

Analyse modale bidimensionnelle par approximation parcimonieuse et multirésolution

Souleyman SAHNOUN, El-Hadi DJERMOUNE, Charles SOUSSEN, David BRIE

CRAN, Nancy-Université, CNRS, UMR 7039
Boulevard des Aiguillettes, BP 70239, 54506 Vandoeuvre, France
Prenom.Nom@cran.uhp-nancy.fr

Résumé – Les méthodes d’approximation parcimonieuse peuvent être utilisées pour décomposer des signaux modaux bidimensionnels en termes d’éléments d’un dictionnaire redondant composé d’atomes sous forme de sinusoides bidimensionnelles amorties. Hormis les problèmes liés à l’optimisation, la difficulté majeure de ces techniques est la taille du dictionnaire permettant d’obtenir une erreur de reconstruction suffisante. Dans ce papier nous proposons une approche numériquement efficace combinant une approximation parcimonieuse et une analyse multirésolution. La méthode consiste à affiner le dictionnaire, constitué de sinusoides amorties 2-D, sur plusieurs niveaux de résolution. L’algorithme est initialisé avec un dictionnaire correspondant à une grille grossière; cette dernière est ensuite affinée de manière adaptative en fonction des colonnes actives obtenues par la méthode d’approximation parcimonieuse. L’algorithme d’analyse modale 2-D ainsi obtenu est rapide et permet d’atteindre une résolution supérieure celle de Fourier.

Abstract – Sparse approximation methods can be used to derive bidimensional signal expansions in terms of the elements of an overcomplete dictionary composed of bidimensional damped sinusoid atoms. Apart from the related optimization problems, the major difficulty with such techniques is the size of dictionary allowing one to get a sufficient reconstruction error. In this paper, we propose an efficient computational approach combining sparse approximation and multiresolution to address the 2-D modal retrieval problem. The idea behind multiresolution amounts to refine the dictionary of bidimensional damped exponentials over several levels of resolution. The algorithm starts from a coarse grid and adaptively improves the resolution as a function of the active set obtained using sparse approximation methods. The resulting 2-D modal analysis algorithm is fast and exceeds the Fourier resolution limit.

1 Introduction

L’analyse modale bidimensionnelle consiste à estimer les paramètres de sinusoides amorties bidimensionnelles. C’est un problème dont l’une des applications pratiques est la spectroscopie de la Résonance Magnétique Nucléaire bidimensionnelle (RMN 2-D).

Plusieurs travaux ont utilisé des méthodes d’approximation parcimonieuse pour traiter le problème d’estimation harmonique mono-dimensionnel (1-D), parmi lesquels nous pouvons citer, *Adaptive Weighted Norm Extrapolation* (AWNE) [1], *Basis Pursuit* [2] et *FOCUSS* [3]. A notre connaissance, seul [4] présente un exemple d’estimation parcimonieuse de données RMN 1-D en utilisant les algorithmes *Lasso*, *LARS* et *OMP*. Goodwin *et al.* [5] présentent une méthode de décomposition en sinusoides amorties de signaux 1-D en utilisant l’algorithme *Matching Pursuit*. De même, s’agissant des techniques multirésolution associées aux méthodes parcimonieuses, seuls quelques travaux ont été développés pour les signaux harmoniques 1-D [6, 7]. Dans le cas 2-D, une approche couplant une décomposition adaptative multirésolution et une estimation TLS-Prony a été proposée dans [8]. Nous

n’avons en revanche pas trouvé de travaux qui traitent le problème d’estimation modale de signaux 2-D par une approche parcimonieuse. Nous avons récemment proposé une méthode d’analyse modale par approximation parcimonieuse multirésolution [9]; l’objectif du présent article est de montrer comment cette approche peut s’étendre à l’analyse modale de signaux bidimensionnels.

