

Filtrage Bilatéral Géométrique de Champ de Tenseurs

VINCENT TOUJAS, MARC DONIAS, JACQUES DANIEL, YANNICK BERTHOUMIEU

Université de Bordeaux, IPB, Laboratoire IMS CNRS UMR 5218,
351 cours de la Libération, 33405 Talence cedex, France.

[vincent.toujas marc.donias jacques.daniel yannick.berthoumieu]@ims-bordeaux.fr

Résumé – Cet article propose d'utiliser une représentation géométrique de tenseurs dans un contexte de régularisation de champ tensoriel par filtrage bilatéral. En substitution des espaces Euclidiens et Riemanniens comme base de mélange de tenseurs, il s'agit d'opérer une décomposition vectorielle d'un tenseur en 3 composantes canoniques (l'orientation, la forme et la surface). Cette nouvelle approche, particulièrement adaptée au cas du tenseur couleur, est illustrée sur un champ de tenseur synthétique bruité puis sur une image réelle dans un objectif de segmentation d'une image couleur.

Abstract - This paper proposes to use a geometric representation of tensors in a regularization context by bilateral filtering. In replacement of Euclidean and Riemannian spaces as basis for mixing tensors, we operate a vectorial decomposition of a tensor into 3 canonical components (orientation, shape and surface). This new approach, particularly adapted to color tensor, is illustrated both on a synthetic noised tensor field and on a real image with the goal of image color segmentation.

1 Régularisation de Champ de Tenseur

Dans le cas d'images scalaires, de nombreuses familles de filtrage ont été développées telles que des régressions locales, des approches variationnelles, des méthodes à base de dérivées partielles ou des techniques statistiques. La plupart d'entre-elles ont été étendues au cas de champ de tenseurs principalement pour des applications en Imagerie par Résonance Magnétique (IRM). Dans ce contexte, de nombreux travaux ont montré l'intérêt d'exploiter le fait que les données tensorielles traitées n'appartiennent pas à un espace Euclidien. Des métriques et des combinaisons Riemanniennes [1] ont ainsi été proposées pour respectivement définir des mesures de dissimilarité dédiées aux matrices symétriques définies positives et garantir l'appartenance de la donnée résultante d'un filtrage à l'espace des tenseurs. Par extension, les filtres tensoriels utilisés en IRM peuvent être utilisés dans d'autres contextes de champ de tenseurs, incluant, par exemple, le Tenseur de Structure (TS) afin de caractériser des orientations locales et leur dispersion ou bien encore le Tenseur Couleur pour des applications de segmentation d'images couleur. Cependant, il a été démontré que les métriques Riemanniennes existantes sont en pratique peu adaptées à de telles familles de tenseurs. Aussi, cet article propose de montrer qu'une décomposition géométrique d'un tenseur en orientation, en facteur de forme et en surface est pertinente pour des applications de filtrage et de segmentation.

Plusieurs algorithmes tels que les M-estimator, les diffusions non linéaires ou le filtrage bilatéral sont largement utilisés en débruitage d'image. Considérons N tirages f_i , $i=1, \dots, N$ d'une image bruitée f . Un M-estimateur fournit une solution de l'image débruitée u en minimisant

$$E(u) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \psi(|u_i - f_j|^2) \quad (1)$$

où ψ est une fonction d'erreur. Du fait de propriétés de conservation de bords, un choix habituel est la fonction d'erreur de Perona-Malik :

$$\psi(d^2) = \lambda^2 \log \left(1 + \frac{d^2}{\lambda^2} \right) \quad (2)$$

où λ est un paramètre de barrière.

Le critère de l'équation 1 peut être minimisé par un algorithme de descente de gradient. Ici, nous nous sommes focalisés sur le filtre bilatéral tensoriel [2] qui minimise l'équation 1 étendue au cas des tenseurs. Notons U_i la solution du champ de tenseur débruité qui peut être estimée de manière itérative suivant l'équation suivante :

$$U_i^{k+1} = H^{-1} \left(\frac{\sum_{j=1}^N \psi'(d(U_i^k, U_j^k)^2) H(U_j^k)}{\sum_{j=1}^N \psi'(d(U_i^k, U_j^k)^2)} \right) \quad (3)$$

où $H(\cdot)$ est une fonction de transformation et $d(\dots)$ est une mesure de dissimilarité entre deux tenseurs. Plus de détails sur les distances et mesures de dissimilarité sont présentés dans [3] tandis que les principales d'entre-elles sont définies dans le Tableau 1.

