

# Modèle polynomial par morceaux muni de transitions régulières - Application à la modélisation de signaux transitoires électriques

Matthieu SANQUER<sup>1,2</sup>, Florent CHATELAIN<sup>1</sup>, Mabrouka EL-GUEDRI<sup>2</sup>, Nadine MARTIN<sup>1</sup>

<sup>1</sup>University of Grenoble, GIPSA-lab, 961 rue de la Houille Blanche, BP 46, 38402, St Martin D'Hères, France

<sup>2</sup>Electricité de France – R&D, 4 Quai Watier, 78401 Chatou, France

<sup>1</sup><nom>.<prenom>@gipsa-lab.grenoble-inp.fr <sup>2</sup><nom>.<prenom>@edf.fr

**Résumé** – Un modèle de régression par morceaux muni de transitions régulières est proposé et étudié. Un tel modèle permet de généraliser les modèles de régression par morceaux en introduisant une fonction paramétrique régulière réalisant la transition d'un segment à l'autre à proximité des ruptures. L'estimation conjointe des paramètres et du nombre de segments constitue un problème mal-posé. La régularisation de la solution est effectuée à travers un cadre bayésien hiérarchique. Les estimateurs bayésiens standard ne pouvant être obtenus analytiquement, un algorithme de type MCMC à saut réversibles est utilisé pour échantillonner la distribution *a posteriori* des paramètres. La méthodologie proposée est finalement appliquée à la modélisation de signaux réels de transitoires électro-domestiques.

**Abstract** – A smooth transition model is introduced and studied. Such a model extend piecewise regression ones by introducing smooth transition functions achieving transition from a segment to another in the neighborhood of each rupture. The joint estimation of the parameters and of the number of segment is an ill-posed problem. A regularization is performed through a hierarchical Bayesian framework. As standard Bayesian estimates can not be computed analytically, a reversible-jump MCMC algorithm is derived to sample the parameters according to their posterior distribution. This method is applied to the modeling of real-world electrical transient.

## 1 Introduction

Les modèles de régression par morceaux ont prouvé leur utilité pour la modélisation et la segmentation de signaux dans de nombreux types de problèmes [7, 2]. Ce type de modèle est pertinent dans les cas où le signal observé est modélisable par un modèle linéaire simple dont les paramètres changent abruptement en certains points inconnus. Cependant, lorsque ces changements s'effectuent de manière graduée, une régression par morceaux classique ne permet pas de représenter correctement les caractéristiques des transitions. Il s'ensuit, en général, une sur-segmentation du signal ou alors un biais important dans l'estimation de paramètres du modèle sur chacun des segments.

L'emploi de fonctions paramétriques régulières pour modéliser ces transitions est donc proposé. De tels modèles, appelés modèles de régression à transitions régulières, ont déjà été utilisés, en particulier pour la modélisation de séries financières [5], en introduisant une fonction de transition régulière  $\pi(t)$  entre deux régimes autorégressifs  $m_1(t)$  et  $m_2(t)$  tel que :

$$m(t) = [1 - \pi(t)]m_1(t) + \pi(t)m_2(t). \quad (1)$$

Le problème de la formulation et de l'estimation d'un tel modèle dans le cas plus général où le nombre de régimes est supérieur à deux est abordé par exemple dans [1] en encapsulant des modèles à deux régimes les uns dans les autres ou dans [6] en utilisant une formulation de type réseaux de neurones. Cependant, le choix du nombre de régimes à utiliser pour modéliser une séquence d'observations donnée reste une question essentielle.

Cet article est organisé de la manière suivante. Une formulation d'un modèle de régression à transitions régulières est donné dans la partie 2. Dans un cadre de travail similaire à [7, 2], nous proposons d'estimer le nombre de régimes conjointement

aux autres paramètres du modèle dans un cadre bayésien hiérarchique présenté à la partie 3. La partie 4 est dédiée à l'algorithme RJMCMC (Reversible-jump Markov Chain Monte Carlo [3]) utilisé pour simuler la distribution *a posteriori* et obtenir une estimation robuste de chaque paramètre. L'algorithme développé est ensuite utilisé pour estimer les paramètres du modèle pour des signaux transitoires réels générés par différents types d'appareils électriques domestiques en vue d'une application en surveillance de courbes de charge. Les résultats obtenus sont présentés à la partie 5. Les perspectives de ces travaux sont finalement esquissées dans la partie 6.

