

# Apport des copules pour la navigation GPS en présence de multitrajets par filtrage particulaire.

Vincent PEREIRA, Audrey GIREMUS et Eric GRIVEL

Université Bordeaux 1 - IPB - UMR CNRS 5218 IMS - 351 cours de la Libération 33405, TALENCE Cedex, France  
{vincent.pereira, audrey.giremus, eric.grivel}@ims-bordeaux.fr

**Résumé** – Le GPS (Global Positioning System) est un système de radionavigation par satellites qui fournit à tout utilisateur muni d'un récepteur sa position en un point quelconque du globe. Aujourd'hui, une précision de 5 à 10 m peut être atteinte, mais les performances du GPS peuvent être fortement dégradées en présence de multitrajets. S'il existe un trajet direct entre les satellites et le récepteur, ils sont généralement modélisés par des sauts de variance affectant les mesures GPS. L'originalité de cette communication consiste en la prise en compte des corrélations spatiales entre mesures satellite. En effet, si deux signaux satellite ont des directions d'arrivée voisines, ils ont de fortes chances d'être dégradés simultanément par des multitrajets. Pour modéliser cette dépendance, nous proposons d'utiliser l'outil probabiliste que constituent les copules. Le modèle proposé étant fortement non linéaire et non gaussien, nous réalisons conjointement l'estimation de la position du mobile et la détection des multitrajets par filtrage particulaire.

**Abstract** – The GPS (Global Positioning System) is a radio-navigation system based on satellites that provides every user equipped by a receiver with his location everywhere on earth. Today, an accuracy ranging from 5 to 10 m can be achieved, but GPS performance can be strongly degraded in a multipath environment. If there is a direct path between the satellites and the receiver, multipath are commonly modeled by variance jumps affecting GPS measurements. The originality of this communication consists in taking into account the spatial correlations between GPS measurements. Indeed, if two signals from satellites have close directions of arrival, they are very likely to be simultaneously affected by multipath. In order to model this dependence, we suggest using a probabilistic tool, namely copulas. The proposed model being strongly non linear and non Gaussian, we jointly estimate the mobile location and perform the multipath detection by using particle filtering.

## 1 Introduction

Le GPS (Global Positioning System) fournit à tout utilisateur muni d'un récepteur approprié sa position en un point quelconque du globe. Plus précisément, le récepteur capte les signaux émis par une constellation de satellites et en estime la durée de propagation qu'il convertit en mesure de distance. Quatre mesures satellite permettent alors de déterminer la position du récepteur et le décalage de son horloge par rapport au temps de référence GPS<sup>1</sup>. Aujourd'hui, une précision de l'ordre de 5 à 10 m peut être atteinte, mais les performances du GPS peuvent être fortement dégradées en présence de multitrajets, notamment en milieu urbain. Les multitrajets se produisent quand différentes répliques du signal satellite, issues de réflexions sur les obstacles de l'environnement, parviennent au récepteur. Un panorama des différentes méthodes proposées pour atténuer l'effet des multitrajets est présenté dans le chapitre 7 de [7]. Les solutions consistent principalement en l'utilisation de réseaux d'antennes permettant de rejeter les signaux réfléchis ou en l'amélioration des techniques de corrélation mises en oeuvre dans le récepteur pour estimer le temps de propagation des signaux satellite. Une autre catégorie d'approches traite les effets des multitrajets directement au niveau

de l'algorithme estimant la position à partir des mesures satellite. Ainsi, la structure du récepteur reste inchangée. Dans [3], les multitrajets sont modélisés par des sauts de variance s'il existe un trajet direct entre le satellite et le récepteur et par un saut de moyenne dans le cas contraire. Un algorithme est présenté pour détecter ces sauts et compenser leurs effets. Néanmoins, les différents signaux satellite sont supposés indépendants, alors qu'en réalité deux signaux satellite de directions d'arrivée voisines ont de fortes chances d'être affectés simultanément par des multitrajets. Dans cette communication, nous nous intéressons à la première catégorie de multitrajets qui est la plus fréquente en navigation GPS de par l'angle d'élévation des satellites. L'originalité de notre approche réside dans la prise en compte des corrélations entre mesures satellite à l'aide des copules [1], un outil probabiliste permettant de définir des relations de dépendance entre variables aléatoires. Le modèle étant fortement non linéaire et non gaussien, nous réalisons conjointement l'estimation de la position et la détection des multitrajets par filtrage particulaire.

