

# Estimation rapide de la probabilité d'erreur pour les systèmes de communications numériques\*

Jia DONG<sup>1</sup>, Samir SAOUDI<sup>2</sup>, Mohamed ET-TOLBA<sup>3</sup>,

<sup>1</sup>Institut Télécom / Télécom Bretagne / LabSticc / UeB  
Technopôle Brest-Iroise CS 83818 - 29 238 Brest cedex 3, France

<sup>2</sup>INPT, 2, av ALLal EL Fassi - Madinat AL Irfane, Rabat, Maroc  
jia.dong@telecom-bretagne.eu, samir.saoudi@telecom-bretagne.eu  
ettolba@inpt.ac.ma

**Résumé** – Pour les systèmes de communications numérique, il est difficile en général de trouver l'expression analytique du Taux d'Erreur Binaire (TEB). Dans ce cas, on utilise la méthode de Monté Carlo pour compter les erreurs. Ceci exige, à fort rapport signal à bruit, un nombre important d'échantillons afin d'avoir un estimateur efficace du TEB. Dans ce papier, nous proposons d'estimer la densité de probabilité, de façon non paramétrique, de l'observation soft en sortie du récepteur. Cette densité est estimée en utilisant la méthode du noyau. Le critère du maximum de vraisemblance est utilisé pour calculer le paramètre de lissage optimal de la méthode du noyau. La probabilité d'erreur est ensuite estimée à partir du paramètre de lissage et de l'ensemble des observations soft. Quelques résultats concernant la convergence de l'estimateur seront donnés ainsi que quelques simulations de performances dans le cadre du turbo code de l'UMTS ainsi que dans le cadre d'un système CDMA.

**Abstract** – This paper addresses the problem of unsupervised BER estimation for communication systems where no prior information about transmitted bits is available at the receiver. We introduce a new technique using kernel pdf estimation together with maximum likelihood-based smoothing parameter computation. Performance is evaluated in the case of CDMA and turbo codes. We show that the new technique provides good BER estimates even in the region of high SNR while it requires a few number of observations.

## 1 Introduction

Nous avons suggéré dans une publication récente ([1]) une nouvelle méthode d'estimation de la probabilité d'erreur ( $P_e$ ) pour un système de communication numérique au lieu d'utiliser la méthode classique de Monté Carlo (MC). Cette méthode est basée sur l'estimation de la fonction de densité de probabilité (fdp) de l'observation souple en sortie du récepteur. La méthode du noyau est utilisée pour l'estimation de la fdp. Dans ([1]), le paramètre de lissage a été calculé selon le critère de la minimisation de l'Erreur Quadratique Moyenne Intégrée (EQMI). Une version non supervisée de cette méthode est donnée dans ([2]). Dans ([3]), nous avons suggéré de modéliser la fdp par un mélange de Gaussiens. Le nombre de composantes est calculé en faisant appel à la théorie de l'information mutuelle. L'algorithme EM a été utilisé pour estimer l'ensemble des paramètres du mélange. Dans les deux cas, méthode du noyau ou mélange de gaussiens, le TEB est donné par une expression simple en fonction de l'ensemble des observations soft et des différents paramètres estimés pour le modèle de la fdp retenu.

Dans ([1]), nous avons montré toute la difficulté, pour

la méthode du noyau, à calculer le paramètre de lissage optimal selon le critère de l'EQMI. Un paramètre sous-optimal a été calculé en supposant que les observations sont gaussiennes. Dans ce papier, nous utilisons le critère du Maximum de Vraisemblance pour calculer de façon précise le paramètre de lissage. La formulation mathématique sera donnée dans ce papier. Quelques performances seront analysées dans le cadre du turbo Code de l'UMTS (rendement 1/3), ainsi que dans le cadre d'un système CDMA.

## 2 Méthode du noyau

Nous allons donner dans ce paragraphe une brève description de la méthode du noyau et de son utilisation pour l'estimation de la probabilité d'erreur. Le lecteur pourra trouver une description complète dans ([1, 4]). Soit  $f_X(x)$ , la fdp des observations en sortie du récepteur.  $f_X(x)$  est un mélange de deux fdp conditionnelle qu'on peut écrire :

---

\*Ce travail est financé à 50% par le Pracom (Pôle de Recherche Avancée en Communications) et à 50% par la région de Bretagne.

