{\tau}(x) = p(x, \tilde{\tau}(x) + \hat{t}(x)), \quad (2)$$

tandis que \hat{t} est définie par :

$$\hat{t}(x) = -\beta C_c H(\alpha - x) + (1 - \beta) C_c H(x - \alpha), \quad (3)$$

où β est choisi entre 0 et 1 et H désigne la fonction de Heaviside :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ 1 & \text{if } x > 0 \end{cases} \quad (4)$$

Le paramètre β assure la superposition (figure 1b) de τ et de $\tilde{\tau}$ soit à gauche de la discontinuité ($\beta = 0$), soit à droite ($\beta = 1$), ou tout autre positionnement intermédiaire ($\beta \in]0,1[$). L'équation (2) étant non linéaire, le recours à un algorithme itératif [5] est nécessaire pour déterminer la solution recherchée.

2.1 Résolution dans le domaine continu

L'algorithme d'estimation de τ comporte trois phases. La fonction $\tilde{\tau}$ est tout d'abord initialisée à une valeur constante $y_r \in [\tau(x_1), \tau(x_2)]$ contrôlée par β , puis estimée par un procédé itératif comportant le calcul d'un résidu et d'un terme de mise à jour. La fonction τ recherchée est finalement obtenue en sommant $\tilde{\tau}$ et $\hat{\tau}$.

Phase d'initialisation :

$$\forall x \in [x_1, x_2], \quad \tilde{\tau}_0(x) = y_r = \tau(x_1) + \beta(\tau(x_2) - \tau(x_1)). \quad (5)$$

Phase itérative :

- Calcul du résidu :

$$r_k(x) = \nabla \tilde{\tau}_k(x) - p(x, \tilde{\tau}_k(x) + \hat{\tau}(x)). \quad (6)$$

- Calcul du terme de mise à jour :

$$\Delta(\delta \tilde{\tau}_k) = -\text{div}(r_k), \quad (7)$$

où Δ et div désignent respectivement l'opérateur Laplacien et l'opérateur divergence. L'équation (7) est une équation de Poisson associée à deux conditions de Dirichlet aux bords $\delta \tilde{\tau}_k(x_1)$ et $\delta \tilde{\tau}_k(x_2)$ qui prennent en compte l'amplitude de la discontinuité à la première itération et assurent l'existence d'une solution unique :

$$\begin{cases} \delta \tilde{\tau}_0(x_1) = -\beta(\tau(x_2) - \tau(x_1) - C_0) \\ \delta \tilde{\tau}_0(x_2) = (1 - \beta)(\tau(x_2) - \tau(x_1) - C_0) \end{cases} \quad (8)$$

$$\text{et } \begin{cases} \delta \tilde{\tau}_k(x_1) = 0 \\ \delta \tilde{\tau}_k(x_2) = 0 \end{cases} \forall k > 0.$$

- Mise à jour :

$$\tilde{\tau}_{k+1}(x) = \tilde{\tau}_k(x) + \delta \tilde{\tau}_k(x). \quad (9)$$

La convergence est supposée atteinte après un nombre d'itérations K suffisant.

Phase finale :

$$\tau(x) = \tilde{\tau}_K(x) + \hat{\tau}(x). \quad (10)$$

2.2 Résolution dans le domaine discret

La résolution numérique de l'équation (2) nécessite d'échantillonner l'intervalle $[x_1, x_2]$ sur N points et de considérer une discontinuité « discrète » d'amplitude $C_d = \tau(n_\alpha + 1) - \tau(n_\alpha)$ où n_α désigne le point d'échantillonnage situé juste à gauche de l'abscisse α (figure 2). Les termes de mises à jour $\delta \tilde{\tau}(n_\alpha)$ et $\delta \tilde{\tau}(n_\alpha + 1)$ ayant a priori une valeur différente, les valeurs de $\tilde{\tau}$ aux bords ne peuvent généralement pas être fixées en une seule itération. L'algorithme précédent est par conséquent modifié par l'introduction de conditions aux bords incrémentales dépendant d'une amplitude C_k initialisée à C_d , mise à jour à chaque itération, et impliquant également une mise à jour de la fonction discontinue $\hat{\tau}$.

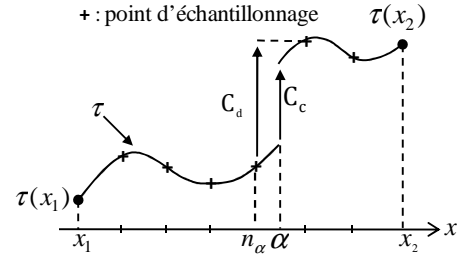


Figure 2 : Saut discret et continu.

