

Contrainte d'isométrie restreinte statistique et localisation de sources acoustiques

Patrice SIMARD

Laboratoire Roberval
Centre de Recherches Royallieu – BP 20529 – 60205 COMPIEGNE Cedex, France
Patrice.Simard@utc.fr

Résumé – Le problème de localisation de sources acoustiques a été abordé de diverses façons, la plus populaire étant sans doute le beamforming (formation de voies). Il s'agit d'un problème inverse qui peut, dans le cas d'un nombre réduit de sources, être abordé par minimisation d'une fonction objectif pénalisée par la norme ℓ_1 de la solution cherchée. Dans ce cas, il est possible de reformuler le problème en terme d'optimisation, ce qui en fait un problème proche des techniques d'échantillonnage compressé, à ceci près que les conditions de garantie de reconstruction ne sont pas respectées dans l'absolu par la matrice de mesure. On montre ici que ces conditions sont cependant vérifiées statistiquement, sous forme en particulier d'une propriété d'isométrie restreinte statistique, ce qui permet de développer non pas une borne supérieure mais un intervalle de confiance sur l'erreur de reconstruction.

Abstract – The problem of localising acoustic sources

1 Un problème d'échantillonnage compressé :

Les nombreuses publications parues sur le thème de l'échantillonnage compressé permettent d'obtenir un éclairage nouveau sur le problème classique qu'est la localisation de sources acoustiques [7, 2, 9], en particulier lorsque l'étendue des zones réellement rayonnantes est réduite par rapport à la zone d'intérêt observée.

Une façon d'aborder ce problème est en effet de considérer qu'il s'agit d'un problème inverse, pour lequel on peut espérer trouver une solution minimisant une fonction objectif. Si on peut admettre un modèle linéaire pour les K mesures obtenues par une antenne de K microphones,

$$y = \phi\alpha + z$$

on recherchera alors un signal source α , contenant les valeurs rayonnées à la fréquence f par les N sources composant la zone d'intérêt. Un choix judicieux de fonction objectif utilisera par exemple comme terme de régularisation la norme ℓ_1 du vecteur recherché, ce qui conduira à des solutions parcimonieuses [5] :

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha} \|y - \phi\alpha\|_{\ell_2}^2 + \lambda \|\alpha\|_{\ell_1} \quad (1)$$

Ce type de problème peut être reformulé en un problème d'optimisation du genre Basis Pursuit Denoise [5, 3, 10] :

$$(P'_1) \quad \alpha^* = \arg \min_{\alpha} \|\alpha\|_{\ell_1} \quad \text{s.c.} \quad \|y - \phi\alpha\|_{\ell_2} \leq \epsilon \quad (2)$$

et résolu par programmation linéaire ou quadratique.

Cependant les nombreux résultats qui garantissent une reconstruction acceptable dans ce cadre exigent certaines propriétés de la matrice ϕ , en particulier une quasi orthogonalité de n'importe quel sous ensemble de s vecteurs colonnes appelée propriété d'isométrie restreinte.

La possibilité et la qualité de la reconstruction obtenue dépendent en particulier du paramètre d'isométrie restreinte pour un niveau de parcimonie donné. Ce paramètre se définit par la plus petite valeur δ_s telle que :

$$(1 - \delta_s) \|x\|_{\ell_2}^2 \leq \|M.x\|_{\ell_2}^2 \leq (1 + \delta_s) \|x\|_{\ell_2}^2 \quad (3)$$

Par ailleurs, Candes a montré [1] que l'erreur de reconstruction à un niveau de parcimonie s d'un signal quelconque était bien bornée à condition que δ_{2s} soit suffisamment petit.

En supposant valable le modèle de mesure, et pour un vecteur $x \in \mathbb{C}^m$, si $\delta_{2s} < \sqrt{2} - 1$ et si l'énergie du bruit est bornée par $\|z\|_{\ell_2} \leq \epsilon$, alors la solution x^* of (2) vérifie :

$$\|x^* - x\|_{\ell_2} \leq C_0 s^{-1/2} \|x - x_s\|_{\ell_1} + C_1 \epsilon \quad (4)$$

avec :

- x_s : meilleure approximation de x de parcimonie s
- C_0 and C_1 constantes qui peuvent être plus ou moins petites selon la valeur de δ_{2s} . La première contrôle la sensibilité à l'erreur de parcimonie, et la seconde la sensibilité au niveau de bruit.