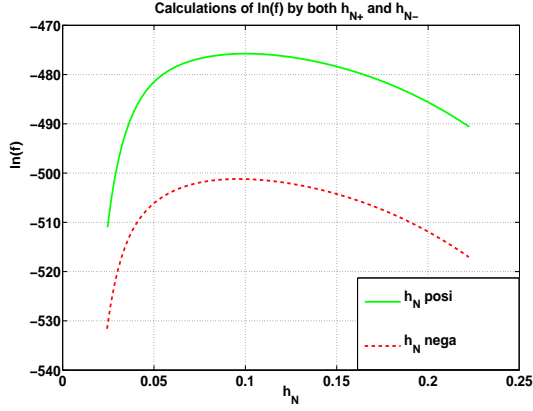


FIG. 1 - Les courbes de  $\ln\left(\prod_{i=1}^{N_+} \hat{f}_{X,N_+}^{b_+}(X_i)\right)$  et  $\ln\left(\prod_{i=1}^{N_-} \hat{f}_{X,N_-}^{b_-}(X_i)\right)$  en fonction de  $h_N$ .

$$f_X(x) = \pi_+ f_X^{b_+}(x) + \pi_- f_X^{b_-}(x) \quad (1)$$

où  $f_X^{b_+}(\cdot)$  (resp.  $f_X^{b_-}(\cdot)$ ) est la fdp conditionnelle de l'observation soft  $X$  sachant  $b_i = +1$  (resp.  $b_i = -1$ ),  $\pi_+ = P[b_i = +1]$  et  $\pi_- = P[b_i = -1]$ , avec  $\pi_+ + \pi_- = 1$ . Nous supposons que nous connaissons parfaitement la partition des observations  $\{(X_i)_{1 \leq i \leq N}\}$  en deux classes  $\mathcal{C}_+$  et  $\mathcal{C}_-$  qui contiennent respectivement les observations soft  $X_i$  correspondant à la transmission du bit d'information  $b_i = +1$  (resp.  $b_i = -1$ ). Soit  $N_+$  (resp.  $N_-$ ) le cardinal de  $\mathcal{C}_+$  (resp.  $\mathcal{C}_-$ ). La méthode du noyau ([5, 6]) est utilisée pour estimer les deux fdp conditionnelle par :

$$\hat{f}_{X,N_+}^{b_+}(x) = \frac{1}{N_+ h_{N_+}} \sum_{X_i \in \mathcal{C}_+} K\left(\frac{x - X_i}{h_{N_+}}\right) \quad (2)$$

où  $h_{N_+}$  est le paramètre de lissage qui dépend de la taille de l'observation,  $N_+$ .  $K(\cdot)$  est une fdp quelconque (appelée le noyau). Le lecteur pourra retrouver très facilement les équations correspondants à  $\hat{f}_{X,N_-}^{b_-}$ . Le choix de  $h_{N_+}$  est très important. Le calcul de  $h_{N_+}$  optimal dans le sens de la minimisation de l'EQMI n'est pas simple (voir [1, 3]). Dans le cas d'une distribution Gaussienne et un noyau Gaussien, le pas sous-optimal est donnée par :

$$h_{N_+}^* = \left(\frac{4}{3N_+}\right)^{\frac{1}{5}} \sigma_+ \quad (3)$$

où  $\sigma_+^2$  représente la variance de  $\mathcal{C}_+$ . Dans ce papier, nous proposons une solution différente pour déduire le paramètre de lissage  $h_{N_+}$  (resp.  $h_{N_-}$ ) utilisant la méthode du maximum de vraisemblance (Maximum Likelihood (ML) criterion). Etant donné que toutes les sorties reçues sont indépendantes, on pourra maximiser (Fig.1) la fonction  $\ln\left(\prod_{i=1}^{N_+} \hat{f}_{X,N_+}^{b_+}(X_i)\right)$  (resp.  $\ln\left(\prod_{i=1}^{N_-} \hat{f}_{X,N_-}^{b_-}(X_i)\right)$ ) par rapport à  $h_{N_+}$  (resp.  $h_{N_-}$ ). C'est-à-dire qu'il suffit de trouver une valeur de  $h_{N_+}$  (resp.  $h_{N_-}$ ) qui annule la dérivée de