Les contributions de ce papier sont les suivantes. (i) Nous utilisons les méthodes d’approximation parcimonieuse pour traiter le problème d’estimation modale de signaux 2-D. La méthode utilisée est appelée *Single Best Replacement* (SBR) [10]. (ii) Nous proposons une procédure multirésolution¹ qui améliore itérativement l’ensemble des sinusoides élémentaires amorties dans le dictionnaire. L’objectif de cette technique est d’affiner la résolution tout en gardant un coût de calcul raisonnable; ce dernier étant directement lié au nombre de colonnes du dictionnaire. Le papier est organisé comme suit. Dans le prochain paragraphe, nous présentons le problème de d’es-

1. Le qualificatif “multi-grille” semble plus approprié. Nous avons cependant opté pour “multirésolution” en référence à la résolution de Fourier en analyse spectrale. Il convient donc de ne pas confondre avec la multirésolution de l’analyse en ondelettes.

timisation modale 2-D et son lien à l'approximation parcimonieuse. Ensuite, dans le §3, nous présentons l'approche multirésolution et nous discutons de son utilité pour accélérer le calcul et pour atteindre une résolution supérieure à celle de Fourier. Dans le §4, nous montrons au travers de simulations que cet algorithme permet d'allier précision et réduction de complexité numérique, cette dernière étant un problème inhérent à toute approche parcimonieuse dans les cas où le dictionnaire est à définir sur un ensemble continu. Les conclusions sont données dans le §5.

2 Formulation du problème

Soit un vecteur d'observation $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^M$ qui doit être approché par une combinaison linéaire de vecteurs appartenant à un dictionnaire Φ tel que $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}$, où $\Phi = [\varphi_1, \dots, \varphi_N] \in \mathbb{C}^{M \times N}$ et le vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ contient les coefficients qui sélectionnent et pondèrent les colonnes φ_n . Afin d'obtenir une bonne approximation de \mathbf{y} , le dictionnaire doit contenir un grand nombre de colonnes (*i.e.* $M \ll N$). Le problème étant sous-déterminé, il y a une infinité de solutions \mathbf{x} . L'idée de l'approximation parcimonieuse consiste à imposer une autre contrainte qui va conduire à des solutions parcimonieuses (*i.e.* \mathbf{x} contient quelques éléments non-nuls). Soit la pseudo-norme ℓ_0 , $\|\cdot\|_0 : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{N}$ qui compte le nombre d'éléments non nuls de son argument. On dit qu'un vecteur \mathbf{x} a un degré de parcimonie égal à s si $\|\mathbf{x}\|_0 = s$. Dans le cas où le signal observé est bruité, le problème d'estimation du vecteur parcimonieux \mathbf{x} tel que $\Phi \mathbf{x}$ se rapproche au mieux de \mathbf{y} peut être considéré comme un problème de minimisation $\ell_2 - \ell_0$. L'approche proposée par [10] vise à résoudre le problème $\ell_2 - \ell_0$ pénalisé :

$$\arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n} \{ \mathcal{J}(\mathbf{x}, \lambda) = \|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}\|^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_0 \} \quad (1)$$

par un algorithme de type *forward/backward*, appelé SBR. Ce dernier possède des performances très intéressantes, en particulier dans le cas où les éléments du dictionnaire sont fortement corrélés, ce qui est le cas des sinusoides amorties. Le lecteur pourra consulter [10] pour une présentation plus détaillée de cet algorithme et une évaluation de ses performances. Dans cet article, nous nous intéressons au développement d'une approche d'analyse modale de signaux 2-D basée sur l'approximation parcimonieuse en exploitant l'algorithme SBR. L'objectif étant de fournir une alternative aux approches classiques (méthodes algébriques), à la fois en termes de performances et de coût de calcul, nous proposons de construire le dictionnaire de façon adaptative.

Un signal modal 2-D complexe s'écrit selon :

$$y(m_1, m_2) = \sum_{i=1}^F c_i a_i^{m_1} b_i^{m_2} + e(m_1, m_2) \quad (2)$$

pour $m_1 = 0, \dots, M_1 - 1$ et $m_2 = 0, \dots, M_2 - 1$ où les $a_i = e^{-\alpha_{a,i} + j2\pi f_{a,i}}$ sont les modes de la première dimen-