2 Localisation de sources acoustiques :

Dans le cadre de la localisation de N sources acoustiques effectuée à partir des mesures obtenues par une antenne de K microphones (avec $K \ll N$), le problème peut tout à fait être formulé par (2), mais la matrice ϕ est entièrement dépendante de la géométrie du dispositif de mesure, et ses propriétés sont plutôt subies que choisies. En effet, considérant un champ acoustique p , pour une fréquence donnée f , la relation entre une source supposée ponctuelle localisée en \mathbf{q}_i , et un microphone de l'antenne localisé en \mathbf{r}_k fait intervenir une fonction de Green, laquelle dépend des données acoustiques du milieu, de la fréquence considérée, et de la distance entre la source et le capteur :

$$p(\mathbf{r}_k) = G(\mathbf{q}_i, \mathbf{r}_k) \cdot s(\mathbf{q}_i)$$

avec
$$G(\mathbf{q}_i, \mathbf{r}_k) = C_{ik} \cdot \frac{e^{j2\pi f |\mathbf{q}_i - \mathbf{r}_k|/c}}{4\pi |\mathbf{q}_i - \mathbf{r}_k|} \quad (5)$$

Il est donc très simple de construire une matrice de mesure ϕ à l'aide de ces propagateurs complexes entre un nombre arbitraire de sites de sources ponctuelles (monopoles) et les K mesures réalisées. Cependant, les constantes d'isométrie correspondant à cette matrice peuvent être très élevées (et même supérieures à 1). Pourtant, la résolution du problème (1), à l'aide des algorithmes proposés pour résoudre (2) donne des résultats plutôt satisfaisants, même en présence d'une source bruitée, et de mesures bruitées (figure 2).

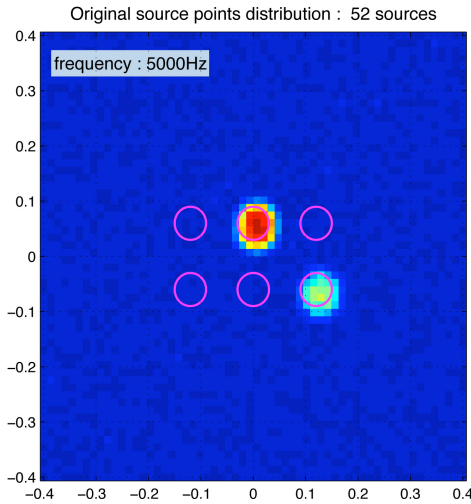


FIGURE 1 – Simulation d'une source bruitée.

3 Contrainte d'isométrie statistique :

Une analyse plus précise de la quasi isométrie de la matrice ϕ permet de comprendre les raisons de ce succès. Tout d'abord, s'il est vrai que cette matrice ne possède pas les propriétés

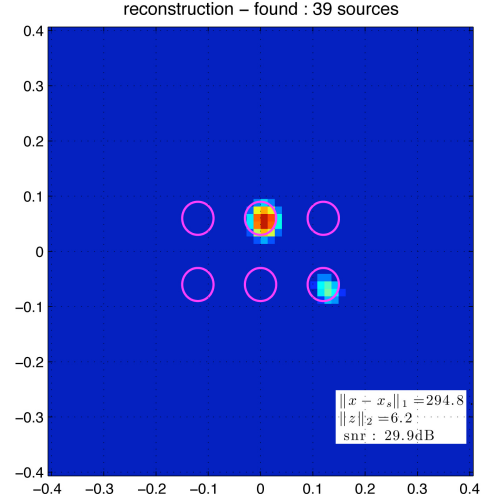


FIGURE 2 – Reconstruction d'une source bruitée à partir de mesures bruitées

d'isométrie proposées par Candes [1] ou Foucart [4], on peut toutefois s'assurer d'une propriété en probabilité du genre isométrie restreinte statistique, proche de celle proposée par Gurevitch [6] :