L'article est organisé comme suit : la section 2 propose une présentation générique de l'outil copule. La section 3 détaille la modélisation bayésienne du problème. La section 4 décrit le principe du filtre particulaire utilisé pour l'estimation des variables du modèle. Enfin, la section 5 présente les résultats obtenus en testant l'algorithme sur des données GPS simulées.

<sup>1</sup>. Le temps de référence GPS est affiché par un ensemble d'horloges à l'observatoire naval des États Unis.

## 2 Présentation générique des copules

Les copules sont un outil probabiliste qui présente l'intérêt de modéliser la structure de dépendance de plusieurs variables aléatoires indépendamment de leurs distributions marginales. Ainsi, elles permettent de construire des lois multivariées originales. Les copules ont été mises à profit dans différents domaines dont la classification [1], l'imagerie radar à ouverture synthétique [4], etc. L'utilisation des copules est fondée sur le théorème de Sklar suivant : considérons un vecteur aléatoire  $\mathbf{Y} = [Y_1, \dots, Y_M]^T$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^M$  de fonction de répartition et de densité de probabilité  $F$  et  $f$ , respectivement, et notons  $F_1, \dots, F_M$  et  $f_1, \dots, f_M$ , respectivement, les fonctions de répartition et les densités de probabilités de  $Y_1, \dots, Y_M$ . Si les fonctions  $F_1, \dots, F_M$  sont continues alors il existe une fonction  $C : [0, 1]^M \rightarrow [0, 1]$  appelée copule, telle que :

$$\begin{aligned} \forall (y_1, \dots, y_M) \in \mathbb{R}^M, \\ F(y_1, \dots, y_M) = C(F_1(y_1), \dots, F_M(y_M)) \\ f(y_1, \dots, y_M) = f_1(y_1) \cdots f_M(y_M) \\ \times c(F_1(y_1), \dots, F_M(y_M)) \end{aligned} \quad (1)$$

où  $c(u_1, \dots, u_M) = \frac{\partial^M C(u_1, \dots, u_M)}{\partial u_1 \cdots \partial u_M}$  est la densité de copule. On peut remarquer qu'une copule peut alternativement être perçue comme une fonction de répartition sur  $[0, 1]^M$  dont les fonctions de répartition marginales sont des lois uniformes. Il existe de nombreuses familles de copules qui permettent de définir diverses relations de dépendance. Certaines sont créées à partir de lois multivariées existantes comme la copule gaussienne ou celle de Student. Nous nous intéressons ici aux copules de Student qui permettent de modéliser la réalisation simultanée d'évènements rares sur les composantes d'un vecteur aléatoire. La densité de la copule de Student s'exprime comme suit :

$$c_T(u_1, \dots, u_M) = \frac{|\boldsymbol{\rho}|^{-1/2} \Gamma(\frac{\nu+M}{2}) \Gamma(\frac{\nu}{2})^{M-1} (1 + \frac{1}{\nu} \boldsymbol{\zeta}^T \boldsymbol{\rho}^{-1} \boldsymbol{\zeta})^{-(\nu+M)/2}}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})^M \prod_{i=1}^M (1 + \frac{\zeta_i^2}{\nu})^{-(\nu+1)/2}} \quad (2)$$

avec  $\boldsymbol{\rho}$  la matrice de corrélation de la loi de Student multivariée,  $\boldsymbol{\zeta} = [t_\nu^{-1}(u_1), \dots, t_\nu^{-1}(u_M)]^T$  où  $t_\nu$  est la fonction de répartition de la loi de Student centrée et réduite à  $\nu$  degrés de liberté et  $\zeta_i$  la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur  $\boldsymbol{\zeta}$ ,  $i = 1, \dots, M$ .