sion et les $b_i = e^{-\alpha_{b,i} + j2\pi f_{b,i}}$ sont les modes de la deuxième dimension. Les valeurs $\{\alpha_{a,i}, \alpha_{b,i}\}_{i=1}^F$ sont les facteurs d'amortissement, les $\{f_{a,i}, f_{b,i}\}_{i=1}^F$ sont les fréquences et les $\{c_i\}_{i=1}^F$ sont les amplitudes complexes; $e(m_1, m_2)$ est un bruit additif. Le problème est d'estimer l'ensemble des paramètres $\{a_i, b_i, c_i\}_{i=1}^F$ à partir de la matrice d'observations $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{M_1 \times M_2}$. En écrivant \mathbf{Y} sous forme d'un vecteur $\mathbf{y} = \text{vect}(\mathbf{Y})$, l'équation (2) admet une forme matricielle :

$$\mathbf{y} = (\mathbf{A} \odot \mathbf{B})\mathbf{c} + \mathbf{e} \quad (3)$$

où \mathbf{A} et \mathbf{B} sont des matrices de Vandermonde engendrées par les vecteurs $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_F]^T$ et $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_F]^T$ respectivement. Le vecteur $\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_F]^T$ contient les amplitudes et le symbole \odot représente le produit de Khatri-Rao. Par conséquent, le problème d'estimation modale 2-D peut être formulé comme un problème d'approximation parcimonieuse en définissant un dictionnaire qui regroupe toutes les combinaisons possibles des modes (a_i, b_i) obtenus par l'échantillonnage de α_a, α_b, f_a et f_b sur une grille. On pose :

$$\Phi^{(a)} = [\varphi_{1,1}^{(a)}, \dots, \varphi_{1,K_1}^{(a)}, \varphi_{2,1}^{(a)}, \dots, \varphi_{2,K_1}^{(a)}, \dots, \varphi_{P_1,1}^{(a)}, \dots, \varphi_{P_1,K_1}^{(a)}], \quad (4)$$

$$\Phi^{(b)} = [\varphi_{1,1}^{(b)}, \dots, \varphi_{1,K_2}^{(b)}, \varphi_{2,1}^{(b)}, \dots, \varphi_{2,K_2}^{(b)}, \dots, \varphi_{P_2,1}^{(b)}, \dots, \varphi_{P_2,K_2}^{(b)}] \quad (5)$$

où

$$\begin{aligned} \varphi_{p_1,k_1}^{(a)} &= [\varphi_{p_1,k_1}^{(a)}(0), \dots, \varphi_{p_1,k_1}^{(a)}(M_1 - 1)]^T, \\ \varphi_{p_2,k_2}^{(b)} &= [\varphi_{p_2,k_2}^{(b)}(0), \dots, \varphi_{p_2,k_2}^{(b)}(M_2 - 1)]^T, \\ \varphi_{p_1,k_1}^{(a)}(m_1) &= e^{(-\alpha_{a,p_1} + j2\pi f_{a,k_1})m_1}, \\ \varphi_{p_2,k_2}^{(b)}(m_2) &= e^{(-\alpha_{b,p_2} + j2\pi f_{b,k_2})m_2}. \end{aligned}$$

K_1 et K_2 (resp. P_1 et P_2) représentent le nombre de fréquences (resp. facteurs d'amortissement) dans les deux dimensions. On note $N_1 = P_1 K_1$, $N_2 = P_2 K_2$ et $N = N_1 N_2$ le nombre de colonnes de $\Phi^{(a)}$, $\Phi^{(b)}$ et Φ , tels que :

$$\Phi = \Phi^{(a)} \otimes \Phi^{(b)} \quad (6)$$

où \otimes est le produit de Kronecker de deux matrices. Notons que Φ peut être vu comme un dictionnaire quadri-dimensionnel puisque la grille est définie pour les deux facteurs d'amortissement et les deux fréquences.

Le problème d'estimation modale bidimensionnelle peut alors être formulé comme un problème d'approximation parcimonieuse, dans lequel nous faisons implicitement l'hypothèse que le dictionnaire inclut les vrais modes présents dans le signal. Une première approche pour garantir cela (au moins approximativement) est de définir Φ sur une grille très fine (par discrétisation des fréquences et des amortissements) qui mène à un dictionnaire de grande dimension. La principale limitation d'une telle approche réside dans l'augmentation considérable du coût de calcul. Ici, nous proposons une approche alternative qui consiste en un raffinement adaptatif du dictionnaire en partant d'un dictionnaire initialement grossier.

TABLE 1 – Algorithme SBR adaptatif.

