

Une méthode d'extraction de sources parcimonieuses fondée sur la norme ℓ_0

Leonardo TOMAZELI DUARTE¹, Ricardo SUYAMA², Romis ATTUX¹, João Marcos TRAVASSOS ROMANO¹, Christian JUTTEN³

¹Laboratoire DSPCom, Université de Campinas (UNICAMP)
Av. Albert Einstein, 400, CEP: 13083-852, Campinas, Brésil

²CECS, Université Fédérale du ABC (UFABC)
Av. dos Estados, 5001, CEP: 09210-170, Santo André, Brésil

³GIPSA-lab, UMR 5216 CNRS, Université Joseph Fourier
961 rue de la Houille Blanche BP 46 F-38402 Grenoble Cedex, France

leonardo.duarte@fca.unicamp.br, ricardo.suyama@ufabc.edu.br
attux@dca.fee.unicamp.br, romano@dmo.fee.unicamp.br,
christian.jutten@gipsa-lab.grenoble-inp.fr

Résumé – Dans ce travail, nous proposons une nouvelle approche pour l'extraction aveugle de sources fondée sur la norme ℓ_0 . Nous présentons des résultats théoriques indiquant les conditions pour lesquelles la norme ℓ_0 est une fonction de contraste pour l'extraction. Enfin, nous proposons un algorithme quasi-optimal en nous appuyant sur une approximation lissée de la norme ℓ_0 et une métaheuristique. Puisque l'approche proposée n'est pas fondée sur des hypothèses telles que l'indépendance statistique, notre méthode peut être utile dans les situations où les techniques d'analyse en composantes indépendantes ne peuvent être appliquées. Un exemple numérique est fourni pour illustrer ce point.

Abstract – In this work, we propose a novel method to perform blind source extraction. Our approach is based on the ℓ_0 norm. We provide sufficient conditions assuring that the ℓ_0 norm can be a contrast function in the context of source extraction. Moreover, we propose a method based on a smooth approximation of the ℓ_0 norm and on a metaheuristic. Since our approach does not rely on properties such as statistical independence, it can be applied in some situations in which independent component analysis algorithms fail. This feature is illustrated by a numerical simulation with synthetic data.

1 Introduction

Dans la séparation aveugle de sources (SAS), l'objectif est de retrouver un ensemble de signaux (sources) en utilisant uniquement l'information apportée par des versions mélangées de ces sources originales [1]. Un problème étroitement lié à la SAS est celui de l'extraction aveugle de sources (EAS). Dans ce cas, on s'intéresse à la récupération d'une seule source. Notons que le problème de SAS peut être résolu en effectuant plusieurs exécutions d'une méthode d'EAS, à la condition que, dans chaque exécution, la contribution de la source retrouvée soit éliminée des mélanges. Cette tâche peut être conduite via une procédure de déflation [3, 6].

La plupart des méthodes d'EAS considère que les sources sont statistiquement indépendantes. Dans ce cas, l'EAS peut être effectuée par optimisation de critères fondés sur l'analyse en composantes indépendantes (ACI), tels que ceux utilisant des cumulants [1, 6]. Néanmoins, plus récemment, certains travaux ont proposé de nouveaux critères d'extraction qui exploitent la parcimonie des sources. Dans [8], par exemple, les auteurs proposent une mesure non-convexe de parcimonie comme fonction de contraste. Bien que des résultats

intéressants soient obtenus par cette approche, les auteurs n'abordent pas les conditions théoriques pour lesquelles leur approche est valide. D'autre part, dans [9], les auteurs montrent qu'un critère fondé sur la norme ℓ_1 est en effet une fonction de contraste pour l'EAS. Cependant, même si l'algorithme proposé se montre efficace dans plusieurs situations, les conditions théoriques obtenues par [9] ne sont valides que pour le cas où les sources présentent la propriété forte d'orthogonalité disjointe.

Dans le présent travail, nous introduisons une nouvelle approche pour l'extraction de la source la plus parcimonieuse, dont l'originalité est fondée sur la minimisation de la norme ¹ ℓ_0 (le nombre de éléments non nuls) du signal estimé. Nous obtenons des conditions suffisantes pour lesquelles la norme ℓ_0 est une fonction de contraste [1]. Comme on le verra par la suite, ces conditions ne dépendent que de la norme ℓ_0 des sources. Par conséquent, l'approche proposée peut être utilisée même si les sources ne sont pas statistiquement indépendantes

1. Nous adoptons dans cet article le terme "norme ℓ_0 ", puisqu'il est usuellement utilisé dans la littérature. Néanmoins, strictement parlant, la "norme ℓ_0 " n'est pas une norme mathématique car elle ne satisfait pas la propriété de homogénéité [5].

ou ne présentent pas la propriété d'orthogonalité disjointe.