## 2 Modèle à transitions régulières

### 2.1 Modèle et notations

On considère que le signal observé  $x(t)$  est représenté par un modèle de régression à transitions régulières  $m(t)$  entaché par un bruit blanc gaussien  $\epsilon(t)$  centré de variance  $\sigma^2$ . Le modèle de régression à transitions régulières  $m(t)$  est défini par une séquence de  $K$  régimes, notée  $\{m_k(t)\}_{k=1,\dots,K}$  et la séquence des  $K - 1$  instants de rupture  $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{K-1}$ . Par convention on notera  $\tau_0$  (resp.  $\tau_K$ ), le début (resp. la fin) de la fenêtre temporelle d'analyse du signal. Dans ces travaux, les régimes  $m_k(t)$  sont choisis polynomiaux d'ordre  $P$  et  $\beta_k = [\beta_k^{(0)} \beta_k^{(1)} \dots \beta_k^{(P)}]^T$  est le vecteur de coefficients associés, tels que :

$$m_k(t) = \sum_{p=0}^P \beta_k^{(p)} t^p. \quad (2)$$

Notons que la démarche proposée est généralisable à tout modèle linéaire (autorégressif par exemple). Pour modéliser les

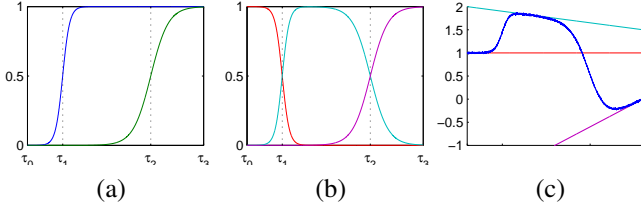


FIGURE 1 – (a) Fonctions de transition :  $\pi_1(t)$ ,  $\pi_2(t)$  - (b) Poids de chaque modèle :  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$ ,  $p_3(t)$  - (c) Régimes et signal observé :  $m_1(t)$ ,  $m_2(t)$ ,  $m_3(t)$ ,  $x(t)$

transitions régulières entre les différents régimes, des fonctions de transitions  $\pi_k(t)$  sont associées à chaque instant de rupture  $\tau_k$  pour  $0 \leq k \leq K$ . Ces fonctions sont choisies croissantes entre 0 et 1 et sont paramétrées par un vecteur de paramètres  $\eta_k$  caractérisant la durée ou la forme de la transition.

Le poids du modèle  $m_k(t)$  dans le modèle total à l'instant  $t$  est noté  $p_k(t)$  et s'exprime pour tout  $1 \leq k \leq K$  comme :

$$p_k(t) = \pi_{k-1}(t - \tau_{k-1}) - \pi_k(t - \tau_k). \quad (3)$$

Le signal observé  $x(t)$  est alors modélisé par :

$$x(t) = \sum_{k=1}^K p_k(t) m_k(t) + \epsilon(t). \quad (4)$$

Par convention  $\pi_0 = \pi_K = H$  avec  $H(t)$  la fonction échelon de Heaviside.

Le modèle se présente donc comme une somme pondérée sur l'ensemble des régimes  $\{m_k(t)\}_{k=1, \dots, K}$  où les poids  $p_k(t)$  pilotent la transition d'un régime à l'autre. Plus précisément, la fonction  $\pi_k$  génère la transition du modèle  $m_k$  au modèle  $m_{k+1}$ . La figure 1 montre un exemple de modèle de régression muni de transitions régulières sigmoïdales (Fig.1a) et de régimes polynomiaux d'ordre 1 (Fig.1c).