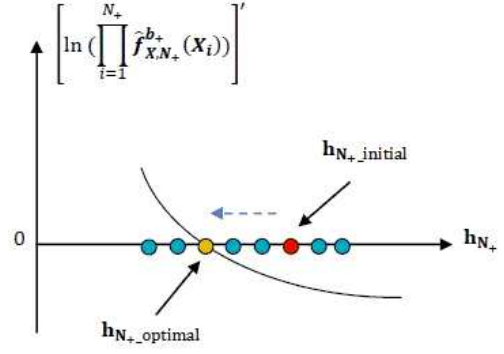


FIG. 2 -  $[\ln\left(\prod_{i=1}^{N_+} \hat{f}_{X,N_+}^{b_+}(X_i)\right)]'$  en fonction de  $h_{N_+}$ .

la fonction considérée  $[\ln\left(\prod_{i=1}^{N_+} \hat{f}_{X,N_+}^{b_+}(X_i)\right)]'$  (resp.  $[\ln\left(\prod_{i=1}^{N_-} \hat{f}_{X,N_-}^{b_-}(X_i)\right)]'$ ). La fonction  $[\ln\left(\prod_{i=1}^{N_+} \hat{f}_{X,N_+}^{b_+}(X_i)\right)]'$  (resp.  $[\ln\left(\prod_{i=1}^{N_-} \hat{f}_{X,N_-}^{b_-}(X_i)\right)]'$ ) peut être exprimée ([7]) comme :

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{N_+} \hat{f}_{X,N_+}^{b_+}(X_i)\right) = \sum_{i=1}^{N_+} \ln\left(\frac{1}{N_+ h_{N_+}} \sum_{j=1, j \neq i}^{N_+} K\left(\frac{X_i - X_j}{h_{N_+}}\right)\right) \quad (4)$$

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{N_-} \hat{f}_{X,N_-}^{b_-}(X_i)\right) = \sum_{i=1}^{N_-} \ln\left(\frac{1}{N_- h_{N_-}} \sum_{j=1, j \neq i}^{N_-} K\left(\frac{X_i - X_j}{h_{N_-}}\right)\right) \quad (5)$$

La dérivée de la fonction de l'équation (4) s'exprime comme :

$$\left[\ln\left(\prod_{i=1}^{N_+} \hat{f}_{X,N_+}^{b_+}(X_i)\right)\right]' = -\frac{N_+}{h_{N_+}} - \sum_{i=1}^{N_+} \left(\frac{\sum_{j=1}^{N_+} K'\left(\frac{X_i - X_j}{h_{N_+}}\right) \left(\frac{X_i - X_j}{h_{N_+}^2}\right)}{K(0) + \sum_{j=1, j \neq i}^{N_+} K\left(\frac{X_i - X_j}{h_{N_+}}\right)}\right) \quad (6)$$

Le pas  $h_{N_+}^*$  (resp.  $h_{N_-}^*$ ) peut être utilisé comme une valeur initiale. On propose ici un algorithme itératif pour calculer la valeur optimale de  $h_{N_+}$  (resp.  $h_{N_-}$ ).