2 Filtrage Bilatéral Géométrique.

2.1 Caractéristiques géométriques d'un tenseur.

Soit U un tenseur 2×2 , i.e. une matrice symétrique définie positive, nous notons V^1 et V^2 les vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres λ_1 et λ_2 ordonnées en valeurs décroissantes. Un tenseur bidimensionnel peut être représenté par une ellipse

caractérisée par une orientation principale θ , un facteur de forme S_f et une surface S définis par :

$$\begin{cases} \theta(U) = \arg(V^1) \\ S_f(U) = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \\ S(U) = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}. \end{cases} \quad (4)$$

La représentation d'un tenseur par une ellipse avec des exemples de variations possibles de ces caractéristiques géométriques sont présentées sur la figure 1.

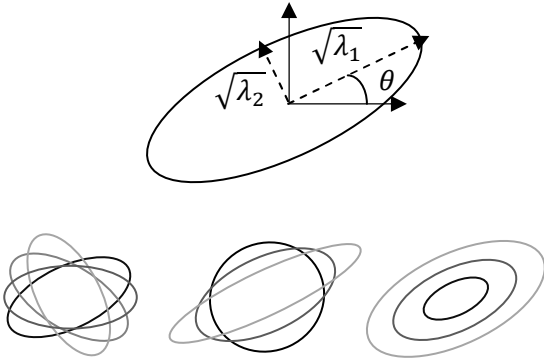


Figure 1 – Haut : représentation d'un tenseur par une ellipse. Bas : de gauche à droite, variation de l'orientation, du facteur de forme et de la surface.

2.2 Combinaison géométrique de tenseurs.

Dans le processus de filtrage décrit à l'équation 2, le mélange des tenseurs est entièrement défini par la transformation H . De manière usuelle, cette transformation peut être soit l'identité (transformation Euclidienne)

$$H_E(U) = U, \quad (5)$$

soit le logarithme matriciel (transformation Riemannienne) défini par

$$H_{LE}(U) = \log(U). \quad (6)$$

Dans cet article, nous proposons d'utiliser une nouvelle transformation H basée sur les propriétés géométriques d'un tenseur décrites au paragraphe précédent. Le filtre bilatéral étant un processus qui combine indépendamment chaque composante de tenseurs, une représentation matricielle n'est en effet pas réellement requise et peut être remplacée par une représentation vectorielle. Par conséquent, nous proposons de décomposer chaque tenseur U sous la forme d'un vecteur de caractéristiques géométriques :

$$U \xrightarrow{H_G} \begin{bmatrix} T(\theta(U)) \\ S_f(U) \\ S(U) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} T(\theta(U)) \\ S_f(U) \\ S(U) \end{bmatrix} \xrightarrow{H_G^{-1}} U \quad (7)$$

avec

$$\theta \xrightarrow{T} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta \\ \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (8)$$

La transformation T (équation 8) permet de tenir compte du caractère circulaire à π près de l'orientation θ et de calculer de manière adéquate des moyennes arithmétiques angulaires.

Ainsi, toute combinaison pour filtrer une donnée initialement tensorielle est effectuée sur des vecteurs de caractéristiques géométriques plutôt que directement sur chaque élément du tenseur. La transformation inverse H_G^{-1} assure d'obtenir un tenseur à l'issue du mélange.

2.3 Expériences de filtrage de champ de tenseurs

Des simulations ont été effectuées sur un champ de tensoriel uniforme composé de tenseurs caractérisés par une orientation de $\pi/4$ radians, un facteur de forme égal à 0.3 et une surface valant 3.0. Ce champ est perturbé par un bruit gaussien additif, appliqué de manière indépendante sur chacune des 3 composantes géométriques, avant d'être régularisé par un filtre bilatéral tensoriel pour différentes valeurs de barrières et avec un maximum de 200 itérations. Nous proposons ici une comparaison des résultats de débruitage considérant les transformations Euclidiennes, Riemanniennes et géométriques dans l'objectif de restaurer le champ de tenseur uniforme originel. Sur chaque composante géométrique du champ de tenseur filtré, nous avons estimé la valeur moyenne résultante de la donnée complète.