## 3 Modélisation bayésienne du problème

Le problème considéré est l'estimation conjointe de la dynamique d'un mobile équipé d'un récepteur GPS et de l'état des mesures satellite (perturbées ou non par des multitrajets). Par la suite, nous désignons par  $\mathbf{X}_t = [\mathbf{x}_t^T, \mathbf{c}_t^T, \boldsymbol{\alpha}_t^T]^T$  le vecteur d'état étendu, formé de l'ensemble des paramètres à estimer. Ses différentes composantes sont définies comme suit :

Le vecteur  $\mathbf{x}_t = [\mathbf{p}_t^T, \dot{\mathbf{p}}_t^T, b_t, d_t]^T$  regroupe les 3 coordonnées cartésiennes de position du mobile  $\mathbf{p}_t$  dans le système de

coordonnées Earth Centered Earth Fixed (ECEF)<sup>2</sup>, ses 3 coordonnées de vitesse  $\dot{\mathbf{p}}_t$ , ainsi que le décalage  $b_t$  et la dérive  $d_t$  de l'horloge récepteur par rapport au temps de référence GPS. Son évolution est décrite par la loi de transition

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \mathbf{F}\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{Q}) \quad (3)$$

où  $\mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \mathbf{F}\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{Q})$  désigne la loi normale multivariée d'argument  $\mathbf{x}_t$ , de vecteur moyen  $\mathbf{F}\mathbf{x}_{t-1}$  et de matrice de covariance  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{Q}$  étant des matrices diagonales par bloc. Elles sont par exemple précisées dans [2].

Les vecteurs  $\mathbf{c}_t$  et  $\boldsymbol{\alpha}_t$  ont  $n_t$  composantes, où  $n_t$  désigne le nombre de mesures satellite à l'instant  $t$ . Plus précisément,  $c_t(k) = 1$  si la  $k^{\text{ème}}$  mesure est perturbée par des multitrajets et 0 dans le cas contraire.

Enfin, le vecteur  $\boldsymbol{\alpha}_t$  permet de définir la loi *a priori* du vecteur  $\mathbf{c}_t$  de la façon suivante :  $P[\mathbf{c}_t(k) = 0] = \alpha_t(k)$  et  $P[\mathbf{c}_t(k) = 1] = 1 - \alpha_t(k)$ . L'évolution des probabilités  $\alpha_t(k)$  au cours du temps est classiquement représentée par une loi beta [5],

$$p(\boldsymbol{\alpha}_t(k) | \boldsymbol{\alpha}_{t-1}(k)) = \beta(\boldsymbol{\alpha}_t(k); \mathbf{a}_t(k), \mathbf{b}_t(k)), \quad (4)$$

où  $\beta(\boldsymbol{\alpha}_t(k); \mathbf{a}_t(k), \mathbf{b}_t(k))$  désigne la densité de probabilité de la loi beta d'argument  $\boldsymbol{\alpha}_t(k)$  et de paramètres  $\mathbf{a}_t(k)$  et  $\mathbf{b}_t(k)$  définie comme suit :

$$\beta(\boldsymbol{\alpha}_t(k); \mathbf{a}_t(k), \mathbf{b}_t(k)) = \frac{\boldsymbol{\alpha}_t(k)^{\mathbf{a}_t(k)-1} (1 - \boldsymbol{\alpha}_t(k))^{\mathbf{b}_t(k)-1}}{B(\mathbf{a}_t(k), \mathbf{b}_t(k))}$$

avec  $\boldsymbol{\alpha}_t(k) \in [0, 1]$  et  $B(\mathbf{a}_t(k), \mathbf{b}_t(k))$  la constante de normalisation.