$$Prob \left((1 - \delta_\eta) \|\alpha\|_{\ell_2}^2 \leq \|\phi\alpha\|_{\ell_2}^2 \leq (1 + \delta_\eta) \|\alpha\|_{\ell_2}^2 \right) \geq 1 - \eta \quad (6)$$

avec η petit et $\delta_\eta < \sqrt{2}/2$. En effet, une simulation de type monte carlo permet de vérifier tout d'abord que la quantité

$$b = \frac{\|\phi\alpha\|_{\ell_2}^2}{\|\alpha\|_{\ell_2}^2} - 1$$

suit une loi presque normale pour n'importe quel tirage d'un vecteur source de parcimonie s , comme le montre la figure 3. La quantité $\tilde{\delta} = 3b$ est donc un bon candidat pour la valeur du paramètre δ_η de l'équation 6. De plus, au delà d'un niveau de parcimonie s_0 , cette quantité se stabilise asymptotiquement, en tout cas pour des valeurs de s relativement importantes (figure 4) Il est possible de se servir de ces résultats pour construire un intervalle de confiance sur $\|h\|_{\ell_2}^2$ de la forme :

$$Prob \left(B_{inf} \frac{\|z\|_{\ell_2}}{\sqrt{1 + \delta_\eta}} \leq \|h\|_{\ell_2} \leq B_{sup} \frac{\|z\|_{\ell_2}}{\sqrt{1 - \delta_\eta}} \right) \geq 1 - \eta \quad (7)$$

Dans cette expression, $\|z\|_2$ est la norme du vecteur de bruit additif. Les constantes peuvent être évaluées moyennant quelques hypothèses supplémentaires sur l'erreur de reconstruction.

4 Intervalle de confiance sur l'erreur :

En admettant provisoirement que l'on puisse appliquer l'hypothèse 6 à l'erreur de reconstruction $h = x^* - x$, on obtient facilement :

$$\mathbb{P} \left(\frac{\|\phi h\|_2^2}{1 + \delta_\eta} \leq \|h\|_2^2 \leq \frac{\|\phi h\|_2^2}{1 - \delta_\eta} \right) \geq 1 - \eta \quad (8)$$

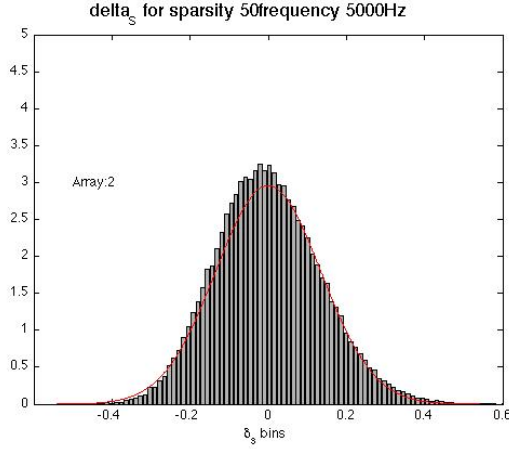


FIGURE 3 – Histogramme des valeurs b pour 10^6 tirages

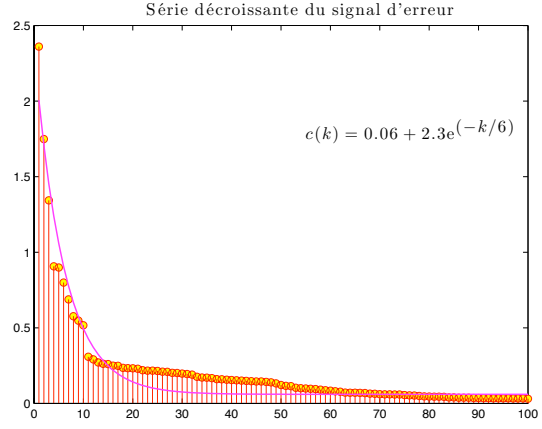


FIGURE 5 – Série en modules décroissants de l'erreur de reconstruction

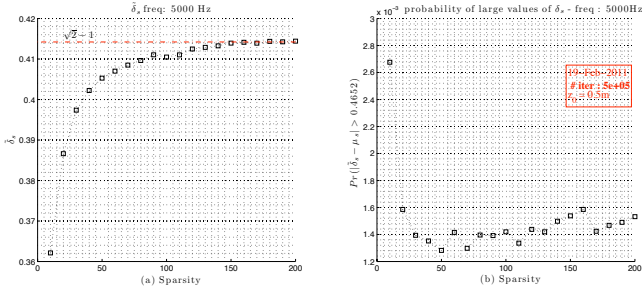


FIGURE 4 – Comportement asymptotique de $\tilde{\delta} = 3b$

Par ailleurs [1], on peut borner $\|\phi h\|_{\ell_2}$:

$$\begin{aligned} \|\phi h\|_{\ell_2} &= \|\phi x^* - x\|_{\ell_2} \\ &= \|(\phi x^* - y) + (y - \phi x)\|_{\ell_2} \\ &\leq \|\phi x^* - y\|_{\ell_2} + \|(y - \phi x)\|_{\ell_2} \leq 2\epsilon \end{aligned} \quad (9)$$

On en déduit alors :

$$\mathbb{P}\left(\|h\|_2 \leq \frac{2\epsilon}{\sqrt{1-\delta_\eta}}\right) \geq 1 - \eta \quad (10)$$

Mais on peut déjà remarquer à ce stade que, si l'inégalité (9) ne dit rien sur une borne inférieure, les algorithmes de résolution vont de fait en trouver une qui ne sera jamais inférieure au ϵ initial :

$$\mathbb{P}\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{1+\delta_\eta}} \leq \|h\|_2 \leq \frac{2\epsilon}{\sqrt{1-\delta_\eta}}\right) \geq 1 - \eta \quad (11)$$

Le problème à ce stade est que l'hypothèse (6) s'applique à des signaux suffisamment parcimonieux, et que h n'a pas de raison particulière de l'être.

5 Utilisation de la parcimonie de l'erreur

Si $h = x^* - x$ n'est pas strictement parcimonieux, il est en revanche raisonnable de considérer une décroissance exponentielle (figure (5)) de ses valeurs si on les range par ordre décroissant (en module). Soit $\check{h}(k)$ la série obtenue par ce classement, on peut supposer :

$$|\check{h}(k)|^2 = c e^{-k/k_0}$$

L'essentiel de l'énergie de h sera apportée par les P premiers coefficients de \check{h} . Si on définit la série h_P comme la série h limitée à ses P plus grosses valeurs, h_P est de fait P -parcimonieux, et on aura par ailleurs :

$$\|h_P\|_2^2 = \sum_{n=0}^L |h_P(n)|^2 = \sum_{k=0}^{P-1} |\check{h}(k)|^2 = c \frac{1 - e^{-P/k_0}}{1 - e^{-1/k_0}} \quad (12)$$

L'évaluation de la constante c à partir de $\|h_m\| = \|h\|$ conduit à :

$$\|h_P\|_2^2 = \|h\|_2^2 \left(\frac{1 - e^{-P/k_0}}{1 - e^{-m/k_0}} \right)$$

En évaluant par ailleurs $\|\phi h_P\| \simeq \alpha_P \|\phi h\|$, pour une valeur de α_P qui n'est, expérimentalement pas très grande, (bornée par 1.4 dans notre application), ces résultats et hypothèses combinés avec (6) permettent de suggérer l'intervalle de confiance suivant :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\alpha'_P \frac{\epsilon}{\sqrt{1+\delta_\eta}} \sqrt{\frac{1 - e^{-P/k_0}}{1 - e^{-m/k_0}}} \leq \|h\|_2 \right. \\ \left. \leq \alpha''_P \frac{2\epsilon}{\sqrt{1-\delta_\eta}} \sqrt{\frac{1 - e^{-P/k_0}}{1 - e^{-m/k_0}}}\right) \geq 1 - \eta \end{aligned} \quad (13)$$

En réalité les termes exponentiels sont rapidement voisins de 1 et peuvent être négligés.