Sur la figure 2, seuls les résultats des moyennes et variances en orientation obtenues par la transformation géométrique sont représentées du fait que les méthodes comparées fournissent des résultats semblables et corrects. Sur la figure 3, une divergence de la valeur moyenne de la surface peut être observée pour la transformation Euclidienne. Les deux autres transformations fournissent un filtrage efficace pour cette caractéristique géométrique. Sur la figure 4, seule la transformation géométrique permet de restaurer le facteur de forme original du champ de tenseurs.

3 Segmentation d'Image Couleur

La pertinence du filtrage tensoriel proposé peut être illustrée, par exemple, dans le contexte de la segmentation d'image couleur. Rittner et al [4] ont proposé d'associer respectivement la teinte, la saturation et la luminance d'un pixel couleur à l'orientation, au facteur de forme et à la surface d'un tenseur. Un procédé de segmentation de type *Graphcut* permet ensuite d'obtenir un partitionnement d'une image couleur en régions homogènes [5].

Métrique	Forme
Euclidienne	$d_F(A, B) = \ A - B\ _F$
Log-Euclidienne [3]	$d_{LF}(A, B) = \ \log(A) - \log(B)\ _F$
Riemannienne [3]	$d_R(A, B) = \ \log(A^{-1/2}BA^{-1/2})\ _F$
J-Divergence	$d_{KL}(A, B) = 1/2\sqrt{\text{tr}(A^{-1}B + AB^{-1}) - 2n}$
Shape-Orientation [6]	$d_{SO}(A, B) = d_O(A, B)^p * d_S(A, B)^q$ avec $d_O(A, B) = \frac{\ v_A^1 \wedge v_B^1\ }{\ v_A^1\ \ v_B^1\ } * \min(S_f(A), S_f(B))$, $d_S(A, B) = \max\left(\frac{S_f(A)}{S_f(B)}, \frac{S_f(B)}{S_f(A)}\right)$

Tableau 1 : définitions de mesures de dissimilarité tensorielle.

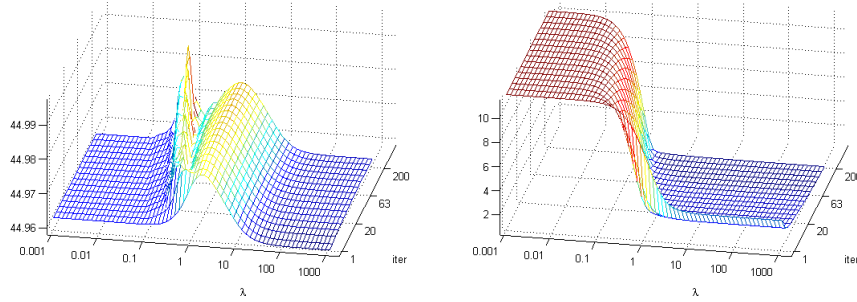


Figure 2 – Valeur moyenne, à gauche, et variance, à droite, de l’orientation du champ de tenseur filtré, en fonction du nombre d’itérations et de la barrière λ (H=Géométrique).

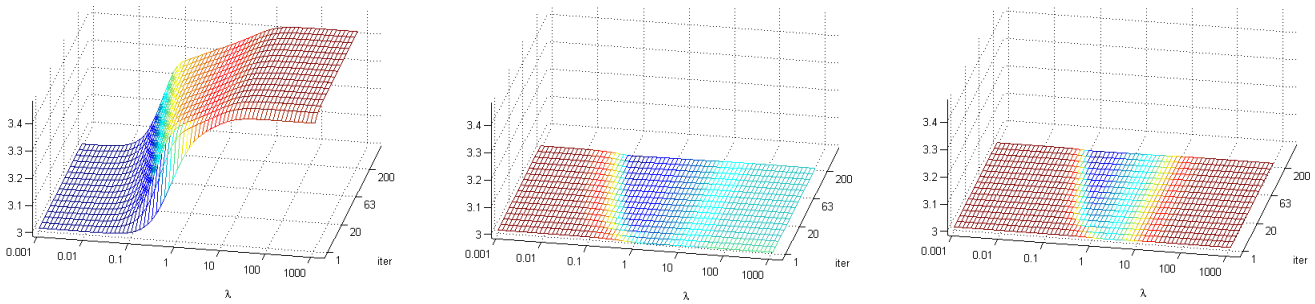


Figure 3 – Valeur moyenne de la surface du champ de tenseur filtré en fonction du nombre d’itérations et de la barrière λ . De gauche à droite : H=Id, H=Riemannien, H=Géométrique