Étant donné que, en pratique, les signaux parcimonieux présentent typiquement des nombreuses valeurs qui sont très proches de zéro, mais pas forcément nulles, la réalisation d'une méthode d'EAS fondée sur la norme ℓ_0 ne peut être faite qu'à l'aide d'une approximation de cette mesure. Dans ce contexte, une deuxième contribution du papier concerne la conception d'un algorithme d'EAS utilisant l'approximation lissée de la norme ℓ_0 récemment proposée dans [7]. L'algorithme proposé s'appuie sur la méthode d'optimisation bio-inspirée opt-aiNet [2]. Notre choix pour cette métaheuristique se justifie par l'existence de minima locaux dans la fonction de contraste issue de l'approximation lissée de la norme ℓ_0 . Cette caractéristique rend délicate, voire impraticable, l'utilisation de méthodes simples d'optimisation comme, par exemple, celles fondées sur le gradient de la fonction de contraste.

2 Méthodologie

2.1 Modèle de mélange

Dans ce travail, nous considérons un modèle de mélange linéaire instantané, qui s'écrit

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{S},$$

où la matrice \mathbf{S} contient les sources disposés par ligne, c'est-à-dire

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{s}_{N_s}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1(1) & s_1(2) & \dots & s_1(N_d) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N_s}(1) & s_{N_s}(2) & \dots & s_{N_s}(N_d) \end{bmatrix},$$

où N_s et N_d dénotent les nombres de sources et d'échantillons, respectivement. La matrice $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N_m \times N_d}$ contient les mélanges, qui sont aussi disposés par ligne. La matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N_m \times N_s}$ décrit le processus de mélange ; nous supposons par la suite que cette matrice est de rang plein. En outre, dans ce travail, nous ne considérons que le cas déterminé, c'est-à-dire dans lequel il y a autant de sources (N_s) que de mélanges (N_m).

Dans l'EAS, le but est d'estimer une seule source, en estimant un vecteur d'extraction, noté \mathbf{w} . La source extraite est donc donnée par

$$\mathbf{y}^T = \mathbf{w}^T \mathbf{X} = \mathbf{w}^T \mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{g}^T \mathbf{S},$$

où le vecteur \mathbf{g} correspond à la réponse combinée du vecteur d'extraction avec la matrice de mélange.

2.2 Fonction de contraste fondée sur la norme ℓ_0

Dans cette section, nous étudions l'utilisation de la norme ℓ_0 de \mathbf{y} , notée $\|\mathbf{y}\|_0$, comme critère pour l'EAS. Plus précisément, nous analysons les conditions pour que norme ℓ_0 soit une fonction de contraste² qui nous permette d'estimer la source la plus

2. Une fonction de contraste (ou tout simplement contraste) est définie comme une fonction objectif dont la valeur optimale globale est associée à la séparation ou extraction parfait des sources [1]

parcimonieuse.

Nous supposons, sans perte de généralité, que les sources sont ordonnées selon leur norme ℓ_0 croissante, c'est-à-dire, $\|\mathbf{s}_1\|_0 \leq \|\mathbf{s}_2\|_0 \leq \dots \leq \|\mathbf{s}_{N_s}\|_0$. Dans cette situation, le théorème suivant peut alors être énoncé pour le cas de deux sources.

Théorème 1 (mélange de deux sources) Soit $\mathbf{w} = [w_1 \ w_2]^T$ un vecteur d'extraction tel que $\mathbf{y}^T = \mathbf{w}^T \mathbf{X}$. Si au moins un élément de \mathbf{w} est non nul, et si

$$\|\mathbf{s}_1\|_0 < \frac{1}{2} \|\mathbf{s}_2\|_0,$$

alors $\|\mathbf{y}\|_0 \geq \|\mathbf{s}_1\|_0$, l'égalité étant vérifiée si et seulement si, $\mathbf{g}^T = \mathbf{w}^T \mathbf{A} = [\alpha \ 0]$, où $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Preuve Le signal extrait est donné par

$$\mathbf{y}^T = \mathbf{w}^T \mathbf{X} = \mathbf{w}^T \mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{g}^T \mathbf{S} = g_1 \mathbf{s}_1^T + g_2 \mathbf{s}_2^T. \quad (1)$$

