

# Filtrage particulaire sur les variétés riemanniennes.

Hichem SNOUSSI

Institut Charles Delaunay

UMR STMR 6279 CNRS, Université de Technologie de Troyes

12 rue Marie Curie, 10010 Troyes, France

Hichem.Snoussi@utt.fr

**Résumé** – L’objectif de ce travail est de proposer un algorithme de filtrage particulaire sur les variétés riemanniennes. En effet, en plus de la non linéarité des équations d’observation, l’état du système est parfois contraint à appartenir à un espace géométrique ayant la structure d’une variété riemannienne et dont la dimension est largement inférieure à l’espace euclidien ambiant. La prise en compte de la structure géométrique de l’espace des états permet de régulariser le problème d’estimation en ligne lorsque les observations ne sont pas suffisamment informatives. La formulation géométrique du filtrage particulaire est même nécessaire lorsque l’espace des états ne peut pas être plongé dans un espace euclidien ambiant (exemple des densités de probabilités). Afin d’illustrer la pertinence du filtrage géométrique proposé, nous avons considéré l’estimation en ligne des matrices de covariance du bruit d’observation, conjointement avec l’estimation en ligne de la position d’une cible en mouvement.

**Abstract** – In this contribution, a general scheme of particle filtering on Riemannian manifolds is proposed. In addition to the nonlinear dynamics, the system state is constrained to lie on a Riemannian manifold  $\mathcal{M}$ , which dimension is much lower than the whole embedding space dimension. The Riemannian manifold formulation of the state space model avoids the curse of dimensionality from which suffers most of the particle filter methods. Furthermore, this formulation is the only natural tool when the embedding Euclidean space cannot be defined (the state space is defined in an abstract geometric way) or when the constraints are not easily handled (space of positive definite matrices).

## 1 Introduction

Le filtrage particulaire [1] est une méthode de Monte Carlo séquentielle, dont l’objectif est d’approximer en ligne la distribution *a posteriori* de l’état caché d’un système dynamique. La popularité du filtrage particulaire repose essentiellement sur sa flexibilité dans le cas d’un système dynamique régi par des équations non linéaires et des processus non gaussiens. Cependant, cette méthode de filtrage a été conçue et appliquée pour des états cachés appartenant à un espace euclidien, bien que, dans certaines applications, l’état caché peut appartenir à un espace géométrique plus abstrait, telles que les variétés riemanniennes [5]. Des travaux récents ont été dédiés à la conception d’algorithmes de traitement du signal adaptés à la structure géométrique des paramètres d’intérêt. Parmi ces travaux, basés sur la géométrie différentielle, on peut citer : les algorithmes de descente de gradient sur les variétés de Grassmann pour la reconnaissance de formes dans [2], l’analyse statistique du tenseur de diffusion en IRM dans [3], les algorithmes de déconvolution géodésique dans [4], etc.

L’objectif de ce travail est de proposer une extension du filtrage particulaire lorsque l’état caché du système  $\mathbf{x}$  est contraint à appartenir à une variété riemannienne  $(\mathcal{M}, \mathbf{g}, \nabla)$  munie d’une métrique riemannienne  $\mathbf{g}$  et d’une connexion affine  $\nabla$ .

Le papier est organisé comme suit. La section ?? est dédiée à la description de la technique proposée de filtrage particulaire sur les variétés riemanniennes en se basant sur la notion de mapping exponentiel. Dans cette même section, on introduit aussi l’algorithme de gradient permettant le calcul en ligne

d’un estimateur bayésien à partir des échantillons générés par le filtrage particulaire. Enfin, dans la section ??, un exemple de tracking de cible dans un réseau de capteurs permet d’illustrer les performances du filtrage particulaire proposé, afin d’estimer conjointement la matrice de covariance du bruit.

## 2 Filtrage particulaire sur les variétés riemanniennes

On suppose que le système étudié évolue selon le modèle dynamique non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_t \sim p_x(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, u_t), \mathbf{x} \in \mathcal{M} \\ \mathbf{y}_t \sim p_y(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t, u_t), \end{cases} \quad (1)$$

où on propose de définir le processus markovien (marche aléatoire)  $p_x(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, u_t)$  sur la variété riemannienne  $\mathcal{M}$  selon la procédure suivante :

1. Générer un échantillon aléatoire  $\mathbf{v}_t$  sur l’espace tangent  $\mathcal{T}_{\mathbf{x}_{t-1}} \mathcal{M}$  selon une densité de probabilité  $p_v(\cdot)$ .
2. L’échantillon  $\mathbf{x}_t$  est ensuite obtenu par le mapping exponentiel de  $\mathbf{v}_t$  selon la connexion affine  $\nabla$ .