Les lois beta sont une famille de distributions définies sur  $[0, 1]$  qui ont l'avantage de prendre différentes formes selon les paramètres choisis. Ici,  $\mathbf{a}_t(k)$  et  $\mathbf{b}_t(k)$  sont fixés de façon à introduire une corrélation temporelle qui favorise l'aspect suivant : en l'absence de multitrajets à l'instant  $t$ , la probabilité qu'il en soit de même pour les instants ultérieurs est élevée et réciproquement en présence de multitrajets. Une solution est de poser :  $\mathbf{a}_t(k) = \boldsymbol{\alpha}_{t-1}(k)$  et  $\mathbf{b}_t(k) = 1 - \boldsymbol{\alpha}_{t-1}(k)$ . Le phénomène d'apparition/ disparition de multitrajets est un évènement rare. Cependant, deux satellites de directions voisines ont une forte probabilité d'être affectés simultanément par des multitrajets. Ainsi, les différentes composantes de  $\boldsymbol{\alpha}_t$  ne sont pas indépendantes.

Pour favoriser l'occurrence simultanée de multitrajets sur deux mesures, nous proposons d'utiliser la copule de Student définie par l'équation (2). L'élément  $\rho_{i,j}$ , situé sur la  $i^{\text{ème}}$  ligne et la  $j^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $\boldsymbol{\rho}$ , traduit la proximité angulaire des satellites  $i$  et  $j$ . Une mesure possible de cette dernière est le cosinus directeur de l'angle  $\theta_{i,j}$  entre les directions des deux satellites par rapport au récepteur (Cf. Fig. 1) :

$$\rho_{i,j} = \cos \theta_{i,j} = \frac{\langle \mathbf{p}_t^i - \mathbf{p}_t, \mathbf{p}_t^j - \mathbf{p}_t \rangle}{\|\mathbf{p}_t^i - \mathbf{p}_t\| \cdot \|\mathbf{p}_t^j - \mathbf{p}_t\|} \quad (5)$$

2. Le système de coordonnées ECEF est centré sur le centre de masse de la terre. L'axe  $z$  est défini comme étant parallèle à l'axe de rotation de la terre, pointant vers le nord. L'axe  $x$  intersecte la sphère terrestre au niveau du méridien de Greenwich et l'axe  $y$  se trouve dans le plan équatorial.

où  $\mathbf{p}_t^i, \mathbf{p}_t^j$  contiennent respectivement les 3 coordonnées de position des satellites  $i, j$ ,  $\langle \cdot \rangle$  désigne l'opérateur produit scalaire et  $\| \cdot \|$  la norme euclidienne. Lorsque le produit scalaire dans (5) devient négatif, l'angle  $\theta_{i,j}$  entre les directions des satellites devient supérieur à  $\pi/2$ . Dans ce cas, nous pouvons considérer qu'ils sont indépendants et nous proposons de poser  $\rho_{i,j} = 0$ .

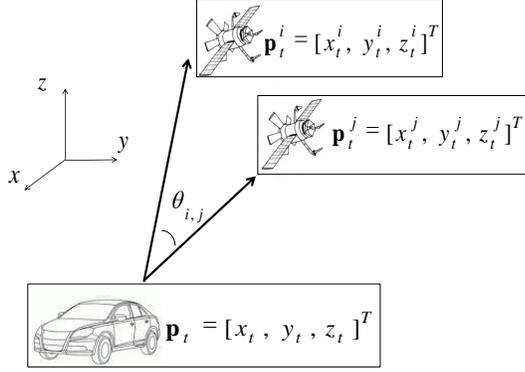


FIGURE 1 – écart angulaire entre les directions de deux satellites de la constellation