Le théorème peut être démontré en étudiant les quatre cas suivants : 1) $g_1 = 0$ et $g_2 = 0$. Cette situation n'arrive jamais car, d'après nos hypothèses, \mathbf{w} n'est pas le vecteur nul et \mathbf{A} est une matrice de rang plein. 2) $g_1 = 0$ et $g_2 \neq 0$. De l'invariance d'échelle de la norme ℓ_0 [5], on a $\|\mathbf{y}\|_0 = \|g_2 \mathbf{s}_2\|_0 = \|\mathbf{s}_2\|_0 > \|\mathbf{s}_1\|_0$. 3) $g_1 \neq 0$ et $g_2 = 0$. Dans ce cas, on a $\|\mathbf{y}\|_0 = \|g_1 \mathbf{s}_1\|_0 = \|\mathbf{s}_1\|_0$. 4) $g_1 \neq 0$ et $g_2 \neq 0$. En utilisant l'inégalité triangulaire inverse [5] et l'invariance d'échelle de la norme ℓ_0 , on peut écrire

$$\|\mathbf{y}\|_0 \geq \left| \|g_1 \mathbf{s}_1\|_0 - \|g_2 \mathbf{s}_2\|_0 \right|. \quad (2)$$

Puisque g_1 et g_2 sont différents de zéro dans ce cas, (2) s'écrit

$$\|\mathbf{y}\|_0 \geq \left| \|\mathbf{s}_1\|_0 - \|\mathbf{s}_2\|_0 \right|. \quad (3)$$

Par hypothèse, $\|\mathbf{s}_1\|_0 < \frac{1}{2} \|\mathbf{s}_2\|_0$. Par conséquent, dans ce cas, on peut conclure à partir de (3) que $\|\mathbf{y}\|_0 > \|\mathbf{s}_1\|_0$. \square

D'après le théorème 1, il est donc possible d'extraire la source la plus parcimonieuse en minimisant la norme ℓ_0 , à la condition que les sources aient des normes ℓ_0 suffisamment différentes. Notons que, dans le théorème énoncé, il n'y a pas l'ambiguïté de permutation typique des méthodes de SAS. En effet, la source la plus parcimonieuse sera toujours retrouvée en premier. Il est également intéressant de noter que le théorème 1 ne s'appuie pas sur des hypothèses telles que l'indépendance statistique. Finalement, remarquons que le théorème 1 fournit une condition suffisante mais pas nécessaire pour que norme ℓ_0 soit une fonction de contraste. Notamment, les conditions établies peuvent être relaxées si les sources ont la propriété d'orthogonalité disjointe.

Le résultat suivant étend le théorème 1 pour le cas général de N_s sources.

Théorème 2 (cas général) Soit $\mathbf{w} = [w_1 \ \dots \ w_{N_s}]^T$ un vecteur d'extraction tel que $\mathbf{y}^T = \mathbf{w}^T \mathbf{X}$. Si au moins un élément

de \mathbf{w} n'est pas nul et si

$$\begin{aligned} \|\mathbf{s}_1\|_0 &< \frac{1}{2}\|\mathbf{s}_2\|_0 \\ \|\mathbf{s}_1\|_0 &< \frac{1}{2}(\|\mathbf{s}_3\|_0 - \|\mathbf{s}_2\|_0) \\ \|\mathbf{s}_1\|_0 &< \frac{1}{2}(\|\mathbf{s}_4\|_0 - \|\mathbf{s}_3\|_0 - \|\mathbf{s}_2\|_0) \\ &\vdots \\ \|\mathbf{s}_1\|_0 &< \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{s}_{N_s}\|_0 - \sum_{i=2}^{N_s-1} \|\mathbf{s}_i\|_0\right), \end{aligned} \quad (4)$$

alors $\|\mathbf{y}\|_0 \geq \|\mathbf{s}_1\|_0$, l'égalité étant vérifiée si et seulement si $\mathbf{g}^T = \mathbf{w}^T \mathbf{A} = [\alpha \ 0 \ \dots \ 0]$, où $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Esquisse de la preuve Ce théorème peut être prouvé par un raisonnement par récurrence. D'abord, en se fondant sur le théorème 1, qui assure la propriété de contraste pour $N_s = 2$, nous considérons le cas de $N_s = 3$ sources.