## 2.2 Fonctions de transition

Les fonctions de transition  $\pi_k(t)$  peuvent être choisies parmi l'ensemble des fonctions croissantes entre 0 et 1. Dans le cadre de la modélisation de signaux transitoires électriques nous avons choisi une famille de fonctions issue de la fonction de Kohlrausch [4], définie par :

$$\pi_k(t) = \begin{cases} 1 - \exp[-(\frac{t}{\lambda_k})^{\alpha_k}] & \text{Pour } t > 0 \\ 0 & \text{Pour } t < 0 \end{cases}, \quad (5)$$

où  $\lambda_k$  est un paramètre d'échelle et  $\alpha_k$  est un paramètre de forme. Cette famille de fonctions a l'avantage de pouvoir modéliser aussi bien des transitions de type exponentielles ( $\alpha = 1$ ) que des transitions de forme plus symétrique ( $\alpha = 2$ ).

## 2.3 Formulation matricielle et vraisemblance du modèle

Soit  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$  et  $\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_1, \dots, \epsilon_n]^T$  le vecteur des échantillons du signal observé et le vecteur du bruit aux instants d'échantillonnage respectivement. On note  $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \dots, \beta_K]^T$ ,  $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \dots, \tau_{K-1}]^T$  et  $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \dots, \eta_{K-1}]^T$  respectivement le vecteur des coefficients associés à chaque régime, le vecteur des instants de ruptures et le vecteur des paramètres des fonctions de transitions. Une formulation matricielle équivalente à

(4) est alors donnée par :

$$\mathbf{x} = Z_{\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad (6)$$

où  $Z_{\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}}$  est une matrice de taille  $n \times K(P+1)$  dont l'élément  $Z_{\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}}(i, j)$  pour  $j = (k-1)(P+1) + p + 1$  est :

$$Z_{\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}}(i, j) = [\pi_{k-1}(t_i - \tau_{k-1}) - \pi_k(t_i - \tau_k)] t_i^p. \quad (7)$$

Cette formulation matricielle du modèle permet de donner une expression compacte de la vraisemblance du vecteur des observations  $\mathbf{x}$ , sous l'hypothèse de bruit blanc gaussien :

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{x} - Z_{\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}} \boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{x} - Z_{\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}} \boldsymbol{\beta}) \right], \quad (8)$$

où  $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2]^T$  représente le vecteur des paramètres du modèle, soit un total de  $(4+P)K - 2$  paramètres.

L'estimation des paramètres  $\boldsymbol{\theta}$  sous la seule connaissance de  $\mathbf{x}$  est un problème mal-posé. Sans l'utilisation d'une méthode de régularisation adaptée, une solution triviale comportant autant de paramètres que d'échantillons du signal observé. Suivant une démarche similaire à [7, 2, 8], nous utilisons une approche bayésienne hiérarchique pour réaliser la régularisation du problème.

## 3 Modèle bayésien hiérarchique

Peu d'information étant disponible sur les paramètres, leurs distributions *a priori* sont choisies le plus vague possible en tenant compte de leur domaine de définition.

### 3.1 Distributions *a priori* des paramètres

Les distributions *a priori* des paramètres  $\sigma^2$  et  $\boldsymbol{\beta}$  sont choisies parmi les familles de lois conjuguées par rapport à la vraisemblance (8), soit :

$$\sigma^2 | \rho \sim \mathcal{IG}(1, \rho), \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\beta} | (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}, \sigma^2, \delta^2) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \delta^2 \sigma^2 [Z_{\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}}^T Z_{\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}}]^{-1}), \quad (10)$$

où  $\mathcal{IG}$  est la loi inverse-gamma,  $\mathcal{N}$  est la loi normale et  $\rho$  et  $\delta^2$  sont des hyperparamètres.

Les instants de ruptures  $\boldsymbol{\tau}$  sont modélisés, *a priori*, comme un processus de Poisson défini sur  $[t_0, t_n]$ . de sorte que la distribution du nombre de ruptures  $K-1$  suit une loi de Poisson :

$$f(K-1|\mu) = \frac{\mu^{K-1} e^{-\mu}}{(K-1)!}, \quad (11)$$

où  $n$  est le nombre d'échantillons, et  $\mu$  est un hyperparamètre.