Phase d'initialisation :

$$\begin{aligned} \forall n \in [1, N], \quad \tilde{\tau}_0(n) &= y_r \\ C_0 &= C_d \\ \hat{\tau}_0(n) &= -\beta C_0 H(n_\alpha + 1 - n) + (1 - \beta) C_0 H(n - n_\alpha). \end{aligned} \quad (11)$$

Phase itérative :

- Calcul du résidu :

$$r_k(n) = \nabla \tilde{\tau}_k(n) - p(n, \tilde{\tau}_k(n) + \hat{\tau}_k(n)). \quad (12)$$

- Calcul du terme de mise à jour :

$$\Delta(\delta \tilde{\tau}_k) = -\text{div}(r_k). \quad (7)$$

Les conditions aux bords deviennent :

$$\begin{cases} \delta \tilde{\tau}_0(1) = -\beta(\tau(x_2) - \tau(x_1) - C_0) \\ \delta \tilde{\tau}_0(N) = (1 - \beta)(\tau(x_2) - \tau(x_1) - C_0) \end{cases} \quad (13)$$

$$\text{et } \begin{cases} \delta \tilde{\tau}_k(1) = -\beta(C_{k-1} - C_k) \\ \delta \tilde{\tau}_k(N) = (1 - \beta)(C_{k-1} - C_k) \end{cases} \forall k > 0.$$

- Mise à jour :

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{k+1}(n) &= \tilde{\tau}_k(n) + \delta \tilde{\tau}_k(n) \\ C_{k+1} &= C_d - (\tilde{\tau}_{k+1}(n_\alpha + 1) - \tilde{\tau}_{k+1}(n_\alpha)) \\ \hat{\tau}_{k+1}(n) &= -\beta C_{k+1} H(n_\alpha + 1 - n) \\ &\quad + (1 - \beta) C_{k+1} H(n - n_\alpha). \end{aligned} \quad (14)$$

La convergence vers 0 de la différence $C_{k-1} - C_k$ assure à l'algorithme les mêmes propriétés que dans le domaine continu.

Phase finale :

$$\tau(n) = \tilde{\tau}_K(n) + \hat{\tau}_K(n). \quad (15)$$

L'équation de Poisson peut efficacement être résolue dans le domaine fréquentiel [6][7] :

$$\delta \tilde{\tau}_k = \text{TFD}^{-1} \left[\frac{\text{TFD}[-\text{div}(r_k)]}{\text{TFD}[\Delta]} \right], \quad (16)$$

où TFD et TFD^{-1} désignent respectivement la transformée de Fourier discrète et son inverse. Les conditions d'inversion du Laplacien sont décrites par [6]. Un miroir impair est appliqué aux signaux d'entrée pour vérifier les conditions aux bords et s'affranchir d'artefacts indésirables. Une transformée en sinus discret de type I peut alors être utilisée pour calculer chaque transformée en $\mathcal{O}(N \log N)$ opérations.

3 Schéma de détection automatique de discontinuité

Le cas d'une discontinuité d'amplitude et de lieu inconnus peut être abordé en testant plusieurs candidats (C_d, n_α) et en identifiant le candidat optimal $(C_d^{opt}, n_\alpha^{opt})$ au sens d'un critère exprimant la pertinence de la solution τ obtenue. En remplacement d'un crible exhaustif suffisamment fin (un pas de 0,5 pour C_d et de 1 pour n_α), notamment coûteux en temps de calcul, nous proposons d'exploiter une propriété observée : connaissant le lieu n_α , les conditions incrémentales $|C_{k-1} - C_k|$ tendent d'autant plus vite vers 0 que l'hypothèse C_d évaluée est proche de la valeur réelle. Ainsi, une méthode ad-hoc de détection des paramètres de la discontinuité consiste, dans un premier temps, à identifier le paramètre optimal C_d^{opt} pour un certain nombre de valeurs possibles du lieu n_α et, dans un second temps, à déterminer l'hypothèse optimale n_α^{opt} .

Concernant la première phase, il s'agit de considérer trois hypothèses d'amplitude centrées sur une valeur a priori C_d^0 et régulièrement espacées d'un pas h_C . L'algorithme de suivi d'horizon est mis en œuvre pour un faible nombre d'itérations K (5 ou 6). L'amplitude pour laquelle la différence $|C_{k-1} - C_k|$ est minimale est alors substituée à C_d^0 et le procédé est répété M fois en divisant le pas h_C par 2 de sorte à atteindre une précision satisfaisante.