Afin que l'extraction de \mathbf{s}_1 soit la solution avec la plus petite norme ℓ_0 , le nombre de zéros générés à partir de toute combinaison linéaire qui comprend \mathbf{s}_3 doit être supérieur au nombre de zéros générés par une solution dans laquelle $g_2 = g_3 = 0$ et $g_1 \neq 0$. Si $g_3 = 0$, une telle exigence est déjà satisfaite par le théorème 1, ce qui est exactement la première équation dans (4).

Si $g_3 \neq 0$, la valeur minimale de $\|\mathbf{y}\|_0$ sera obtenue quand tous les éléments non nuls des autres sources sont utilisés pour annuler les éléments non nuls présents dans \mathbf{s}_3 . Cette situation exige, pour chaque instant de temps n où un élément non nul dans \mathbf{s}_3 est observé, que les éléments correspondants de \mathbf{s}_1 ou \mathbf{s}_2 , notés $s_1(n)$ et $s_2(n)$, soient non nuls. Dans cette situation, le nombre de zéros de \mathbf{y} peut être égal à $Z_1 = \|\mathbf{s}_1\|_0 + \|\mathbf{s}_2\|_0 + N_d - \|\mathbf{s}_3\|_0$, c'est-à-dire que tous les éléments non nuls de \mathbf{s}_1 et \mathbf{s}_2 sont utilisés pour annuler un élément non nul de \mathbf{s}_3 , augmentant ainsi le nombre de zéros de \mathbf{y} . Notons que, dans ce cas, $N_d - \|\mathbf{s}_3\|_0$ représente le nombre de zéros partagés par les trois sources. D'autre part, le nombre de zéros générés par la solution désirée ($g_2 = g_3 = 0$ et $g_1 \neq 0$) est tout simplement donné par $N_d - \|\mathbf{s}_1\|_0$. Par conséquent, pour que la norme ℓ_0 soit une fonction de contraste valide, la condition suivante doit être vérifiée

$$\|\mathbf{s}_1\|_0 + \|\mathbf{s}_1\|_0 + N_d - \|\mathbf{s}_3\|_0 < N_d - \|\mathbf{s}_1\|_0, \quad (5)$$

puisque la norme ℓ_0 de \mathbf{y} atteindra sa valeur minimale lorsque $g_2 = g_3 = 0$ et $g_1 \neq 0$, ce qui correspond à l'extraction parfaite de \mathbf{s}_1 . L'expression (5) est équivalente à

$$\|\mathbf{s}_1\|_0 < \frac{1}{2}(\|\mathbf{s}_3\|_0 - \|\mathbf{s}_2\|_0),$$

ce qui est exactement la deuxième équation dans (4).

Le même raisonnement est valable pour $N_s \geq K > 3$. Pour que la norme ℓ_0 soit une contraste, on doit généraliser la condition (5) et écrire que la somme des normes ℓ_0 des $N_s - 1$ sources les plus parcimonieuses plus le nombre de zéros en commun ne peut pas dépasser le nombre de zéros de \mathbf{s}_1 , soit :

$$\sum_{k=1}^{K-1} \|\mathbf{s}_k\|_0 + N_d - \|\mathbf{s}_K\|_0 < N_d - \|\mathbf{s}_1\|_0, \forall K \leq N_s. \quad (6)$$

Après un calcul algébrique simple, on arrive aux conditions énoncées dans les équations (4) du théorème 2. \square

2.3 Méthode d'EAS fondée sur une approximation lissée de la norme ℓ_0

La mise en œuvre d'un algorithme d'extraction de la source la plus parcimonieuse fondée sur la norme ℓ_0 demande l'utilisation d'une approximation de cette mesure. En effet, outre le problème de complexité combinatoire, l'application directe de la norme ℓ_0 dans un contexte réel s'avère très limitée car les signaux parcimonieux ont généralement de nombreux éléments avec une énergie très faible, mais pas nécessairement nulle. Compte tenu de cette limitation, nous nous appuyons sur l'approximation lissée de la norme ℓ_0 proposée dans [7].

$$S_{\ell_0}(\mathbf{y}) = N_d - \sum_{i=1}^{N_d} f(y_{(i)}, \sigma) \quad (7)$$

où $f(\cdot, \sigma)$ correspond à un noyau gaussien de moyenne nulle et d'écart-type σ . À mesure que σ s'approche de zéro, (7) tend vers la norme ℓ_0 .