<p>– Entrées. Un signal $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{M_1 M_2}$, Deux matrices $\Phi_0^{(a)} \in \mathbb{C}^{M_1 M_2 \times N_1}$ et $\Phi_0^{(b)} \in \mathbb{C}^{M_1 M_2 \times N_2}$, un scalaire λ et un entier L</p> <p>– Sorties. Un vecteur parcimonieux $\mathbf{x}_{L-1} \in \mathbb{C}^N$.</p>
<p>Pour l allant de 0 à $L - 1$</p> <p style="text-align: center;">$\Phi_l = \Phi_l^{(a)} \otimes \Phi_l^{(b)}$</p> <p style="text-align: center;">$\mathbf{x}_l = \text{SBR}(\Phi_l, \mathbf{y}, \lambda)$</p> <p style="text-align: center;">$\Phi_{l+1}^{(a)} = \text{ADAPT}(\Phi_l^{(a)}, \mathbf{x}_l)$</p> <p style="text-align: center;">$\Phi_{l+1}^{(b)} = \text{ADAPT}(\Phi_l^{(b)}, \mathbf{x}_l)$</p> <p>Fin Pour.</p>

3 Approche multirésolution

Comme mentionné précédemment, il est nécessaire d’avoir un dictionnaire à haute résolution afin de dépasser la résolution de Fourier. Plutôt que de définir un dictionnaire de grande dimension, nous proposons de l’affiner adaptativement par une approche multirésolution. Cela se traduit par l’algorithme esquissé sur le tableau 1 où l’étape principale est l’adaptation du dictionnaire de chacune des deux dimensions en fonction des dictionnaires et du vecteur estimé \mathbf{x} à la résolution précédente. Il y a deux procédures pour affiner le dictionnaire. La première peut être mise en œuvre par l’insertion de nouveaux atomes dans la matrice Φ au voisinage de ceux activés. Puisque le dictionnaire est le produit de Kronecker des deux dictionnaires $\Phi_l^{(a)}$ et $\Phi_l^{(b)}$, les atomes insérés dans Φ doivent permettre l’amélioration à la fois du facteur d’amortissement et de la fréquence de chacune des deux dimensions, ce qui implique l’affinement de chacun des dictionnaires $\Phi_l^{(a)}$ et $\Phi_l^{(b)}$ (fig. 1(a)). L’inconvénient de cette procédure est que le dictionnaire devient de plus en plus grand en ajoutant constamment de nouveaux atomes à chaque niveau de résolution. Pour pallier cette limitation, nous proposons une procédure alternative qui consiste à supprimer les atomes qui ne sont pas activés au niveau l et à insérer d’autres atomes au voisinage de ceux activés (fig. 1(b)). Cette dernière technique possède également un défaut. En effet, la suppression des atomes non actifs exclue plus loin la possibilité d’activer des composantes dans le voisinage des atomes déjà supprimés. Pour cette raison, les atomes du dictionnaire initial ne sont jamais supprimés. Dans ce papier, nous utilisons cette dernière approche.

4 Résultats de simulation

Nous présentons ici deux résultats de simulation. Dans la première simulation, nous comparons les méthodes SBR et OMP sur un signal non bruité, sans multirésolution, afin de montrer sur un exemple l’avantage de SBR. Dans

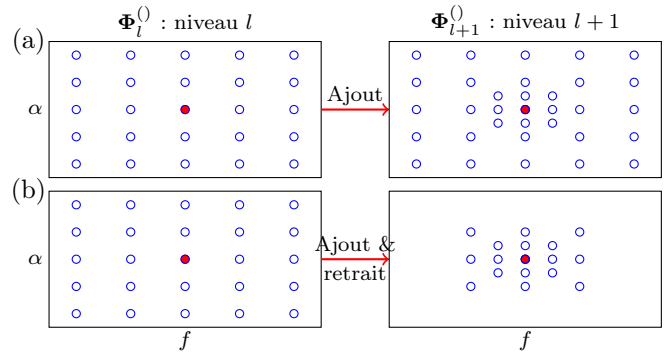
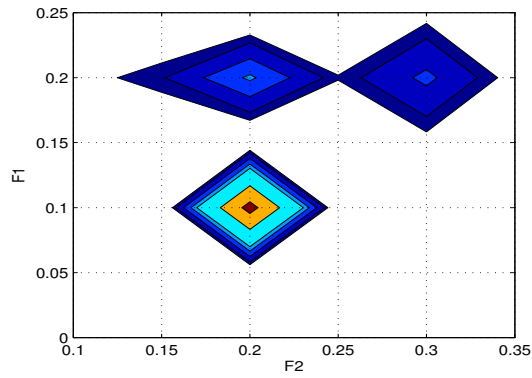


FIGURE 1 – Deux techniques multirésolution.

