

# Régularisation de Wasserstein. Application au Transfert de Couleurs

Julien RABIN<sup>1</sup>, Gabriel PEYRÉ<sup>2</sup>

<sup>1</sup>CMLA, ENS de Cachan – 61 Avenue du Président Wilson, 94230 Cachan Cedex, France

<sup>2</sup>CEREMADE, Univ. Paris Dauphine – Place du Maréchal De Lattre De Tassigny, 75775 Paris Cedex 16, France

julien.rabin@cmla.ens-cachan.fr, gabriel.peyre@ceremade.dauphine.fr

**Résumé** – Ce papier introduit une nouvelle approche méthodologique pour la résolution de problèmes variationnels sous contraintes statistiques en grande dimension. Nous nous plaçons dans le cadre de la théorie du transport optimal de Monge-Kantorovich pour définir des termes de pénalité qui dépendent des statistiques des images. Pour s’affranchir de la complexité algorithmique liée à l’utilisation de la distance dites de « Wasserstein », nous proposons une formulation variationnelle approchée lorsque les statistiques sont exprimées sous forme de nuage de points multi-dimensionnels. Nous illustrons l’intérêt de cette approche générique par une application au problème de la régularisation du transfert de couleurs entre images. Cette tâche est accomplie en combinant, dans un formalisme variationnel unifié, un terme usuel de régularisation et d’attache aux données de l’image avec une formulation approchée du transport optimal qui est proposée dans ce papier, pour prendre en compte les contraintes statistiques de couleurs désirées.

**Abstract** – This paper introduces a novel and generic framework embedding statistical constraints for variational problems. We resort to the theory of Monge-Kantorovich optimal mass transport to define penalty terms depending on statistics from images. To cope with the computation time issue of the corresponding Wasserstein distances involved in this approach, we propose an approximate variational formulation for statistics represented as point clouds. We illustrate this framework on the problem of regularized color specification. This is achieved by combining the proposed approximate Wasserstein constraint on color statistics with a generic geometric-based regularization term in a unified variational minimization problem.

## 1 Introduction

Dans cet article, nous nous intéressons aux problèmes de minimisation sous contraintes statistiques. Nous étudions cette classe de problèmes dans le cadre de la théorie du transport optimal de masse de Monge-Kantorovich [13] pour définir une formulation variationnelle générique permettant d’intégrer des *a priori* statistiques reposant sur les distances de Wasserstein.

Ce type de problématiques se rencontre dans diverses applications du traitement d’images, telles que la synthèse de texture ou la déconvolution, où les images possèdent certaines propriétés statistiques connues *a priori*. Dans cet article, nous nous intéressons plus particulièrement au problème de la *spécification de couleurs* d’une image, où l’on cherche à modifier les statistiques de couleurs d’une image de telle sorte qu’elle possède la distribution de couleurs désirée tout en évitant l’augmentation du bruit inhérent à ce type d’approche.

**Travaux Précédents** Cette problématique de transfert a récemment fait l’objet de nombreux travaux, en particulier pour les applications liées aux changements de contraste et de couleurs des images (voir par exemple [10, 12, 6, 1, 5]). Une large majorité des approches proposées s’appuient sur des modifications basiques de l’histogramme des couleurs de l’image [10, 12, 6] telles que des applications affines ou des égalisations d’histogrammes par exemple. Il a été montré à ce sujet [7] que

ce type d’approche crée souvent de nombreux artefacts visuels indésirables (rehaussement du bruit, perte de détails, apparition de « blocs » JPEG) pour lesquels une technique de filtrage a été proposée [7] en tant que *post-traitement* afin de les éliminer.

Une alternative intéressante permettant de pallier ce type de limitations sont les approches s’appuyant sur un formalisme variationnel (par exemple [1]), où le changement de contraste et sa régularisation sont réalisés de manière *conjointe*. Dans ce type d’approche, la fonctionnelle à minimiser est composée de plusieurs termes : les termes génériques d’attache aux données et de régularité, auxquels sont associés un terme supplémentaire dédié au changement de contraste désiré. L’intérêt immédiat de ces méthodes est de permettre le contrôle de la régularité de la transformation qui impose les statistiques recherchées et la préservation de la géométrie de l’image, ce qui limite l’apparition des artefacts susnommés.