En d’autres termes, le vecteur aléatoire  $\mathbf{v}_t$  est échantillonné selon les techniques d’échantillonnage usuelles sur un espace euclidien. Le mapping exponentiel assure ensuite la transformation de ce vecteur vers un point  $\mathbf{x}_t$  sur la variété riemannienne. Le point  $\mathbf{x}_t$  n’est autre que l’extrémité de la géodésique

partant de  $\mathbf{x}_{t-1}$  et ayant  $\mathbf{v}_t$  comme le vecteur de vitesse initial. Le mapping exponentiel permet ainsi la prise en compte de la contrainte géométrique tout en utilisant les techniques d'échantillonnage usuelles sur un espace euclidien. La figure 1 illustre ce processus d'échantillonnage sur la variété riemannienne  $\mathcal{M}$ .

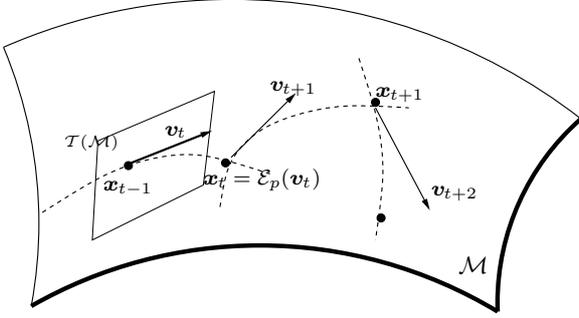


FIG. 1 – Marche aléatoire sur une variété riemannienne.

En se basant sur le processus d'échantillonnage géométrique, défini ci-dessus, le filtrage particulaire consiste à propager, dans un premier temps, les trajectoires sur la variété riemannienne et à les pondérer par leurs vraisemblances dans un deuxième temps. La procédure de ré-échantillonnage (nécessaire pour éviter la dégénérescence du filtre) est aussi implémentée par des techniques de ré-échantillonnage usuelles [1].

## 2.1 Estimation en ligne

En se basant sur les trajectoires  $\{\hat{\mathbf{x}}_{0:T}^{(i)}\}$ , les algorithmes classiques de filtrage particulaire permettent une procédure très simple pour approcher les estimées ponctuelles des variables d'intérêt. En effet, toute variable d'intérêt  $h(\mathbf{x}_t)$  peut être estimée par son espérance *a posteriori*, minimisant l'espérance *a posteriori* de l'erreur quadratique. Cette espérance *a posteriori* peut être approximée, d'une manière non biaisée, par la moyenne empirique des particules  $h(\mathbf{x}_t^{(i)})$ . Moyenner arithmétiquement les particules, obtenues par un filtrage particulaire géométrique, sur une variété riemannienne, n'a plus de sens : la moyenne empirique peut se trouver à l'extérieur de la variété riemannienne ou la sommation ne représente plus un opérateur valide sur la variété. Afin d'obtenir une estimation ponctuelle sur une variété riemannienne, on doit minimiser l'erreur quadratique moyenne, où l'erreur est évaluée par la distance géodésique  $\mathcal{D}$  sur la variété riemannienne  $\mathcal{M}$ . En se basant sur le travail de Fréchet [6], l'estimée ponctuelle est définie par la moyenne intrinsèque (appelée aussi barycentre riemannien). La moyenne intrinsèque est définie par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_t &= \arg \min_{\mathbf{x}_t \in \mathcal{M}} \mathbb{E}[(\mathcal{D}(\mathbf{x}_t, \mathbf{s}_t))^2] \\ &= \arg \min_{\mathbf{x}_t \in \mathcal{M}} \int (\mathcal{D}(\mathbf{x}_t, \mathbf{s}_t))^2 p(\mathbf{s}_t | y_{1..T}) d_{\mu} \mathbf{s}_t\end{aligned}\quad (2)$$

où l'espérance est calculée par rapport à la densité de probabilité *a posteriori*  $p(\mathbf{s}_t | y_{1..T})$  et une mesure dominante  $d_{\mu}$ .