Les *a priori* suivants sont également introduits pour les paramètres  $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha})$  des transitions associées à chacune des ruptures :

$$\begin{cases} \lambda_k | \omega_k \sim \mathcal{IG}(1, \omega_k) \\ \alpha_k \sim \mathcal{U}_{[0, \alpha_{\max}]} \end{cases}, \quad \forall 0 < k < K \quad (12)$$

avec  $\mathcal{U}$  la loi uniforme et  $\alpha_{\max} = 20$ , et où  $(\omega_k)_{k=1, \dots, K-1}$  sont des hyperparamètres. Finalement l'ensemble des hyperparamètres correspond au vecteur  $\boldsymbol{\Phi} = [\mu, \rho, \delta^2, (\omega_k)_{k=1, \dots, K-1}]^T$ .

### 3.2 Distribution *a priori* des hyperparamètres

Dans le cadre d'une approche bayésienne standard, des valeurs fixes sont données aux hyperparamètres. Cependant, il est également possible d'estimer les valeurs de ces hyperparamètres à partir des données dans le cadre d'une approche bayésienne hiérarchique. Cela permet d'obtenir des estimateurs plus robustes des différents paramètres [7] et renforce la démarche de choisir des distributions *a priori* vagues pour les paramètres.

Ne disposant pas d'information supplémentaire sur les valeurs probables des hyperparamètres, des distributions *a priori* non-informatives sont choisies, soit :

$$f(\mu) \propto \frac{1}{\sqrt{\mu}} \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(\mu), \quad f(\rho) \propto \frac{1}{\rho} \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(\rho),$$

$$\forall k = 1, \dots, K-1 \quad \omega_k \sim \mathcal{G}(\chi, \psi),$$

avec  $\chi = 1$ ,  $\psi = 100$  et  $\mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}$  désigne la fonction indicatrice de l'ensemble des réels positifs. Même s'il est possible d'utiliser également une loi *a priori* vague pour l'hyperparamètre  $\delta^2$ , il est préférable de lui attribuer une valeur constante dans le cadre de la modélisation de signaux réels ne suivant pas strictement le modèle proposé. En effet ce paramètre est identifiable au rapport signal à bruit entre le modèle  $Z_{\tau, \eta} \beta$  et le bruit résiduel  $\epsilon$ . Fixer  $\delta^2$  à une valeur faible permet d'empêcher les phénomènes de *surapprentissage* apparaissant lorsque un bruit de modélisation (non gaussien) est présent dans le signal.

La Fig.2 résume les relations entre paramètres et hyperparamètres du cadre hiérarchique bayésien proposé.

### 3.3 Distribution *a posteriori*

Les distribution *a priori* sur les paramètres et les hyperparamètres étant données, la densité *a posteriori* des paramètres est donnée par la loi de Bayes :

$$f(\theta, \Phi | \mathbf{x}) = \mathcal{L}(\mathbf{x} | \theta) f(\theta | \Phi) f(\Phi) \quad (13)$$

Les paramètres  $(\beta, \sigma^2, (\omega_k)_{k=1, \dots, K-1}, \mu, \rho)$  de la modélisation peuvent être intégrés analytiquement à partir de la densité jointe  $f(\theta, \Phi | \mathbf{x})$ . La distribution *a posteriori* marginalisée suivante est alors obtenue :

$$f(\tau, \eta | \mathbf{x}) \propto \frac{\Gamma(K + \frac{1}{2})}{K!} (\delta^2 + 1)^{-\frac{1}{2}(q+1)K}$$

$$\times \frac{\prod_{k=1}^{K-1} \frac{\lambda_k^{x-1}}{(\psi + \lambda_k)^{x+1}} \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(\lambda_k) \mathbb{I}_{[0, \alpha_{\max}]}(\alpha_k)}{\left( \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \frac{\delta^2}{1 + \delta^2} \mathbf{x}^T Z_{\tau, \eta} (Z_{\tau, \eta}^T Z_{\tau, \eta})^{-1} Z_{\tau, \eta}^T \mathbf{x} \right)^{\frac{q}{2}}}. \quad (14)$$

Cette densité *a posteriori* étant trop complexe pour obtenir une expression analytique des estimateurs bayésiens standards pour les paramètres des ruptures, un algorithme de type RJMCMC (Reversible-jump Markov Chain Monte Carlo [3]) est utilisé pour échantillonner cette distribution *a posteriori*.