Cependant, une limitation majeure de cette méthode est l’utilisation de contraintes statistiques *multi-dimensionnelles*. En effet, les techniques précédemment citées sont restreintes à des statistiques uni-dimensionnelle (niveaux de gris). Ainsi, même si les auteurs de [5] ont récemment contourné cette difficulté pour les statistiques de couleurs par l’utilisation d’histogrammes 3D cumulés, aucune méthode générique n’a été jusqu’à présent proposée pour définir des contraintes statistiques en grande dimension.

**Plan et Contributions** Nous proposons en section 2 une nouvelle méthode générique permettant d’inclure aisément des contraintes statistiques en grande dimension dans des problèmes variationnels. Cette méthode repose sur l’utilisation de distances quadratiques dites de Wasserstein [13]. Après avoir formalisé le problème dans un cadre exact (§ 2.1), nous introduisons un formalisme approché (§ 2.2) pour lequel un algorithme de gradient proximal peut être défini pour résoudre le problème de minimisation correspondant (§ 2.3). Dans la partie expérimentale (§ 2.4) nous illustrons l’intérêt de la méthode proposée par une application au transfert régularisé de couleurs entre images.

## 2 Problème variationnel avec contrainte de Wasserstein

### 2.1 Problématique

Soit  $u : i \in \Omega \mapsto u_i = (u_R(i), u_V(i), u_B(i))^T \in \Gamma \subset \mathbb{R}^d$  une image couleur discrète ( $d = 3$ ), avec  $\Omega \subset \mathbb{Z}^2$  représentant le domaine spatial (grille de  $N$  pixels) et  $\Gamma$  l’espace couleur défini par le cube RVB. Par souci de simplicité, nous désignons par  $[u] := \{u_i\}_{i \in \Omega}$  les statistiques couleurs de l’image  $u$ , sous la forme d’un nuage de  $N = |\Omega|$  points de  $\Gamma$  (c’est-à-dire d’une distribution discrète). Nous cherchons ici à résoudre des problèmes de la forme (\*), qui combinent les termes usuels de fidélité  $F$  à l’image  $u$  et de régularité  $R$  de la solution  $w$

$$(*) \min_{w \in \mathbb{R}^{d \times N}} \left\{ \mathcal{E}(w) = F(w, u) + \lambda_R R(w) + \frac{\lambda_S}{2} W_2([w], [v])^2 \right\},$$

avec un terme supplémentaire qui mesure l’adéquation entre les statistiques de  $w$  et la contrainte donnée  $[v]$ . Ce terme dépend de  $W_2$ , désignant ici la distance quadratique de Wasserstein (voir par exemple [13]). Dans le cas discret qui nous intéresse, cette distance est équivalente au coût d’affectation optimale entre deux ensembles de points [3] qui peut s’écrire ainsi :

$$W_2([w], [v])^2 := \min_{\sigma \in \Sigma(\Omega)} \sum_{\ell \in \Omega} \|w_\ell - v_{\sigma(\ell)}\|^2 \quad (1)$$

où  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^d$ , et où  $\Sigma(\Omega)$  est l’ensemble des permutations de  $\Omega$ .

**Complexité** La solution du problème (\*) peut être calculée à l’aide d’un algorithme de descente de gradient, nécessitant le calcul de la variation de  $W_2$  par rapport à  $w$ , ce qui revient en pratique à calculer la solution de (1). Si, dans le cas de distributions 1D, la distance  $W_2$  peut être calculée de manière explicite en  $O(N \log N)$  opérations à l’aide d’algorithmes de tri rapide<sup>1</sup>, ce n’est plus le cas lorsque l’on considère des statistiques en grande dimension, nécessitant alors des algorithmes dédiés (tels que l’algorithme Hongrois ou des enchères) qui ont une complexité d’au moins  $O(N^{2.5} \log N)$  opérations (pour plus de détails, voir [3]). Ainsi, pour des applications en imagerie où  $N$  est très grand et  $d > 1$ , la résolution exacte de (\*) est en pratique *invisageable*.