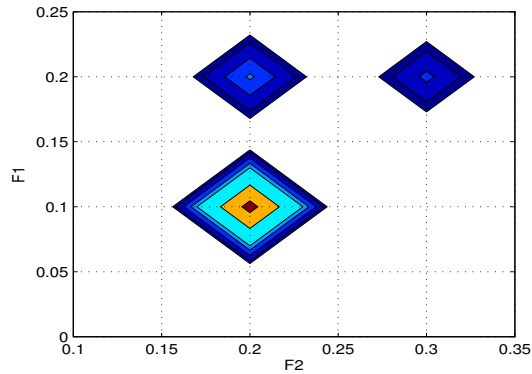
la deuxième, nous présentons les résultats obtenus en utilisant SBR couplé à l’approche multirésolution adaptative.

Dans la première simulation, on utilise un signal non bruité de dimension 20×20 qui contient trois modes ayant comme paramètres : $(f_{a,1}, \alpha_{a,1}; f_{b,1}, \alpha_{b,1}) = (0.1, 0.0; 0.2, 0.0)$, $(f_{a,2}, \alpha_{a,2}; f_{b,2}, \alpha_{b,2}) = (0.2, 0.0; 0.2, 0.15)$ et $(f_{a,3}, \alpha_{a,3}; f_{b,3}, \alpha_{b,3}) = (0.3, 0.05; 0.2, 0.05)$. Les amplitudes sont identiques pour les trois modes. On note que les modes appartiennent au dictionnaire utilisé pour la reconstruction du signal. La figure 2(a) présente le spectre du signal simulé. Le signal estimé par l’algorithme SBR est identique au signal simulé (reconstruction exacte), pour cette raison son spectre est représenté en superposition en figure 2(a). Le spectre du signal estimé par OMP est représenté sur la figure 2(b). La position des modes est bien estimée mais les amortissements obtenus sont tous nuls.

Dans le deuxième exemple, la méthode SBR couplée à l’approche multirésolution est utilisée pour estimer les paramètres d’un signal 2-D simulé de dimensions 20×20 qui contient trois modes ayant comme paramètres : $(f_{a,1}, \alpha_{a,1}; f_{b,1}, \alpha_{b,1}) = (0.1, 0.0; 0.2, 0.0)$, $(f_{a,2}, \alpha_{a,2}; f_{b,2}, \alpha_{b,2}) = (0.125, 0.0; 0.2, 0.0)$ $(f_{a,3}, \alpha_{a,3}; f_{b,3}, \alpha_{b,3}) = (0.125, 0.05; 0.3, 0.1)$. A noter que les deux premiers modes ne sont pas séparables par la transformée de Fourier 2-D. Les amplitudes sont $(c_1, c_2, c_3) = (1, 1, 3)$ et le bruit blanc additif est de variance telle que le RSB du premier mode soit de 7 dB. Le spectre du signal simulé est représenté par les courbes de niveau de la figure 3(a) où l’on vérifie que les deux premiers pics ne sont pas séparables. La méthode SBR couplée à l’approche multirésolution proposée détecte bien les trois composantes au 3^e niveau de résolution. Leurs spectres respectifs sont représentés sur la figure 3(b). Pour donner un idée sur le gain en coût de calcul, la taille du dictionnaire multirésolution au niveau 3 est 400×3136 . La taille du dictionnaire uniforme permettant d’atteindre la même résolution est 400×409600 ; le gain en terme de taille est donc de 130.