## 4 Algorithme RJMCMC

La difficulté principale afin d'échantillonner la solution réside dans le fait que la dimension du modèle, i.e. le nombre de paramètres à simuler varie en fonction du nombre de ruptures proposé dans la configuration. L'algorithme RJMCMC permet d'ajouter à un noyau de proposition MCMC standard des mouvements permettant de modifier le nombre de ruptures présentes dans la configuration.

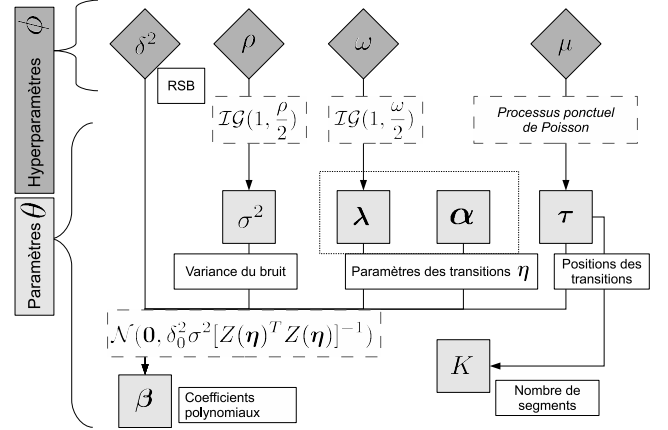


FIGURE 2 – Graphe des relations entre les paramètres

### 4.1 Mouvements de naissance/mort

Les mouvements de naissance/mort consistent à ajouter ou supprimer une rupture de la configuration courante  $(\tau^{(x)}, \eta^{(x)})$ . Ces deux mouvements sont sélectionnés aléatoirement avec la même probabilité au sein du noyau de proposition. Dans le cas de la naissance d'une rupture, la nouvelle rupture  $(\tau^{(u)}, \eta^{(u)})$  est tirée selon une loi de proposition  $Q(\tau, \eta)$ . La nouvelle configuration  $(\tau^{(y)}, \eta^{(y)})$  est alors acceptée avec la probabilité :

$$r_{naissance} = \frac{f(\tau^{(y)}, \eta^{(y)} | \mathbf{x})}{f(\tau^{(x)}, \eta^{(x)} | \mathbf{x})} \frac{1}{Q(\tau^{(u)}, \eta^{(u)}) K^{(x)}}. \quad (15)$$

Dans le cas d'un mouvement de mort, la rupture à supprimer  $(\tau^{(u)}, \eta^{(u)})$  est sélectionné uniformément dans la configuration courante  $(\tau^{(x)}, \eta^{(x)})$  et la nouvelle configuration  $(\tau^{(y)}, \eta^{(y)})$  est acceptée avec la probabilité :

$$r_{mort} = \frac{f(\tau^{(y)}, \eta^{(y)} | \mathbf{x})}{f(\tau^{(x)}, \eta^{(x)} | \mathbf{x})} (K^{(x)} - 1) Q(\tau^{(u)}, \eta^{(u)}). \quad (16)$$

### 4.2 Mouvements de mise à jour des paramètres

Les mouvements de mise à jour des paramètres des ruptures consistent à sélectionner uniformément un objet  $(\tau^{(u)}, \eta^{(u)})$  de la configuration courante  $(\tau^{(x)}, \eta^{(x)})$  et à le remplacer par un objet  $(\tau^{(v)}, \eta^{(v)})$  tiré selon la loi de proposition  $Q(\tau, \eta)$ . Le taux d'acceptation du mouvement de Metropolis-Hastings ainsi défini est alors :

$$r_{update} = \frac{f(\tau^{(y)}, \eta^{(y)} | \mathbf{x})}{f(\tau^{(x)}, \eta^{(x)} | \mathbf{x})} \frac{Q(\tau^{(u)}, \eta^{(u)})}{Q(\tau^{(v)}, \eta^{(v)})}. \quad (17)$$