Concernant la deuxième phase, un critère de cohérence [8][9], efficace pour différencier les failles d'autres sources de chaos, est ensuite calculé pour déterminer le lieu optimal. Fondé sur une analyse de la matrice de covariance du champ de gradient estimé sur L points le long du segment $\mathbf{u} = [(n_\alpha, \tau(n_\alpha)), (n_\alpha + 1, \tau(n_\alpha + 1))]$, il est défini pour le candidat (C_d, n_α) par :

$$c(C_d, n_\alpha) = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad (17)$$

où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de la matrice dans l'ordre décroissant. Le candidat optimal minimise ce critère, qui tend vers 1 en présence d'une faille, les deux valeurs propres étant très proches l'une de l'autre, et vers 0 dans le cas contraire.

Le candidat optimal étant identifié, une reconstruction de meilleure qualité est finalement obtenue par l'algorithme de suivi d'horizon mis en œuvre pour 30 itérations.

4 Résultats

4.1 Données synthétiques

L'algorithme de suivi d'horizon est tout d'abord appliqué à des images synthétiques construites à partir d'un modèle mathématique τ_{th} et contaminées par un

bruit blanc gaussien centré (cf. figure 3). L'abscisse et l'amplitude de la discontinuité sont supposées connues. La figure 4 représente la moyenne mesurée sur 1000 images de la différence entre la fonction estimée τ et le modèle τ_{th} pour respectivement 1, 2 et 10 itérations.

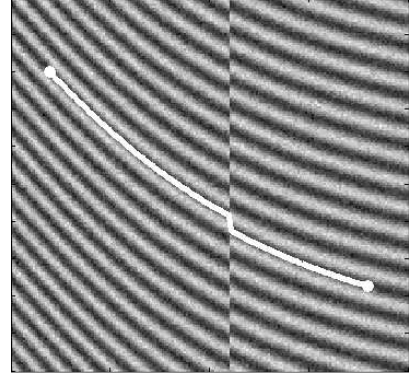


Figure 3 : Image synthétique (200×200 , SNR = 10 dB) et horizon suivi ($n_\alpha = 110$, $C_d = 8, 2$).

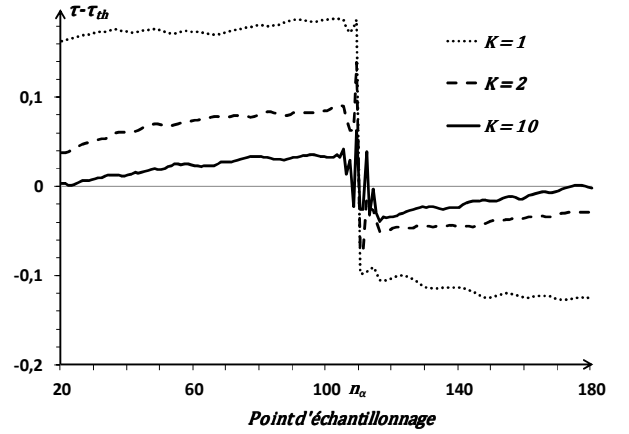


Figure 4 : Moyenne de la différence $\tau - \tau_{th}$ selon K .

La différence observée est très faible aux abords de la discontinuité (moins de 0,2 pixel), insignifiante et tendant vers 0 sur les bords de l'horizon (10^{-3} pour 10 itérations, 10^{-4} pour 30 itérations) ce qui illustre la précision, la rapidité de convergence et la robustesse au bruit de notre algorithme.

La figure 5 montre que pour un nombre K supérieur à 5 itérations, la convergence vers 0 des conditions incrémentales $|C_{k-1} - C_k|$ est d'autant plus rapide que l'hypothèse C_d évaluée est proche de la valeur exacte.

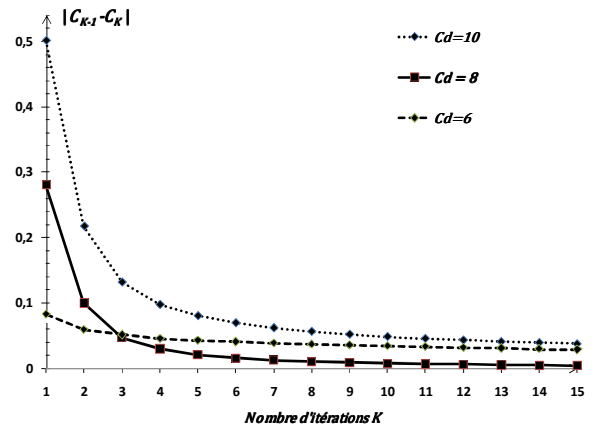


Figure 5 : Différence $|C_{k-1} - C_k|$ selon K .

4.2 Données réelles

L'algorithme est ensuite appliqué à de nombreuses images sismiques pour lesquelles l'abscisse et l'amplitude de la faille sont inconnues. La figure 6 représente un exemple d'image sismique traitée ainsi que les deux points délimitant l'horizon à reconstruire.