L'estimation du vecteur d'état  $\mathbf{X}_t$  est fondée sur les mesures satellites formées par le récepteur GPS. Par la suite, nous notons  $\mathbf{Z}_t$  le vecteur d'observation de dimension  $n_t$  regroupant les mesures GPS à l'instant  $t$ .  $n_t$  est susceptible de varier au cours du temps en fonction de la géométrie relative du récepteur et des satellites. La  $k^{\text{ième}}$  composante de  $\mathbf{Z}_t$ ,  $k = 1, \dots, n_t$  s'exprime comme suit :

$$\mathbf{Z}_t(k) = \underbrace{\| \mathbf{p}_t - \mathbf{p}_t^k \|}_{h_{t,k}(\mathbf{x}_t)} + b_t + \mathbf{v}_t(k) \quad (6)$$

où  $b_t$  désigne le biais d'horloge du récepteur GPS par rapport au temps de référence GPS.  $\mathbf{v}_t(k)$  est un processus aléatoire blanc dont la statistique est définie comme suit :  $\mathbf{v}_t(k) \sim \mathcal{N}(\mathbf{v}_t(k); 0, \sigma_0^2)$  en fonctionnement nominal et  $\mathbf{v}_t(k) \sim \mathcal{N}(\mathbf{v}_t(k); 0, \sigma_1^2)$  en présence de multitrajets, avec  $\sigma_1 > \sigma_0$ . La valeur de  $\sigma_0$  est fixée *a priori* à 8 m ; cette valeur représente l'écart-type nominal du bruit de mesure en navigation GPS. La valeur de  $\sigma_1$  est choisie suffisamment élevée pour que la distribution gaussienne associée aux multitrajets soit non-informative. La figure 2 illustre les dépendances qui existent entre les différentes variables du modèle.

## 4 Estimation par filtrage particulaire

Pour estimer les paramètres du vecteur  $\mathbf{X}_t$ , nous optons pour un filtre particulaire. Cet algorithme permet non seulement de traiter les modèles non linéaires et/ou non gaussiens, mais également de gérer des vecteurs d'état comprenant à la fois des variables continues et discrètes. L'objectif est d'estimer la densité *a posteriori*  $p(\mathbf{X}_{1:t} | \mathbf{Z}_{1:t})$ , où  $\mathbf{X}_{1:t} = \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_t$  et  $\mathbf{Z}_{1:t} = \mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_t$ , et plus particulièrement la densité marginale  $p(\mathbf{X}_t | \mathbf{Z}_{1:t})$ . En général, cette dernière a une forme très

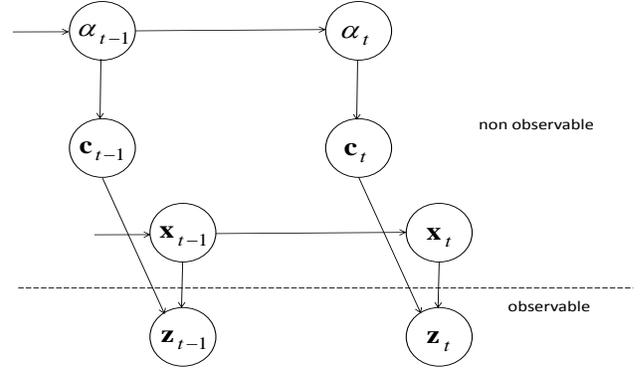


FIGURE 2 – modèle séquentiel bayésien avec des modèles d'observation commutants

complexe et ne peut pas être déterminée analytiquement. Les méthodes de Monte Carlo séquentielles, encore connues sous le nom de filtrage particulaire, fournissent une approximation discrète de cette densité. Elles font évoluer un ensemble d'échantillons appelés particules, selon une loi de proposition  $q(\mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{Z}_t)$ , et leur affectent des poids. Les particules  $\mathbf{X}_t^{(i)}$  de poids  $w_t^{(i)}$  approchent la densité  $p(\mathbf{X}_t | \mathbf{Z}_{1:t})$  par l'intermédiaire de la distribution empirique définie comme suit :

$$\hat{P}_N(\mathbf{X}_t) = \sum_{i=1}^N w_t^{(i)} \delta(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_t^{(i)}) \quad (7)$$

avec

$$w_t^{(i)} = w_{t-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{X}_t^{(i)} | \mathbf{X}_{t-1}^{(i)}) p(\mathbf{Z}_t | \mathbf{X}_t^{(i)})}{q(\mathbf{X}_t^{(i)} | \mathbf{X}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{Z}_t)} \quad (8)$$

Les poids permettent de corriger l'écart entre la loi cible et la loi de proposition. La loi de simulation sélectionnée est une approximation de la loi optimale  $p(\mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{Z}_t)$  [6], prenant en compte la mesure à l'instant courant pour simuler les particules.