(a) Spectre du signal simulé et estimé par SBR



(b) Spectre du signal estimé par OMP

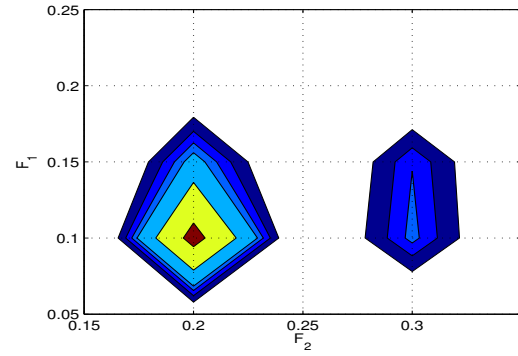
FIGURE 2 – Spectres de signaux estimés en courbes de niveau.

5 Conclusions

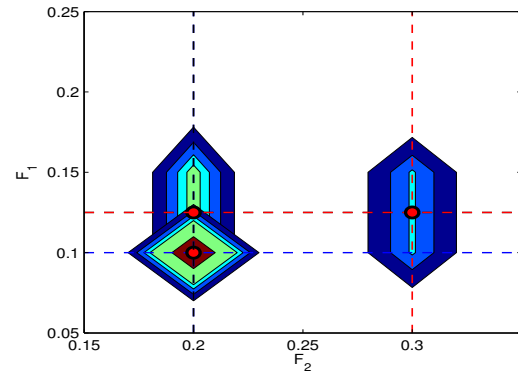
Nous avons proposé une approche d'estimation des paramètres de signaux modaux (sinusoïdes amortis/non amortis) bidimensionnels en combinant une approximation parcimonieuse et une analyse multirésolution adaptative. La méthode consiste à affiner le dictionnaire, constitué de sinusoïdes amorties bidimensionnelles, sur plusieurs niveaux de résolution. Nous avons montré par simulation que l'algorithme d'analyse modale 2-D ainsi obtenu est rapide et permet d'atteindre une résolution supérieure à celle de Fourier. Comme perspectives, nous allons étudier la convergence de l'approche proposée et ses performances par rapport aux méthodes de sous-espaces.

Références

- [1] S.D. Cabrera, T. Boonsri, and A. E. Brito. Principal component separation in sparse signal recovery for harmonic retrieval. In *SAM Workshop Proc.*, pages 249–253. IEEE, 2002.
- [2] S. S. Chen and D. L. Donoho. Application of basis pursuit in spectrum estimation. In *Proc. ICASSP*, volume 3, pages 1865–1868, 1998.
- [3] I. F. Gorodnitsky and B. D. Rao. Sparse signal reconstruction from limited data using FOCUSS : a re-weighted



(a) Spectre du signal simulé



(b) Spectre des composantes estimées

FIGURE 3 – Résultats de simulation. La position des modes bidimensionnels est représentée par un cercle.

minimum norm algorithm. *IEEE Trans. Signal Process.*, 45(3) :600–616, 1997.

- [4] D. L. Donoho and Y. Tsaig. Fast solution of ℓ_1 -norm minimization problems when the solution may be sparse. Technical report, Stanford University, 2006.
- [5] M.M. Goodwin and M. Vetterli. Matching pursuit and atomic signal models based on recursive filter banks. *IEEE Trans. Signal Process.*, 47(7) :1890–1902, 1999.
- [6] S.D. Cabrera, S. Malladi, R. Mulpuri, and A.E. Brito. Adaptive refinement in maximally sparse harmonic signal retrieval. In *Digital Signal Processing Workshop*, pages 231–235. IEEE, 2004.
- [7] D. Malioutov, M. Cetin, and A. S. Willsky. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays. *IEEE Trans. Signal Process.*, 53(8) :3010–3022, 2005.
- [8] E.-H. Djermoune, G. Kasalica, and D. Brie. Estimation of the parameters of two-dimensional NMR spectroscopy signals using an adapted subband decomposition. In *IEEE ICASSP*, Las Vegas, USA, 2008.
- [9] S. Sahnoun, E. Djermoune, C. Soussen, and D. Brie. Sparse multiresolution modal estimation. In *IEEE SSP*, France, 2011.
- [10] C. Soussen, J. Idier, D. Brie, and J. Duan. From Bernoulli-Gaussian deconvolution to sparse signal restoration. *IEEE Trans. Signal Process.*, (à paraître) 2011.