### 4.3 Loi de proposition

La loi de proposition  $Q(\tau, \eta)$  permet de proposer les paramètres associés à une nouvelle rupture ou de mettre à jour les paramètres d'une rupture existante. Le choix de cette loi n'influe pas sur l'estimation des paramètres mais détermine la vitesse de convergence de l'algorithme. Pour proposer  $\tau$  une loi de proposition proportionnelle au gradient des observations  $\mathbf{x}$  est utilisée. Le paramètre de forme  $\alpha$  est proposé selon sa loi a priori (12). Enfin une heuristique locale permet d'estimer une valeur probable de  $\lambda$  connaissant  $\tau, \alpha$ . La loi de proposition de  $\lambda$  est alors une loi gamma centrée sur cette valeur estimée.

	N	$\mu_{\text{RSB}}(\text{dB})$	$\sigma_{\text{RSB}}(\text{dB})$	$\mu_K$
<b>Aspirateur</b>	18	32.85	10.52	2.8
<b>Bouilloire</b>	12	50.15	4.75	2.0
<b>LampeHalogene</b>	9	26.21	7.28	2.8
<b>MicroOndes</b>	35	25.29	3.12	3.0
<b>Refrigerateur</b>	36	27.39	4.80	3.7

TABLE 1 – Résultats de modélisation sur la base de données de signaux transitoires

## 5 Applications et résultats

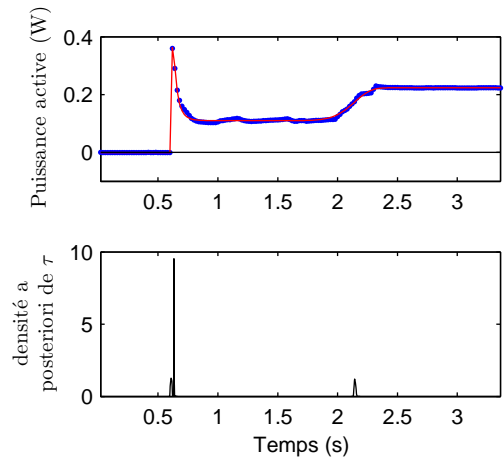
Le modèle de régression à transitions régulières proposé est utilisé pour l'analyse de signaux transitoires électriques générés par l'enclenchement d'appareils électriques sur le réseau. Ces signaux transitoires sont caractéristiques de l'appareil enclenché et sont donc susceptibles d'être utilisés pour la reconnaissance automatique d'usages électriques. Nous utilisons une base de données de signaux transitoires réels, fournie par Électricité de France (EDF).

Le signal étudié est la puissance active du signal transitoire électrique généré à l'enclenchement de l'appareil, échantillonnée à 50Hz. Pour cette application on choisit un ordre  $P = 0$  correspondant au fait qu'en régime permanent, la puissance active consommée est constante. Le rapport signal à bruit *a priori*  $\delta^2$  est fixé à 15dB. L'estimateur minimisant l'erreur quadratique moyenne de chacun des paramètres est calculé. Le rapport signal à bruit (RSB) entre le signal reconstruit à partir des paramètres estimés et le bruit résiduel est utilisé pour juger de la qualité de la reconstruction. Le tableau 1 présente la synthèse des résultats obtenus sur la base données. Sont présentés, usage par usage, le nombre de signaux disponibles  $N$ , la moyenne et l'écart-type ( $\mu_{\text{RSB}}, \sigma_{\text{RSB}}$ ) du RSB obtenu et la moyenne du nombre de ruptures estimé  $\bar{K}$ .