Si le formalisme présenté dans cette section semble classique *a priori*, il est à noter que la difficulté majeure réside dans l'établissement de la loi de simulation qui nécessite des développements calculatoires conséquents. Ces derniers ne sont pas détaillés dans cet article par manque de place.

## 5 Résultats de simulation

Nous testons notre algorithme sur des données GPS issues d'un simulateur correspondant à une trajectoire en milieu urbain de 100 s au cours de laquelle le récepteur a 6 satellites en ligne de vue. Pour simuler l'apparition de multitrajets, nous ajoutons un bruit blanc gaussien aux mesures fournies par les deux couples de satellites les plus proches angulairement.

TABLE 1 – pourcentage de temps de bonne détection des multitrajets

	sat. 1	sat. 4	sat. 2	sat. 6
$T_m$ sans copule	28%	88%	33%	87%
$T_m$ avec copule	30%	85%	36%	87%

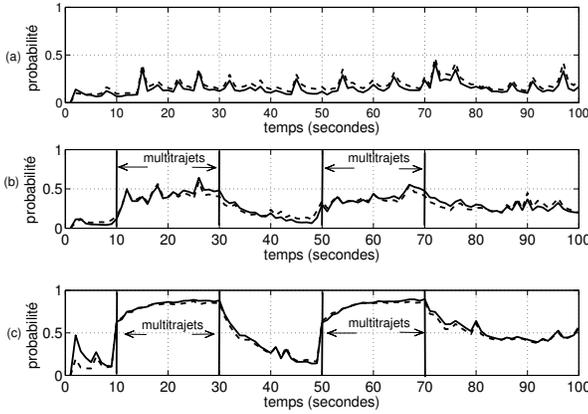


FIGURE 3 – probabilité  $P[c_t(k) = 1 | \mathbf{Z}_{1:t}]$  pour une mesure (a) non dégradée, (b) dégradée par des multitrajets d'écart-type 10 m et (c) dégradée par des multitrajets d'écart-type 40 m pour l'algorithme sans copule (traits pointillés) et avec copule (trait plein).

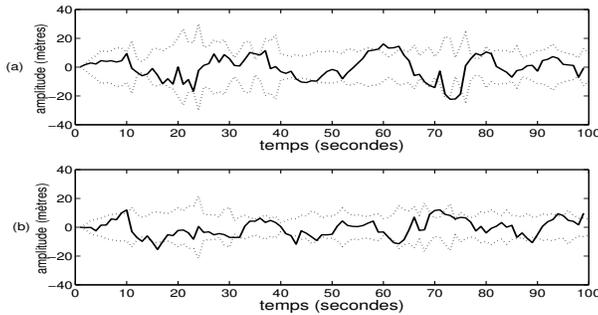


FIGURE 4 – erreurs d'estimation de la position pour la coordonnée  $x$  (a) et la coordonnée  $y$  (b)

Le bruit est ajouté aux mesures fournies par le couple (1,4) (respectivement (2,6)) dans les intervalles temporels  $[20, 40]$  s et  $[60, 80]$  s (respectivement  $[10, 30]$  s et  $[50, 70]$  s). L'écart-type est choisi égal à 10 m pour le satellite 1 (respectivement 2) et 40 m pour le satellite 4 (respectivement 6). A priori l'amplitude du saut de variance induit par les multitrajets est inconnue. Pour notre algorithme, nous fixons  $\sigma_1 = 40$  m.