L'utilisation d'une version lissée de la norme ℓ_0 nous permet de travailler avec une fonction continue et dérivable. Cependant, il y a encore une difficulté dans l'optimisation de (7) : cette fonction contient des minima locaux qui ne correspondent pas aux sources. Afin de résoudre ce problème, nous adoptons une méthode d'optimisation bio-inspirée, l'algorithme opt-aiNet, particulièrement utile pour traiter des fonctions de coût multimodales. Cet algorithme s'est avéré très robuste à la convergence locale et a déjà été appliqué dans d'autres problèmes de traitement de signaux. Nous ne décrivons pas cette méthode dans le présent document, et nous renvoyons le lecteur à [2] pour davantage de détails.

3 Résultats

Afin d'illustrer l'utilité de la méthodologie proposée, nous l'appliquons sur un jeu de données synthétiques, dans lequel la matrice de mélange est donnée par $\mathbf{A} = [1 \ 0, 5; 0, 5 \ 1]$. Les sources, présentées dans la figure 1(a), ont été générées à partir de deux vecteurs de normes ℓ_0 égales à 49 et 100, respectivement (le nombre d'échantillons est $N_d = 100$). De plus, les sources sont dépendantes, avec un coefficient de corrélation estimé de 0,65. Puisque la première source est clairement plus parcimonieuse que la deuxième, le théorème 1 assure la propriété de contraste de la norme ℓ_0 dans cette situation.

Nous appliquons l'algorithme opt-aiNet pour minimiser (7). L'écart-type du noyau gaussien a été fixé à $\sigma = 0,02$. Comme illustré à la figure 1(c), la minimisation de (7) fournit une bonne estimation de la source la plus parcimonieuse. À titre de comparaison, nous considérons la méthode FastICA [6] (figure 1(c)). La source estimée par cette méthode est toujours un mélange des sources (figure 1(c)), ce qui peut être expliqué par le fait que les sources sont statistiquement dépendantes dans le scénario considéré. La figure 1(c) montre les résidus, $\mathbf{y} - \mathbf{s}_1$, issus de l'application de la méthode proposée et de FastICA. Pour calculer ces résidus, il faut normaliser \mathbf{y} par rapport à la source originelle \mathbf{s}_1 , vu l'ambiguïté d'échelle inhérente aux deux méthodes.

4 Conclusions

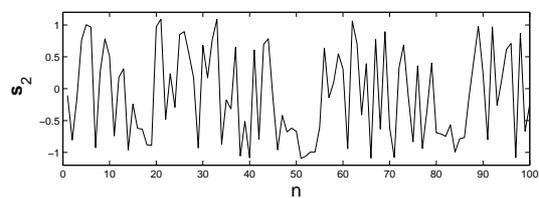
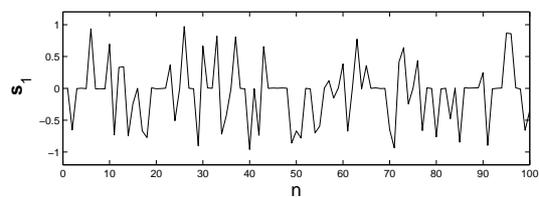
Dans ce travail, nous avons étudié l'utilisation de la norme ℓ_0 comme fonction de contraste pour l'extraction aveugle de sources. Nous avons montré que cette l'approche est valide si les sources sont suffisamment différentes en ce qui concerne leur caractère parcimonieux. En outre, si une telle condition est vérifiée, l'extraction de la source la plus parcimonieuse peut être réalisée même lorsque les sources sont statistiquement dépendantes. Cette caractéristique peut être utile pour traiter des problèmes de séparation pour lesquels les méthodes existantes ne sont pas applicables.

Dans nos travaux futurs, nous allons étudier la possibilité d'étendre les résultats théoriques obtenus à l'approximation lissée de la norme ℓ_0 . Cela nous permettrait d'étudier l'influence du bruit sur notre méthode. De plus, une étude sur l'applicabilité de l'approche proposée à la conception de réseaux de capteurs chimiques intelligents [4] est en cours.