On a ensuite simulé sous MATLAB la relation entre la dérivée de la fonction de vraisemblance  $[\ln\left(\prod_{i=1}^{N_+} \hat{f}_{X,N_+}^{b_+}(X_i)\right)]'$  (resp.  $[\ln\left(\prod_{i=1}^{N_-} \hat{f}_{X,N_-}^{b_-}(X_i)\right)]'$ ) par rapport à  $h_{N_+}$  et le paramètre  $h_{N_+}$  (resp.  $h_{N_-}$ ). Le résultat est illustré dans la figure. 2. On constate qu'on obtient toujours une fonction décroissante. En conséquence, le point d'intersection (le point en jaune dans la Fig. 2) entre la courbe de la fonction  $[\ln\left(\prod_{i=1}^{N_+} \hat{f}_{X,N_+}^{b_+}(X_i)\right)]'$  (resp.  $[\ln\left(\prod_{i=1}^{N_-} \hat{f}_{X,N_-}^{b_-}(X_i)\right)]'$ ) et l'axe des abscisses est unique, la valeur correspondante peut être considérée comme la valeur optimale. Avec un nombre d'échantillons suffisant, on peut facilement estimer l'expression mathématique de la fonction  $[\ln\left(\prod_{i=1}^{N_+} \hat{f}_{X,N_+}^{b_+}(X_i)\right)]'$  (resp.  $[\ln\left(\prod_{i=1}^{N_-} \hat{f}_{X,N_-}^{b_-}(X_i)\right)]'$ ) afin de trouver le point d'intersection pour calculer le paramètre optimal  $h_{N_+}$  (resp.  $h_{N_-}$ ).

L'inconvénient principale de cette solution est que le degré de précision de l'estimation de BER dépend de la méthode utilisée pour estimer l'expression mathématique

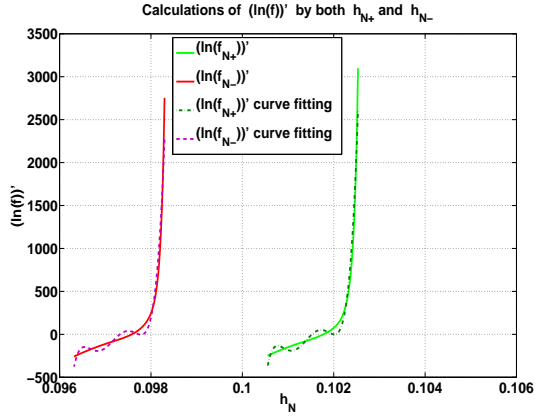


FIG. 3 – L’ajustement de courbe de  $[\ln(\prod_{i=1}^{N_+} \hat{f}_{X,N_+}^{b_+}(X_i))]'$  et  $[\ln(\prod_{i=1}^{N_-} \hat{f}_{X,N_-}^{b_-}(X_i))]'$

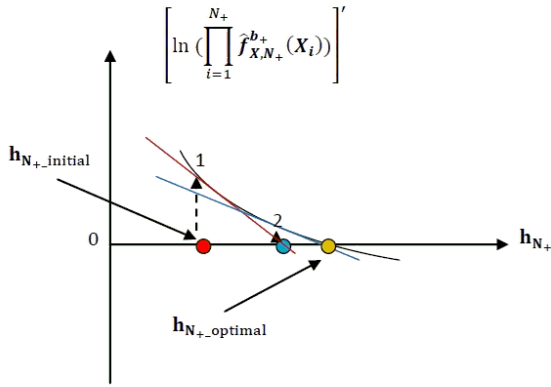


FIG. 4 – Illustration de la méthode de Newton.

des dérivés des deux fonctions de vraisemblance. Par exemple, pour augmenter le degré de précision des fonctions  $[\ln(\prod_{i=1}^{N_+} \hat{f}_{X,N_+}^{b_+}(X_i))]'$ , on peut utiliser la méthode polynomiale (voir Fig.3) avec un grand ordre, mais ceci augmente aussi le nombre des échantillons et ainsi la complexité de l’algorithme.

La méthode polynomiale (curve fitting) peut être améliorée de façon suivante : on met en oeuvre la méthode de Newton pour trouver le point d’intersection entre la courbe et l’axe des abscisses. La Fig.4 représente le principe de cette méthode. Avec la valeur initiale  $h_{N_+}^*$  (resp.  $h_{N_-}^*$ ), on calcule la valeur correspondante de  $[\ln(\prod_{i=1}^{N_+} \hat{f}_{X,N_+}^{b_+}(X_i))]'$ . Ensuite on trace la tangente (ligne en rouge), on obtient le premier point d’intersection avec l’axe des abscisses (point en bleu). En répétant cette procédure, on peut trouver le deuxième point d’intersection (point en jaune) qui est certainement plus proche de la valeur optimale de  $h_{N_+}$ .