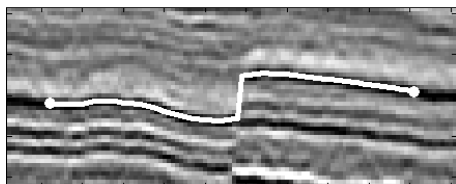


Figure 6 : Image sismique et horizon suivi.

Les hypothèses de lieu de discontinuité sont choisis dans l'intervalle discret $[x_1 + 1, x_2 - 1]$ tandis que les paramètres utilisés sont $C_d^0 = 0$, $h_c = 10$, $K = 5$, $M = 5$ et $L = 10$. Au final, l'abscisse et l'amplitude de la discontinuité semblent parfaitement identifiées et l'horizon suivi, également représenté sur la figure 6, se confond avec l'horizon observable.

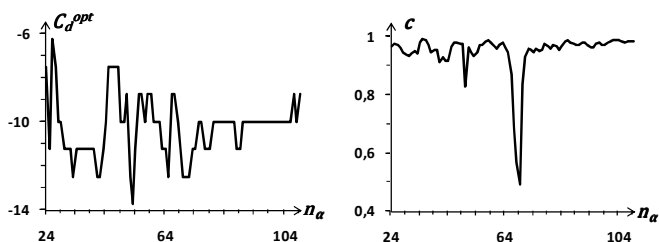


Figure 7a : Amplitude optimale pour chaque lieu. – 7b : Réponse du critère de cohérence.

La figure 7a fait apparaître que les valeurs d'amplitude C_d^{opt} correspondant à chacun des lieux de discontinuité possibles sont variables tout en restant néanmoins proches de la valeur observable sur l'image sismique (autour de -10). Le choix $M = 5$ implique un pas h_c terminal inférieur au pixel. Enfin, le critère de cohérence c (figure 7b) permettant d'identifier le lieu optimal n_α^{opt} est particulièrement discriminant pour des valeurs de L comprises entre 5 et 20.

5 Conclusion

Nous avons développé une nouvelle méthode capable de suivre un horizon sismique segmenté en deux parties par une faille quasi-verticale. Elle suppose la connaissance des deux points délimitant l'horizon ainsi que de l'orientation locale. La démarche est fondée sur

une technique d'optimisation globale dont l'étape clé est la résolution d'une équation de Poisson linéaire associée à des conditions de Dirichlet aux bords incrémentales. Les résultats observés sont satisfaisants tant sur des images synthétiques que sur des données sismiques.

6 Remerciements

Les auteurs remercient le groupe Total pour le soutien apporté à ces travaux et les images sismiques fournies.

7 Références

- [1] Donias, M., Guillon, S., Baylou, P., Pauget, F., and Keskes, N., "Method of chrono-stratigraphic interpretation of a seismic cross section or block", Elf Exploration Production, U.S. Patent N° 2001/0036294, Nov. 1, 2001.
- [2] Benbernou, R., and Warwick, K., "A fuzzy multicriteria decision approach for enhanced autotracking of seismic events", International Conference on Signal Processing and Communications, pp. 1331-1334, 2007.
- [3] Gallon, J., Guillon, S., Jobard, B., Barucq, H. and Keskes, N., "Slimming brick cache strategies for seismic horizon propagation algorithms", International Symposium on Volume Graphics, pp. 37-44, 2010.
- [4] Bienati, N., and Spagnolini, U., "Traveltime picking in 3D data volumes", 60th European Association of Geoscientists & Engineers Meeting, 1998.
- [5] Lomask, J., Guitton, A., Fomel, S., Claerbout, J., and Valenciano, A., "Flattening without picking", *Geophysics*, Vol. 71, No. 4, pp. 13-20, 2006.
- [6] Strang, G., "Introduction to applied mathematics", *Wellesley-Cambridge Press*, 1986.
- [7] Bhat, P., Curless, B., Cohen, M., and Lawrence Zitnick, C., "Fourier analysis of the 2D screened Poisson equation for gradient domain problems", European Conference on Computer Vision, pp. 114-128, 2008.
- [8] Randen, T., Mosen, E., Signer, C., Abrahamsen, A., Hansen, J.O., Saeter, T., Schlaf, J., and Sonneland, A., "Three-dimensional texture attributes for seismic data analysis", 70th Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophysics, Expanded Abstracts, pp. 668-671, 2000.
- [9] Donias, M., David, C., Laviaille, O., Berthoumieu, Y., Guillon, S., and Keskes, N., "New fault attribute based on a robust directional scheme", *Geophysics*, Vol. 72, No. 4, pp. 39-46, 2007.