### 2.2 Approximation par la distance de Wasserstein projetée

**Définition** En s’inspirant de l’approximation de la distance de Wasserstein récemment introduite dans [9] et appliquée à la reconnaissance de formes dans [8], nous définissons la *distance de Wasserstein projetée*  $SW_2$  comme la somme des coûts d’affectation 1D entre les distributions projetées sur un ensemble discret  $\Psi$  de directions sur la sphère unité  $\mathbb{S}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$  :

$$\begin{aligned} SW_2([w], [v])^2 &:= \frac{1}{|\Psi|} \sum_{\theta \in \Psi} W_2([w]_\theta, [v]_\theta)^2, \\ &= \frac{1}{|\Psi|} \sum_{\theta \in \Psi} \min_{\sigma_\theta \in \Sigma(\Omega)} \sum_{\ell \in \Omega} |\langle w_\ell - v_{\sigma_\theta(\ell)}, \theta \rangle|^2, \end{aligned} \quad (2)$$

où  $\langle \cdot, \theta \rangle$  est le produit scalaire euclidien avec la direction  $\theta$ . La distance  $SW_2$  peut ainsi être évaluée en  $O(|\Psi|N \log N)$  opérations.

**Gradient** On peut montrer<sup>2</sup> que le gradient de  $SW_2^2$  existe et s’exprime comme :

$$\frac{\partial SW_2([w], [v])^2}{\partial w_\ell} := \frac{2}{|\Psi|} \sum_{\theta \in \Psi} \langle w_\ell - v_{\sigma_\theta^*(\ell)}, \theta \rangle \theta, \quad (3)$$

$$\text{avec } \sigma_\theta^* := \sigma_{[v]_\theta} \circ \sigma_{[w]_\theta}^{-1} \quad (4)$$

où  $\sigma_\theta^*$  désigne une permutation optimale au sens de (1) de la distribution  $[w]_\theta = \{\langle u_\ell, \theta \rangle\}_{\ell \in \Omega}$  avec  $[v]_\theta = \{\langle v_\ell, \theta \rangle\}_{\ell \in \Omega}$  définie à partir des permutations  $\sigma_{[v]_\theta}$  et  $\sigma_{[w]_\theta}$  ordonnant respectivement les valeurs de  $[v]_\theta$  et  $[w]_\theta$  dans le sens croissant.

### 2.3 Algorithme pour le Transfert Régularisé de Couleurs

**Régularisation sous contraintes de Wasserstein projetées** En utilisant la distance de Wasserstein projetée précédemment introduite (2) ainsi que sa dérivée (3), nous pouvons réécrire le problème (\*) comme :

$$(*) \min_{w \in \mathbb{R}^{d \times N}} \left\{ \mathcal{E}(w) = F(w, u) + \lambda_R R(w) + \frac{\lambda_S}{2} SW_2([w], [v])^2 \right\}$$

où le terme  $W_2$  a été remplacé par  $SW_2$ , ce qui revient à approximer la contrainte statistique par une somme de contraintes statistiques projetées.

À l’instar de [5], nous considérons pour une application au transfert de couleurs les termes de fidélité  $F(\cdot, u)$  et de régularité  $R(\cdot)$  suivants :

$$\begin{cases} F(w, u) = \sum_{i \in \Omega} \left\{ \frac{\lambda_F}{2} \|w_i - u_i\|^2 - \lambda_L \langle \nabla w_i, \frac{\nabla u_i}{\|\nabla u_i\|} \rangle \right\}, \\ R(w) = \|w\|_{TV} := \sum_{i \in \Omega} \|\nabla w_i\| \end{cases},$$

1. voir la Formule (4) de permutation optimale au paragraphe suivant

2. La preuve est ici omise par manque de place.

où l'opérateur de dérivée  $\nabla$  d'une image couleur  $w \in \mathbb{R}^{3 \times N}$  est défini au pixel  $i$  comme le gradient appliqué à chaque canal :

$$\nabla w_i = \left( \nabla w_R(i)^T, \nabla w_V(i)^T, \nabla w_B(i)^T \right)^T \in \mathbb{R}^6. \quad (5)$$

Observons qu'avec un tel choix de fonctionnelles, le problème  $(\star)$  est non-convexe et surtout non lisse, ce qui empêche l'utilisation de méthodes classiques de descente de gradient. Par la suite, nous nous inspirons des récents travaux de Bredies et Lorenz sur la généralisation du gradient projeté pour les fonctionnelles non-convexes [2].