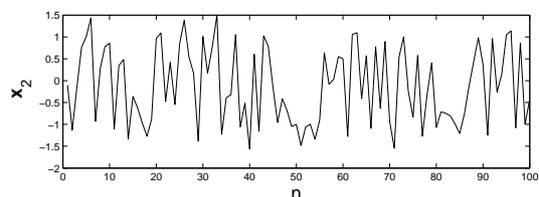
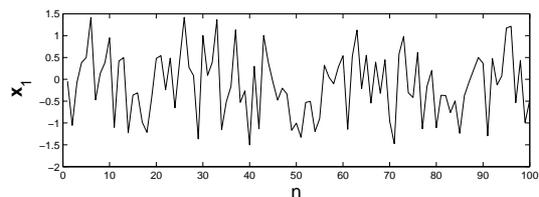
Remerciements. Leonardo T. Duarte remercie la FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, Brésil) pour avoir financé son stage post-doctoral, au cours duquel ce travail a été développé.

Références

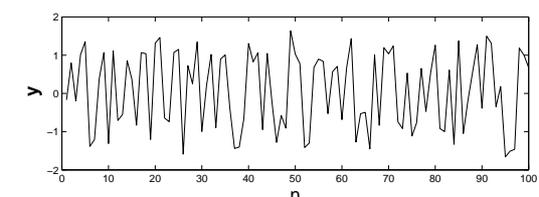
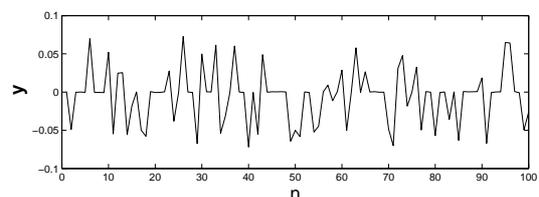
- [1] P. Comon and C. Jutten, editors. *Handbook of blind source separation : independent component analysis and applications*. Academic Press, 2010.
- [2] L. N. de Castro and J. Timmis. An artificial immune network for multimodal function optimization. In *Proc. Congress Evolutionary Computation CEC '02*, 2002.
- [3] N. Delfosse and P. Loubaton. Adaptive blind separation of independent sources : A deflation approach. *Signal Processing*, 45 :59–83, 1995.
- [4] L. T. Duarte, C. Jutten, and S. Moussaoui. A Bayesian nonlinear source separation method for smart ion-selective electrode arrays. *IEEE Sensors Journal*, 9(12) :1763–1771, 2009.
- [5] M. Elad. *Sparse and redundant representations from theory to applications in signal and image processing*. Springer, 2010.
- [6] A. Hyvärinen, J. Karhunen, and E. Oja. *Independent component analysis*. John Wiley & Sons, 2001.
- [7] H. Mohimani, M. Babaie-Zadeh, and C. Jutten. A fast approach for overcomplete sparse decomposition based on smoothed ℓ^0 norm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 57(1) :289–301, 2009.
- [8] N. Mourad and J. P. Reilly. Blind extraction of sparse sources. In *Proc. of IEEE ICASSP*, pages 2666–2669, 2010.
- [9] E. Z. Nadalin, A. K. Takahata, L. T. Duarte, R. Suyama, and R. Attux. Blind extraction of the sparsest component. *Lectures Notes on Computer Science*, 6365 :263–270, 2010.



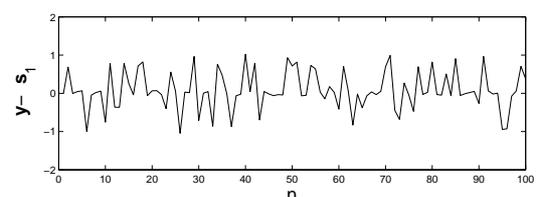
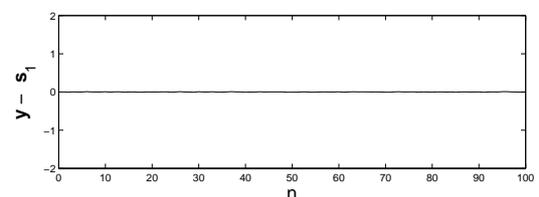
(a) Sources



(b) Mélanges



(c) Sources retrouvées par la méthode proposée (en haut) et par la méthode FastICA (en bas).



(d) Résidus ($y - s_1$, après normalisation de y) obtenu par la méthode proposée (en haut) et par l'algorithme FastICA (en bas).

FIGURE 1 – Application de la méthode proposée dans un problème de séparation de deux sources corrélées.