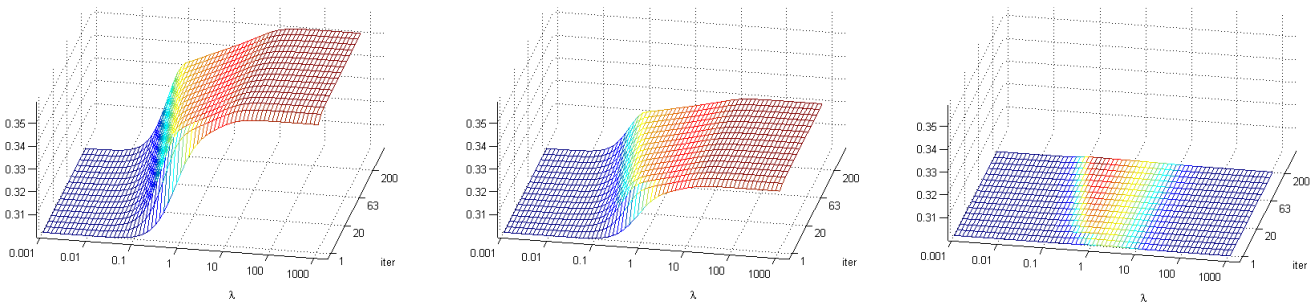


Figure 4 – Valeur moyenne du facteur de forme du champ de tenseur filtré en fonction du nombre d’itérations et de la barrière λ . De gauche à droite : H=Id, H=Riemannien, H=Géométrique

Nous avons comparés (Figure 5) les résultats de segmentation sur une image couleur (figure 5a) avec une initialisation de l’algorithme *Graphcut* définie manuellement (figure 5b). Trois résultats de segmentation de l’image couleur traitée ont été obtenus à partir du champ de tenseur couleur original (figure 5c) et du champ de tenseur régularisé par un filtrage bilatéral mettant en œuvre respectivement une transformation Riemannienne (figure 5d) et la

transformation géométrique (figure 5e) proposée dans cet article. Les trois processus de filtrages ont été opérés selon le même nombre d’itérations et le même paramètre de barrière. Les meilleurs résultats ont été obtenus avec la mesure de dissimilarité Shape-Orientation (tableau 1).

En l’absence de filtrage du champ tensoriel (figure 5c), les deux becs des perroquets ainsi que les ailes de celui de gauche semblent mal segmentés. Avec un

filtrage de type Riemannien (figure 5d), les contours de l'aile du perroquet de droite sont mieux localisés. Cependant, seul le filtrage de type géométrique (figure 5e) permet d'obtenir une segmentation correcte au niveau du bec du perroquet de droite ainsi qu'autour des yeux, et du cou. Le bec du perroquet de gauche est quant à lui défini plus précisément principalement à la

pointe et à la jonction avec la zone blanche de la tête. Ces résultats soulignent la pertinence de l'approche proposée et s'expliquent naturellement par la prise en compte de variations de teinte, de saturation et de luminance dans le processus de filtrage bilatéral.