**Algorithme de gradient proximal** Pour trouver un point stationnaire de l'énergie  $(\star)$ , nous utilisons un algorithme de gradient proximal de type « Explicite-Implicite » défini comme suit. Après initialisation par  $w^{(0)} := u$ , l'image  $w^{(k+1)}$  à l'itération  $k+1$  au pixel  $i$  est obtenue après les deux étapes *Explicite* (E) et *Implicite* (I) suivantes :

$$\begin{cases} \text{(E)} & w^{(k+\frac{1}{2})} = w^{(k)} - \tau \nabla \left( F(w^{(k)}, u) + \frac{\lambda_S}{2} \text{SW}_2([w^{(k)}], [v])^2 \right) \\ \text{(I)} & w^{(k+1)} = \text{prox}_{\tau \cdot \lambda_R} \left( w^{(k+\frac{1}{2})} \right). \end{cases}$$

À l'étape (E), la dérivée du terme  $\text{SW}_2^2$  est calculée avec la Formule (3) et le gradient du terme convexe  $F$  s'exprime comme :

$$F'(w^{(k)}, u) = \lambda_F (w^{(k)} - u) + \lambda_L \text{div} \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|},$$

où l'opérateur  $\text{div}$  est la divergence appliquée au gradient<sup>3</sup> d'une image couleur (5). Selon [2], le pas de descente  $\tau$  de l'étape explicite est choisi de telle sorte que  $\tau < \tau_{\max} = (\lambda_F + \frac{\lambda_S}{2} |H_\Psi|)^{-1}$ , où  $|H_\Psi|$  désigne la plus grande valeur propre de la matrice hessienne de  $\text{SW}_2^2$ , dont on peut montrer qu'elle s'exprime comme  $H_\Psi = \frac{2}{|\Psi|} \sum_{\theta \in \Psi} \theta^* \theta$  en tout point.

**Calcul de l'opérateur proximal** L'opérateur proximal de la Variation Totale (TV) intervenant dans le schéma itératif (I) correspond au modèle de débruitage d'image ROF [11] et peut-être défini ainsi :

$$\text{prox}_{\lambda \|\cdot\|_{\text{TV}}} (w) = \underset{z \in \mathbb{R}^{d \times N}}{\text{argmin}} \frac{1}{2} \|z - w\|^2 + \lambda \|z\|_{\text{TV}} = w + \nabla^* (x^*),$$

où  $\nabla^* = -\text{div}$  est l'opérateur dual du gradient couleur  $\nabla$  et  $x^*$  est le champ de vecteur de  $\mathbb{R}^{6 \times N}$  solution du problème dual sous contrainte [4] suivant :

$$\underset{x \in \mathbb{R}^{2d \times N}, \|x\|_\infty \leq \lambda}{\text{argmin}} \|w - \text{div} x\|^2 \text{ avec } \|x\|_\infty = \max_{i \in \Omega} \|x_i\|.$$

La solution de ce problème peut être calculée par une descente de gradient projetée, avec à chaque itération  $\ell$

$$x^{(\ell+1)} = \text{Proj}_{\|\cdot\|_\infty \leq \lambda} \left\{ x^{(\ell)} + \rho \nabla (\text{div}(x^{(\ell)}) - w) \right\}, \quad (6)$$

où  $\text{Proj}_{\|\cdot\|_\infty \leq \lambda} : x_i \mapsto \frac{x_i}{\|x_i\|} \min(\|x_i\|, \lambda)$ , le paramètre de descente vérifiant  $\rho \leq \frac{2}{\|\text{div} \circ \nabla\|} = \frac{1}{12}$  pour assurer la convergence.

3. Rappelons ici que  $u$  désigne l'image originale, et par conséquent, est un terme constant de notre énergie.

## 2.4 Application au Transfert de Couleurs Régularisé entre Images

La figure 1 montre un exemple de transfert de couleurs mettant en œuvre le schéma itératif donné en (2.3). Les paramètres utilisés pour la Figure 1(d) sont les suivants : pas de descente  $\tau = \tau_{\max}/2$ , nombre de directions pour la distance de Wasserstein projetée  $|\Psi| = 10$ , et les poids  $\lambda_F = 0.1$ ,  $\lambda_R = \lambda_L = 0.5$  et  $\lambda_S = 1$ . Les orientations  $\Psi$  sont tirées aléatoirement, uniformément sur  $\mathbb{S}^2$ .

Afin d'illustrer l'intérêt de notre approche qui permet la régularisation du transfert, nous donnons en Figure 1(c) le résultat de l'approche sans régularisation (c'est-à-dire avec  $\lambda_F = \lambda_R = \lambda_L = 0$ ), ce qui correspond à une égalisation d'histogramme des couleurs qui se traduit par une augmentation du bruit. À titre de comparaison, le transfert de couleurs obtenu avec la méthode [5] est donné en Figure 1(e). Le résultat est relativement similaire à notre technique, avec toutefois quelques artefacts supplémentaires, en partie liés à la quantification des nuages couleurs par des histogrammes.