Le calcul de l'estimée ponctuelle (2) nécessite une intégration (par rapport à  $\mathbf{s}_t \in \mathcal{M}$  et selon la distribution *a posteriori*) et une optimisation sous la contrainte géométrique d'appartenance à la variété riemannienne  $\mathcal{M}$ . L'intégration peut être approximée (comme dans le cas euclidien) par une somme pondérée des distances géodésiques appliquées aux particules générées par le filtrage particulaire. L'estimée ponctuelle est alors approximée par la minimisation de l'espérance *a posteriori* approchée :

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \arg \min_{\mathbf{x}_t \in \mathcal{M}} \sum_{i=1}^N w_t^{(i)} (\mathcal{D}(\mathbf{x}_t, \mathbf{s}_t^{(i)}))^2 \quad (3)$$

où  $\mathbf{s}_t^{(i)}$  et  $w_t^{(i)}$  représentent les particules et leurs poids calculés récursivement par le filtre particulaire.

Concernant l'optimisation contrainte du critère dans (3), on doit suivre une démarche se basant sur les outils de la géométrie différentielle. Dans un premier temps, l'existence et l'unicité de la moyenne intrinsèque doivent être étudiées. Karcher [7] a démontré ces propriétés dans le cas où la variété différentiable  $\mathcal{M}$  possède une courbure sectionnelle négative. Dans un deuxième temps, au niveau algorithmique, on peut concevoir un algorithme de gradient intrinsèque sur la variété riemannienne en se basant sur le mapping exponentiel. En effet, en notant par  $\mathcal{J}(\mathbf{x}_t)$  le critère à minimiser par rapport à la variable  $\mathbf{x}_t$ ,

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}_t) = \sum_{i=1}^N w_t^{(i)} (\mathcal{D}(\mathbf{x}_t, \mathbf{s}_t^{(i)}))^2,$$

une série  $\mathbf{x}_t^{(l)}$ , partant d'une valeur initiale  $\mathbf{x}_t^{(0)}$  et convergeant vers la solution  $\hat{\mathbf{x}}_t$ , peut être construite en se déplaçant dans la direction opposée du gradient du critère  $\nabla \mathcal{J}(\mathbf{x}_t^{(l)})$ . Comme le gradient  $\nabla \mathcal{J}(\mathbf{x}_t^{(l)})$  appartient à l'espace tangent  $\mathcal{T}_{\mathbf{x}_t^{(l)}}(\mathcal{M})$ , le mapping exponentiel peut être utilisé pour projeter l'opposé du gradient au point suivant  $\mathbf{x}_t^{(l+1)}$  sur la variété  $\mathcal{M}$ . L'algorithme de gradient géométrique est donc défini par l'itération suivante :

$$\mathbf{x}_t^{(l+1)} = \mathcal{E}_{\mathbf{x}_t^{(l)}}(-\nabla \mathcal{J}(\mathbf{x}_t^{(l)})) \quad (4)$$

La figure 2 illustre une itération de l'algorithme de gradient géométrique sur une variété riemannienne.

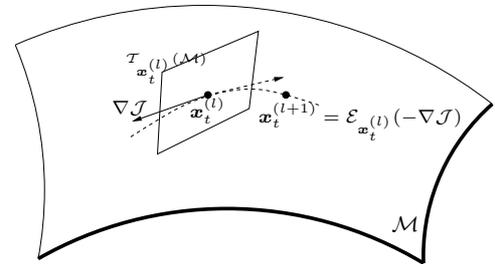


FIG. 2 – Une étape de descente de gradient sur une variété riemannienne.

### 3 Application au tracking d'une cible

Afin d'illustrer les performances de l'algorithme proposé, on se propose d'estimer en ligne la matrice de covariance d'un bruit d'observation d'un réseau de 400 capteurs déployés sur une surface 2-D. Les données issues des capteurs suivent le modèle suivant :

$$\begin{pmatrix} y_t^r \\ y_t^\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{\|s_m - x_t\| + 0.5} \\ \arctan \frac{s_2 - x_2}{s_1 - x_1} \end{pmatrix} + v_t$$