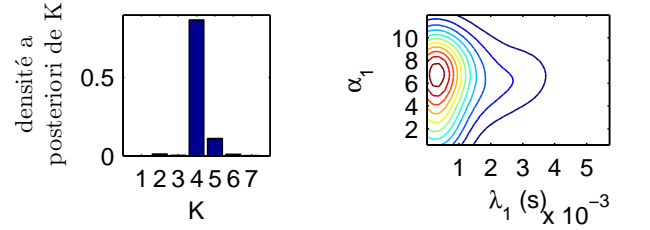
On peut constater que quelques transitions (pour les signaux les plus complexes  $K = 5$  soit 18 paramètres) suffisent à représenter avec précision la puissance active de ces signaux transitoires qui comportent initialement une centaine de points. On souligne ainsi l'intérêt du modèle proposé, qui permet de représenter de façon parcimonieuse ces familles de signaux. On peut apprécier (Fig.2) la qualité de la modélisation pour un signal d'enclenchement de lampe halogène. La Fig.2a montre le signal observé, le signal reconstruit ainsi que la distribution de la position des ruptures. La Fig.2b présente la distribution du nombre de régimes  $K$ , les Fig.2(c-d-e) montrent la distribution du couple  $(\lambda_k, \alpha_k)$  pour chaque rupture.

## 6 Conclusion

Dans cette publication, nous introduisons un modèle de régression à transitions régulières pour la modélisation de signaux transitoires électrodomestiques. L'algorithme MCMC à sauts réversible développé permet d'estimer le nombre de transitions conjointement aux autres paramètres du modèle dans un cadre bayésien hiérarchique. Les résultats montrent que ce type de modèle est efficace pour représenter de manière synthétique les signaux étudiés. L'apprentissage des paramètres du modèle estimés pour chaque classe d'appareil devrait donc permettre de classifier les différents usages lors de l'enclenchement de l'appareil.

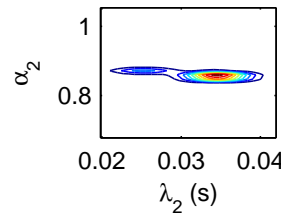


(a) haut : signal observé (bleu) - modèle (rouge)

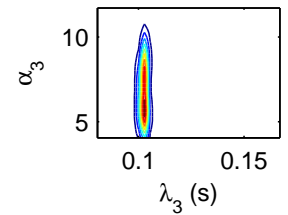


(b) distribution de K

(c) distribution de  $(\lambda_1, \alpha_1)$



(d) distribution de  $(\lambda_2, \alpha_2)$



(e) distribution de  $(\lambda_3, \alpha_3)$

FIGURE 3 – Résultats de modélisation d'un signal transitoire de lampe halogène

## Références

- [1] D. v. Dijk and P. H. Franses. Modeling multiple regimes in the business cycle. *Macroeconomic Dynamics*, 3(3) :311–340, 1999.
- [2] N. Dobigeon and J.-Y. Tournet. Joint segmentation of piecewise autoregressive processes by using a hierarchical model and a bayesian sampling approach. *IEEE Transactions On Signal Processing*, 55(4), 2007.
- [3] P. J. Green. Reversible Jump Markov chain Monte Carlo computation and Bayesian model determination. *Biometrika*, 52 :711–732, 1995.
- [4] Kohlrausch. Theorie des elektrischen rückstandes in der leidener flasche. *Pogg. Ann. Phys. Chem*, 91 :179–214, 1854.
- [5] M. Lubrano. *Non-linear Econometric Modelling*, chapter Bayesian Analysis of Nonlinear Time Series Models with a Threshold, pages 79–118. Cambridge University Press, 2000.
- [6] M. Medeiros and A. Veiga. A flexible coefficient smooth transition time series model. *Neural Networks, IEEE Transactions on*, 16(1) :97–113, 2005.
- [7] E. Punskeya, C. Andrieu, A. Doucet, and F. William. Bayesian Curve Fitting Using MCMC With Application to Signal Segmentation. *IEEE Trans. On Signal Processing*, 50(3) :747–758, 2002.
- [8] M. Sanquer, F. Chatelain, M. El Guedri, and N. Martin. Bayesian curve fitting for transient signals by using smooth transition regression models. In *CM 2010 and MFPT*, 2010.