Après plusieurs itérations, on peut trouver une valeur

très proche ([8]) de la valeur optimale. L’équation suivante donne la relation entre  $h_{N_+}$  à l’itération  $n$  en fonction de  $h_{N_+}$  à l’itération précédente :

$$h_{N_+}(n) = h_{N_+}(n-1) - \frac{f(h_{N_+}(n-1))}{f'(h_{N_+}(n-1))} \quad (7)$$

où  $f(h_{N_+}) = [\ln(\prod_{i=1}^{N_+} \hat{f}_{X,N_+}^{b_+}(X_i))]'$ .

L’avantage de cette méthode est que le nombre des itérations est beaucoup plus réduit par rapport à la première méthode et ainsi on peut diminuer la durée de calcul.

### 3 Estimation de la probabilité d’erreur

La probabilité d’erreur est donnée par :

$$p_e = \pi_+ \int_{-\infty}^0 f_X^{b_+}(x) dx + \pi_- \int_0^{+\infty} f_X^{b_-}(x) dx \quad (8)$$

Pour estimer la probabilité d’erreur, nous devons évaluer l’expression de l’équation (8). On peut montrer que dans le cas d’un noyau Gaussien, l’estimation de la probabilité d’erreur peut être donnée par l’expression suivante (voir [2]) :

$$\hat{p}_{e,N} = \frac{\pi_+}{N_+} \sum_{X_i \in \mathcal{C}_+} Q\left(\frac{X_i}{h_{N_+}^*}\right) + \frac{\pi_-}{N_-} \sum_{X_i \in \mathcal{C}_-} Q\left(-\frac{X_i}{h_{N_-}^*}\right) \quad (9)$$

où  $Q(\cdot)$  représente la fonction de répartition complémentaire Gaussienne, i.e.,  $Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-t^2/2) dt$ . On peut montrer que cet estimateur est asymptotiquement sans biais et qu’il converge en moyenne quadratique vers  $p_e$ .

### 4 Performance

Dans ce paragraphe, quelques performances des différentes méthodes sont données dans le cadre d’un système CDMA ainsi que dans le cadre d’un turbo code. Le tableau 1 représente la valeur optimale et initiale du paramètre  $h_{N_+}$  pour différents SNR dans le système CDMA. La figure 5 (en haut) montre quelques résultats de simulations dans le cas d’un système CDMA et ceci dans le cas où la fdp est modélisée par un mélange de Gaussiens ([3]). Pour chaque point 1 000 observations soft ont été utilisés. Nous avons montré que nous pouvons atteindre de très faible probabilités d’erreur ( $10^{-20}$ ), en moins de 2 secondes alors qu’en même temps, la méthode de Monté Carlo (courbe verte) n’a pu donner aucune estimation au delà de 10 dB. La figure 5 (en bas) montre les premiers résultats obtenus, avec la méthode du noyau, pour le turbo code de l’UMTS de rendement 1/3 avec une taille

trame de 500 bits d'information. La méthode proposée (courbe rouge) a nécessité 7 fois moins d'échantillons que la méthode de Monté Carlo (courbe verte). Des études de comparaisons très poussées seront menées lors des prochains mois.

TAB. 1 – La valeur optimale et initiale du paramètre  $h_{N_+}$  pour différents SNR

SNR	1	2	3	4	5	6
$h_{N_+initial}$	0.2450	0.2186	0.1866	0.1759	0.1493	0.1297
$h_{N_+optimal}$	0.2161	0.2462	0.2398	0.1872	0.1722	0.1412

## 5 Conclusions

Dans cet article, nous avons présenté une méthode d'estimation de la probabilité d'erreur basée sur les valeurs de décision soft observée à la sortie du récepteur d'un système de communication numérique. La méthode du noyau nous a permis d'estimer la densité de probabilité de ces observations. Le paramètre de lissage optimal est calculé en utilisant le critère du maximum de vraisemblance. La probabilité d'erreur est ensuite simplement déterminée à partir du paramètre de lissage et l'ensemble des observations soft obtenues à la sortie du récepteur.