où  $s_m = (s_1, s_2)$ ,  $x_t = (x_1, x_2)$  et  $v_t$  représentent respectivement la position du capteur (connue), la position de la cible (à estimer) et le bruit gaussien dont on se propose d'estimer en ligne la matrice de covariance  $\Sigma_t$ . La matrice de covariance évolue dans le temps selon le modèle linéaire par morceaux décrit dans la figure 4. Le filtre particulaire géométrique est appliqué pour estimer conjointement en ligne la position de la cible et la matrice de covariance du bruit. Les figures 3 et 4 illustrent les bonnes performances de l'estimation de la trajectoire de la cible et du tracking de la matrice de covariance du bruit. On note bien que, malgré les fluctuations autour de la vraie valeur, la covariance estimée suit la vraie tendance temporelle des variations de la matrice de covariance du bruit. Notons aussi que cette estimation en ligne est un problème très mal posé puisque l'objectif consiste à estimer une covariance à partir d'une seule observation à chaque instant  $t$ . C'est bien la contrainte géométrique d'appartenance à la variété riemannienne des matrices de covariance qui permet de régulariser ce problème d'estimation.

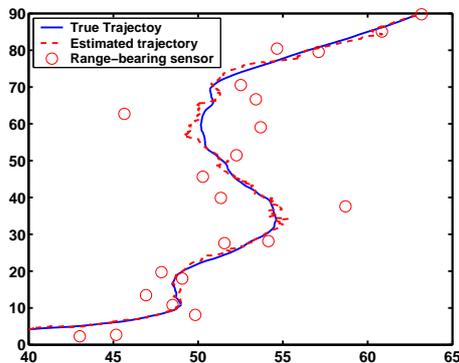


FIG. 3 – Estimation de la trajectoire d'une cible mobile

### Références

- [1] A. Doucet, S. Godsill, and C. Andrieu, "On sequential Monte Carlo sampling methods for Bayesian filtering," *Statistics and Computing*, vol. 10, no. 3, pp. 197–208, 2000.
- [2] X. Liu, A. Srivastava, and K. Gallivan, "Optimal linear representations of images for object recognition," *IEEE Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 25, no. 5, pp. 662–666, May 2004.

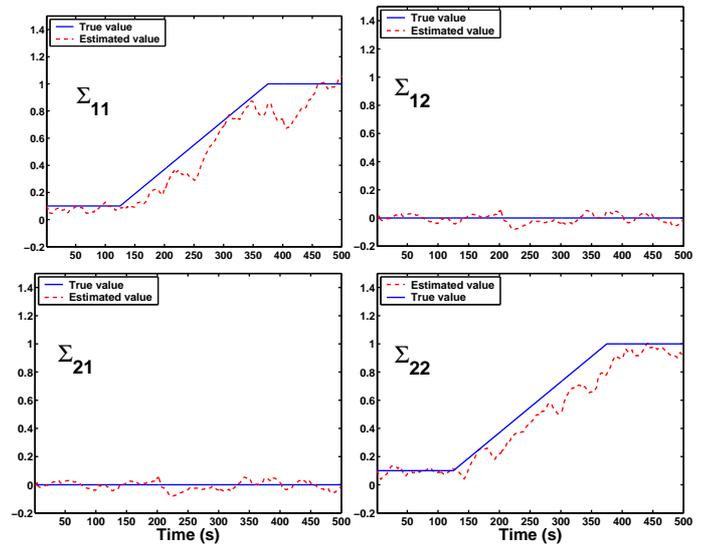


FIG. 4 – Estimation en ligne de la matrice de covariance

- [3] C. Lenglet, M. Rousson, R. Deriche, and O. Faugeras, "Statistics on the manifold of multivariate normal distributions : Theory and application to diffusion tensor MRI processing,," *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 25, pp. 423–444, October 2006.
- [4] S. Fiori, "Geodesic-based and projection-based neural blind deconvolution algorithms,," *Signal processing*, vol. 88, pp. 521–538, 2008.
- [5] Hichem Snoussi and Ali Mohammad-Djafari, "Particle Filtering on Riemannian Manifolds,," in *Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods*, Ali Mohammad-Djafari, Ed. MaxEnt Workshops, July 2006, pp. 219–226, Amer. Inst. Physics.
- [6] M. Fréchet, "Les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié,," *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1948.
- [7] H. Karcher, "Riemannian centre of mass and mollifier smoothing,," *Comm. Pure Appl. Math*, vol. 30, pp. 509–541, 1977.