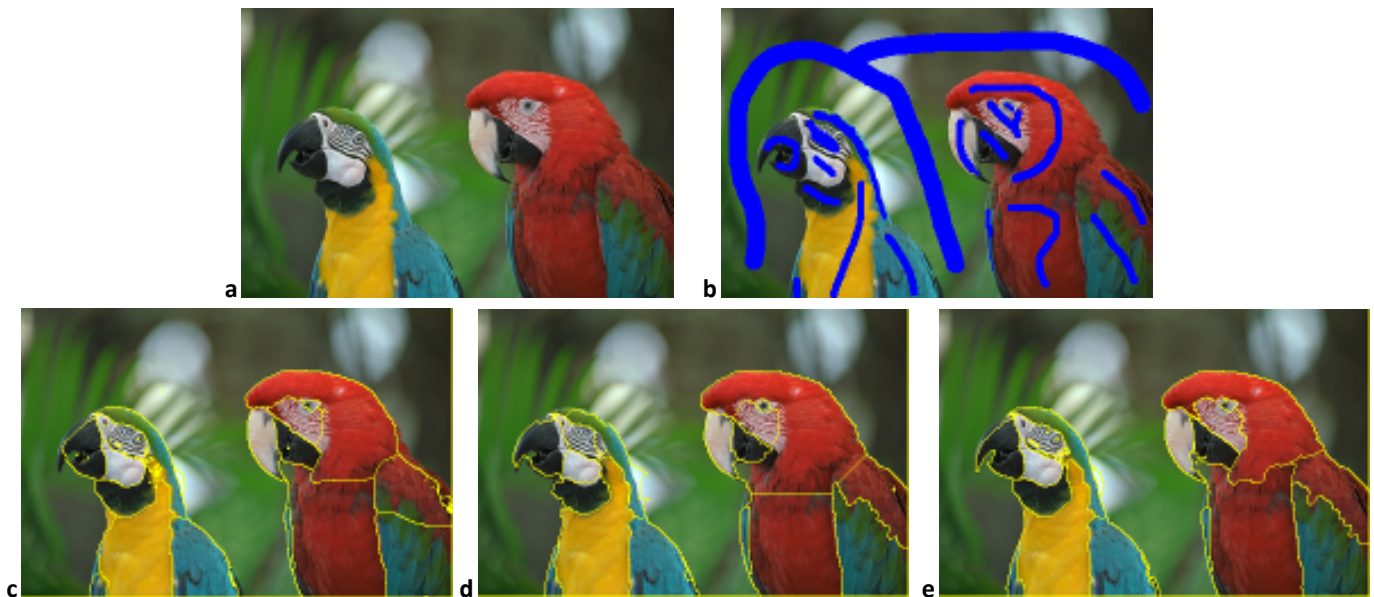


Figure 5 – Segmentation d'image couleur. a : image initiale. b : initialisation de la segmentation. c : résultat sans filtrage. d : résultat avec filtrage Riemannien. e : résultat avec filtrage géométrique.

4 Conclusion

Cet article présente une approche de filtrage bilatéral tensoriel prenant en compte une décomposition canonique de tenseurs en composantes géométriques. Les résultats obtenus démontrent que l'approche proposée assure un débruitage efficace d'un champ de tenseurs synthétiques contrairement aux approches Euclidiennes et Riemanniennes. Enfin, les performances de cette décomposition ont été observées pour une problématique de segmentation d'images couleur. De futurs travaux se focaliseront sur l'utilisation de cette approche dans différents types de filtres tensoriels et sur son extension aux cas de tenseurs de dimensions supérieures.

5 Références

- [1] P. Fillard, V. Arsigny, N. Ayache, X. Pennec, "A Riemannian framework for the processing of tensor-valued images". In: Fogh Olsen, O., Florack, L.M.J., Kuijper, A. (eds.) *DSSCV 2005*. LNCS, vol. 3753, pp. 112–123. Springer, Heidelberg, 2005.
- [2] L. Pizarro, B. Burgeth, S. Didas, J. Weickert, "A generic neighbourhood filtering framework for matrix fields". In D. Forsyth, P. Torr, A. Zisserman (Eds.): *Computer Vision – ECCV 2008*. *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 5304, 521-532. Springer, Berlin, 2008.
- [3] I.L. Dryden, A. Koloydenkon D. Zhou, "Non-Euclidean statistics for covariance matrices, with applications to diffusion tensor imaging" *Annals of Applied Statistics*, volume 3, Number 3, 1102-1123, 2009.
- [4] L. Rittner, F.C. Flores, R.A. Lotufo, "A tensorial framework for color images" *Journal Pattern Recognition Letters*, volume 31, Issue 4 3, 277-296, 2010.
- [5] J. Malcolm, Y. Rathi, A. Tannenbaum, "A Graph Cut Approach to Image Segmentation in Tensor Space" *Computer Vision and Pattern Recognition, CVPR 2007*. Atlanta, USA. pp. 1-8, 2007
- [6] V. Toujas, M. Donias, Y. Berthoumieu, "Structure tensor field regularization based on geometric features" *European Signal Processing Conference EUSIPCO 2010*, Aalborg, Denmark, pp. 1330-1333, 2010.