Un autre exemple d'application pour le changement régularisé de contraste est donné en Figure 2. Une manière classique de rehausser le contraste de l'image  $u$  (Fig 2(a)) tout en préservant ses couleurs est de modifier seulement la luminosité des pixels en "égalisant" le canal 'V' de la représentation HSV, de manière à obtenir une distribution en intensité uniforme. On obtient ainsi l'image  $v$  donnée en Fig. 2(b), où apparaît de nombreux artefacts. Pour prévenir leur apparition, nous utilisons notre formalisme où les statistiques couleurs désirées sont celles définies par  $[v]$ . Différents résultats de régularisation sous contrainte d'égalisation sont ainsi montrés en Figures 2(c), 2(d), et 2(e) avec respectivement  $\lambda_R = 0.5, 2, 10$  (les autres paramètres étant par ailleurs fixés avec les mêmes valeurs que pour le transfert de couleurs), illustrant la disparition progressive des artefacts liés au bruit, aux blocs de compression JPEG ainsi qu'au changement de proportion de couleurs dû à l'égalisation.

## 3 Conclusion

Nous avons présenté une approche générique de régularisation sous contraintes statistiques s'appuyant sur une formulation variationnelle originale où, en plus des termes classiques de régularité et d'attache aux données, s'ajoute un terme supplémentaire de contrainte statistique exprimé en fonction de la distance de Wasserstein. Nous avons également proposé une approximation de ce formalisme en vue de son application à des problèmes d'imagerie en grande dimension. Quelques exemples d'application au transfert de couleurs et au changement de contraste ont permis de démontrer la validité de l'approche proposée.

Plusieurs extensions de ces travaux sont explorées afin d'améliorer les résultats obtenus pour le transfert de couleur, comme l'utilisation d'espaces couleur et de mesures de coût de transport plus adaptés. D'autres problèmes en imagerie pouvant bénéficier

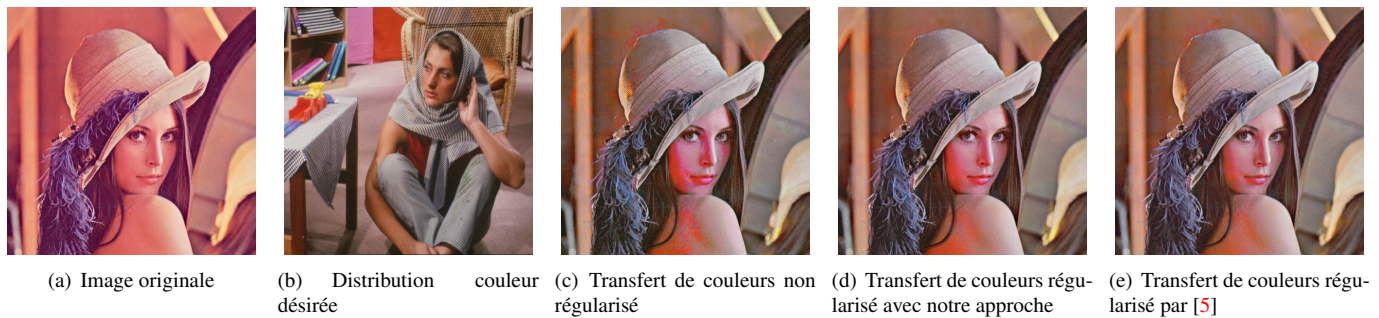


FIGURE 1 – **Illustration du transfert de couleurs régularisé avec notre approche variationnelle sous contrainte statistique** (pour une bonne visualisation, nous prions le lecteur d’afficher les figures de cette page en plein-écran)