Nous comparons les performances de notre algorithme à celles d'un algorithme similaire mais n'utilisant pas de copule. Les multitrajets sont considérés détectés lorsque la probabilité *a posteriori* que  $c_t(k)$  soit égal à 1 devient supérieure à 0.5. Les figures 3.(a), 3.(b) et 3.(c) représentent cette probabilité moyennée sur 1000 réalisations pour 3 satellites différents. Nous observons que la présence (l'absence) des multitrajets est correctement détectée avec une amélioration dans le cas où la copule est utilisée. Ce résultat est confirmé par le tableau 1 donnant le pourcentage de temps, noté  $T_m$ , où les multitrajets sont correctement détectés au cours de 1000 réalisations. Enfin, la figure 4, où sont tracées les évolutions au cours du temps des erreurs d'estimation et leurs bornes à 2-sigma associées, montre que notre algorithme continue à bien estimer la trajectoire après l'apparition des multitrajets. La figure 5 représente la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne (REQM) d'estimation

de la position horizontale au cours du temps pour les deux algorithmes testés. Nous constatons que bien que l'utilisation de la copule améliore la détection des multitrajets, la REQM augmente au contraire sensiblement. Cet écart est dû au fait que notre algorithme utilise une valeur fixe pour l'écart-type *a priori* des multitrajets ( $\sigma_1 = 40$  m) et a donc tendance à surestimer l'écart-type des multitrajets d'amplitude plus faible.

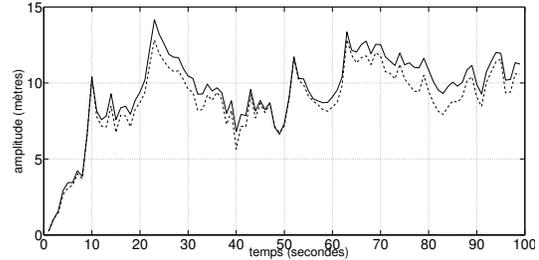


FIGURE 5 – évolution de la REQM au cours du temps pour l'algorithme sans copule (traits pointillés) et avec copule (trait plein)

## 6 Conclusions et perspectives

Les résultats de simulation ont démontré l'intérêt des copules pour détecter les multitrajets, en particulier ceux de faible amplitude. Cependant, la version actuelle de notre algorithme n'améliore pas l'erreur de positionnement. Pour la diminuer, il est nécessaire d'inclure l'estimation de l'amplitude des sauts de variance dans notre algorithme. Par ailleurs, nous envisageons de traiter le problème des sauts de moyenne en l'absence de trajet direct entre le récepteur et le satellite.

## Références

- [1] N. J.-B. Brunel, J. Lapuyade-Lahorgue et W. Pieczynski. *Modeling and unsupervised classification of multivariate hidden Markov chains with copulas*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 55, no. 2, février 2010.
- [2] A. Giremus, J.-Y. Tourneret et A. Doucet. *A Fixed-lag particle filter for the joint detection/compensation of interference effects in GPS navigation*. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 58, no. 12, pp. 6066-6079, 2010.
- [3] M. Spangenberg, V. Calmettes, O. Julien, J.-Y. Tourneret et G. Duchâteau. *Detection of variance changes and mean value jumps in measurement noise for multipath mitigation in urban navigation*. Journal of the Institute of navigation, vol. 57, no. 1, pp. 32-52, 2010.
- [4] G. Mercier, G. Moser et S. Serpico. *Conditional copula for change detection on heterogeneous SAR data*. IEEE Transactions on geoscience and remote sensing, vol. 46, pp. 1428-1441, Edinburgh, UK, 2008.
- [5] F. Caron, M. Davy, E. Duflos et P. Vanheeghe. *Particle filtering for multisensor data fusion with switching observation models : application to land vehicle positioning*. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 55, issue 6, pp. 2703-2719, juillet 2006.
- [6] A. Doucet, S. Godsill et C. Andrieu. *On sequential Monte Carlo sampling methods for Bayesian filtering*. Statistics and Computing, vol. 10, pp. 197-208, 2000.
- [7] E. D. Kaplan. *Understanding GPS, principles and applications*. Artech House, Boston, MA, 1996.