## 6 Remerciement

Les auteurs tiennent à remercier Yannick SAOUTER, chercheur au laboratoire CNRS labsticc, pour les discussions autour de la référence [9].

## Références

- [1] S. Saoudi, M. Troudi, and F. Ghorbel. *An iterative soft bit error rate estimation of any digital communication systems using a nonparametric probability density function*. EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking, vol. 2009, Article ID 512192, 9 pages, 2009.
- [2] S. Saoudi, T. Ait-Idir, Y. Mochida. *A Novel Non-Parametric Iterative Soft Bit Error Rate Estimation Technique for Digital Communications Systems*. IEEE International Conference on Communications ICC 2011, IEEE, 05-09 June 2011, Kyoto, Japan, 2011.
- [3] S. Saoudi, T. Derham, T. Ait-Idir, and P. Coupe. *A Fast Soft Bit Error Rate Estimation Method*. EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking, vol. 2010, Article ID 372370, 13 pages, 2010.
- [4] S. Saoudi, F. Ghorbel and A. Hillion. *Some statistical properties of the kernel-diffeomorphism estimator*. Ap-

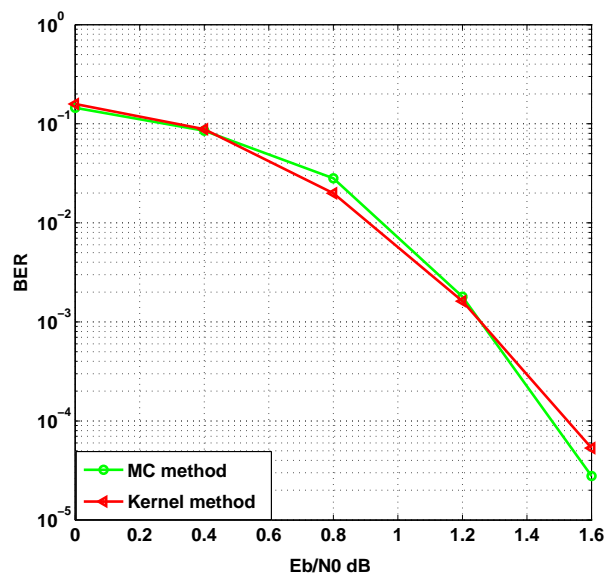
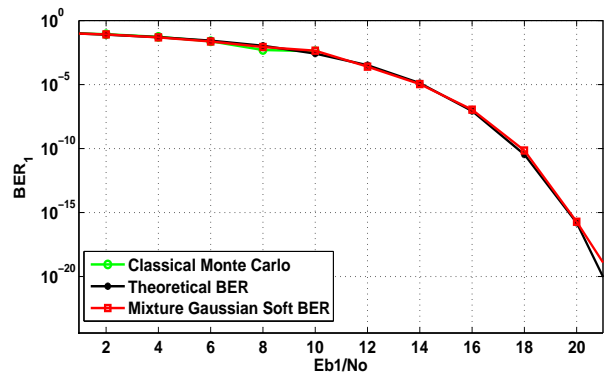


FIG. 5 – Estimation de la probabilité d'erreur pour un système CDMA (en haut) et pour un Turbo Code (en bas).

plied Stochastic Models and Data Analysis Journal, John Wiley, Vol. 13, Issue 1, pp. 39-58, March 1997.

- [5] M. Rosenblatt. *Remarks on some non-parametric estimates of a density function*. Ann. Math. Statist., Vol. 27, Issue 3, pp. 832-837, 1956.
- [6] E. Parzen. *On estimation of a probability density function and mode*. Ann. Math. Statist., Vol. 33, Issue 3, pp. 1065-1076, 1962.
- [7] Natalia Markovich. *Nonparametric Analysis of Univariate Heavy-Tailed Data*. Institute of Control Science, 2007.
- [8] C.T.Kelley. *Solving Nonlinear Equations with Newton's Method*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.
- [9] Chiwoo Park. *Kernel density estimation and its applications*. Advanced Metrology Lab, Texas AM University, 2008.