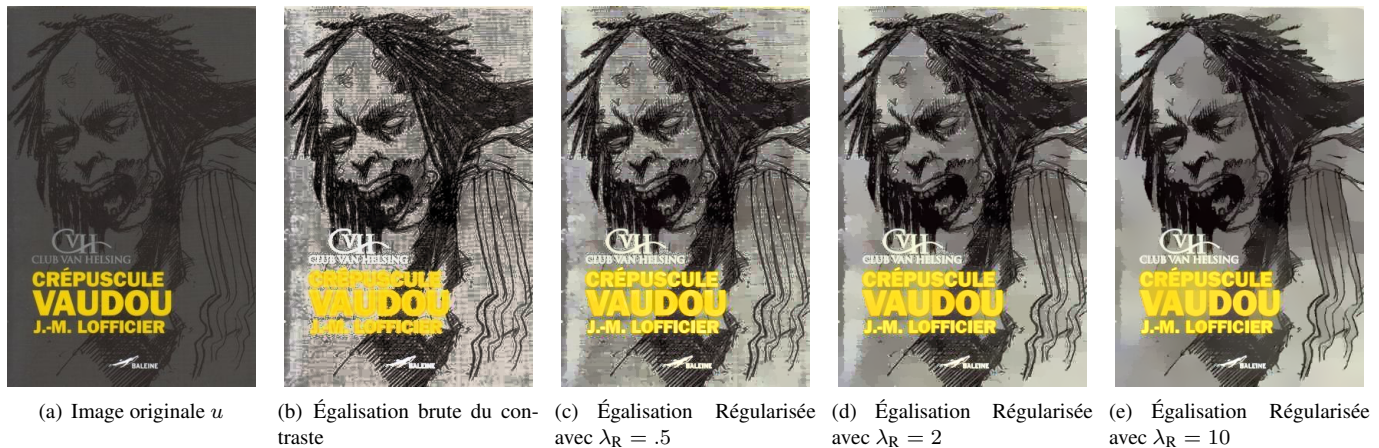


FIGURE 2 – **Régularisation de contraste.** Le débruitage de l’image  $u$  sous contraintes d’égalisation de son intensité est ici illustré pour différents paramètres de régularisation  $\lambda_R$ , les autres paramètres étant fixés ( $\lambda_F = 0.1$ ,  $\lambda_S = 1$ , et  $\lambda_L = \lambda_R$ ).

ficier de cette approche (notamment en imagerie médicale ou pour le traitement de séquence d’images) sont également en cours d’étude.

**Remerciements** Ces travaux ont été partiellement financés par le Centre National d’Études Spatiales (projet MISS), the Office of Naval research (grant N00014-97-1-0839), the European Research Council (advanced grant “Twelve labours”), et l’Agence Nationale de la Recherche (projet ANR–NatImage 08-EMER-009).

## Références

- [1] M. Bertalmío, V. Caselles, E. Provenzi, and A. Rizzi. Perceptual color correction through variational techniques. *IEEE Trans. on Im. Proc.*, 16(4), 2007.
- [2] K. Bredies and D. A. Lorenz. Minimization of Non-smooth, Non-convex Functionals by Iterative Thresholding. TU Braunschweig Preprint, 2009.
- [3] R. Burkard, M. Dell’Amico, and S. Martello. *Assignment Problems*. SIAM, 2009.
- [4] A. Chambolle. An algorithm for total variation minimization and applications. *J. Math. Imaging Vis.*, 20 :89–97, January 2004.
- [5] N. Papadakis, E. Provenzi, and V. Caselles. A variational model for histogram transfer of color images. *IEEE Trans. on Image Processing*, 19(12), 2010.
- [6] F. Pitié and A. Kokaram. The Linear Monge-Kantorovitch Colour Mapping for Example-Based Colour Transfer. In *Proc. of CVMP’06*.
- [7] J. Rabin, J. Delon, and Y. Gousseau. Regularization of Transportation Maps for Color and Contrast Transfer. In *Proc. of ICIP*, 2010.
- [8] J. Rabin, G. Peyré, and L. D. Cohen. Geodesic Shape Retrieval via Optimal Mass Transport. In *Proc. of ECCV*, 2010.
- [9] J. Rabin, G. Peyré, J. Delon, and M. Berton. Wasserstein Barycenter and its Application to Texture Mixing. HAL preprint, 2010.
- [10] E. Reinhard, M. Ashikhmin, B. Gooch, and P. Shirley. Color transfer between images. *IEEE Comput. Graph. Appl.*, 21(5):34–41, 2001.
- [11] L. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Phys. D*, 60 :259–268, 1992.
- [12] Y.-W. Tai, J. Jia, and C.-K. Tang. Local color transfer via probabilistic segmentation by expectation-maximization. In *Proc. of CVPR*, 2005.
- [13] C. Villani. *Topics in optimal transportation*. American Math. Soc., 2003.