6 Confirmation expérimentale :

A partir d'une matrice aléatoire 20×400 , nous avons procédé à des tirages de vecteurs aléatoires de parcimonie $s = 3$ pour un bruit additif de puissance croissante. Pour cette valeur de s le paramètre δ_η a été évalué à partir d'essais équivalents à ceux de la figure (3). Le problème est résolu avec les routines de la toolbox matlab *l1magic* [8]. A chaque tirage, on note à la fois $\|x^* - x\|_2$ et $\epsilon = \|z\|_2$. Les résultats sont portés sur la figure (6). On observe que le comportement statistique du nuage de points est raisonnablement conforme aux prévisions ; La quantité de valeurs de $\|h\|_2$ dépassant le seuil est compris entre 0 et 10% selon les intervalles de ϵ considérés, et on observe également que le seuil inférieur est bien confirmé.

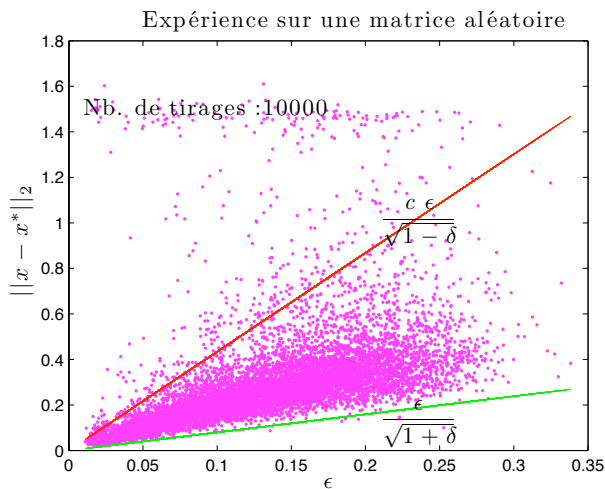


FIGURE 6 – Vérification expérimentale de l'intervalle de confiance ($c = 2.8$)

7 Conclusions

Les techniques d'optimisation disponibles permettent d'aborder de façon efficace des problèmes inverses comme celui de la localisation de sources acoustiques. Le contexte de l'échantillonnage compressé, qui semble s'imposer naturellement (localiser un petit nombre de sources actives parmi un grand nombre de possibilités en disposant de quelques capteurs), ne garantit pas les résultats parce que les caractéristiques d'isométrie de la matrice de mesure ne sont pas facilement connues. Mais il est donc possible en pratique de garantir statistiquement des résultats dès qu'on peut s'assurer d'une isométrie statistique.

Les résultats de localisation obtenus tant en simulation que sur des données expérimentales viennent conforter ces résultats et montrent effectivement que ces techniques d'optimisation permettent d'obtenir des résultats nettement supérieurs à ceux fournis par le beamforming, même dans son approximation de champ proche [9].

Références

- [1] E.J. Candes. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, série Mathématique*, 346(9-10) :589–592, May 2008.
- [2] Gilles Chardon, Antoine Peillot, Laurent Daudet, and François Ollivier. Le 'compressed sensing' pour l'holographie acoustique de champ proche - i : Aspects algorithmiques et simulations. *10ème Congrès Français d'Acoustique, Lyon : France*, 2010.
- [3] S S Chen, D L Donoho, and M A Saunders. Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM Review*, 43(1) :129–159, 2001. Published electronically February 2, 2001. This paper originally appeared in *SIAM Journal on Scientific Computing*, Volume 20, Number 1, 1998, pages 33–61.
- [4] Simon Foucart. A note on guaranteed sparse recovery via ℓ_1 -minimization. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 29(1) :97 – 103, 2010.
- [5] J.J. Fuchs. Une approche à l'estimation et l'identification simultanées. In *16ème GRETSI, Grenoble*, volume 2, pages 1273–1276, sept 1997.
- [6] Shamgar Gurevich and Ronny Hadani. Incoherent dictionaries and the statistical restricted isometry property. *Computing Research Repository*, abs/0809.1687, 2008.
- [7] Dmitry M. Malioutov, M. Müjdat Cetin, and Alan S. Willsky. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 53(8) :3010 – 3022, august 2005.
- [8] Justin Romberg. ℓ_1 -magic toolbox. <http://www.acm.caltech.edu/l1magic/>.
- [9] Patrice Simard and Jerome Antoni. Acoustic sources location : experimenting the ℓ_1 minimisation approach. *submitted*, 2011.
- [10] E. van den Berg and M. P. Friedlander. Probing the pareto frontier for basis pursuit solutions. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 31(2) :890–912, 2008.