

# A propos de l'Orthogonalité dans la Décomposition Modale Empirique

Oumar NIANG<sup>1,2</sup>, Mouhamed OULD GUERRA<sup>2</sup>, Abdoulaye THIOUNE<sup>1,3</sup>, Éric DELÉCHELLE<sup>1</sup>, Jacques LEMOINE<sup>1</sup>  
et Mary Teuw NIANE<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire Images, Signaux et Systèmes Intelligents (LISSI- E.A.3956)  
Université Paris Est Créteil Val-de-Marne, France

<sup>2</sup> Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Informatique (LANI),  
Université Gaston Berger (UGB) Sénégal

<sup>3</sup> Faculté des Sciences et Techniques,  
Université Cheikh Anta Diop de Dakar (UCAD)  
niangom@yahoo.fr, oniang@ucad.sn, lemoine@u-pec.fr, delechelle@u-pec.fr

**Résumé** – La décomposition modale empirique (EMD) est une méthode de décomposition de signaux non stationnaires ou issus de systèmes non linéaires, en composantes modulées en Amplitude et en fréquence. Elle s'apparente à la décomposition en ondelettes avec l'avantage supplémentaire que constitue son autoadaptabilité. Malgré ses nombreuses applications en traitement de signaux et images, l'EMD demeure encore limitée par une absence de formalisme mathématique. Dans de récents travaux, nous avons proposé un modèle basé sur des Equations aux Dérivées Partielles (EDP) et une approche spectrale comme cadre d'étude et d'implémentation de l'algorithme. Dans cette communication, nous mettons à profit ce cadre théorique pour analyser de la propriété d'orthogonalité dans la décomposition EMD en faisant une analogie avec l'algorithme de poursuite et en ouvrant des perspectives sur la formalisation de l'EMD.

**Abstract** – The Empirical Mode Decomposition is an multiscale autoadaptive method for decomposition of non linear signal into AM-FM components. Its similar to an wavelets decomposition. Despite its many applications in signal and images processing, the EMD is still limited by a lack of mathematical formalism. In recent work, we proposed a model based on Partial Differential Equations (PDE) and a spectral approach for the study and the implementation of the algorithm. In this paper, we use this theoretical framework to analyze the orthogonality property in EMD decomposition. We make an analogy with the matching pursuit algorithm and give some perspectives on the formalization of the EMD.

## Introduction

L'orthogonalité de la décomposition EMD est actuellement à l'état de conjecture. Dans [1, 2], un cadre fonctionnel de calcul des enveloppes moyennes par un modèle d'EDP et une approche spectrale est introduit par *O.Niang et al.* dans l'implémentation de l'EMD. A partir de l'approche spectrale d'une part, une analogie avec une suite de projections orthogonales en cascade est faite, et d'autre part, nous construisons un dictionnaire issu de l'EMD à partir des enveloppes moyennes passant par les points caractéristiques. Dans un premier temps, nous rappelons l'algorithme classique EMD, le modèle de l'interpolateur EDP et l'approche spectrale pour le calcul des tendances du *sifting process*. Dans un deuxième temps, une analyse de l'orthogonalité est effectuée ainsi qu'une analogie avec une cascade de projections orthogonales et la comparaison avec l'algorithme de *matching pursuit*. Nous terminons par une conclusion et des perspectives.

## 1 Rappels sur la Décomposition Modale Empirique

La Décomposition EMD comme présentée par Huang dans [3] est une méthode de décomposition de signaux complexes (non stationnaires et issus de systèmes non linéaires) en composantes AM-FM, modulées en amplitude et en fréquence appelées fonctions modes intrinsèques pour *Intrinsic Mode Functions* (IMFs) en anglais. Le principe de l'EMD consiste à considérer localement un signal comme la superposition d'une oscillation rapide et d'une tendance de fréquence plus basse. Pour ce faire, l'algorithme classique procède au calcul de l'enveloppe moyenne du signal à partir de l'interpolation des extrema locaux. Cette enveloppe est soustraite du signal puis la même procédure est appliquée à cette différence jusqu'à ce que l'enveloppe obtenue soit nulle ou quasi nulle. Le résultat obtenu à l'issue de cette procédure donne le premier IMF. Les modes suivants d'ordre supérieur sont calculés par

le même processus dit de *tamissage* ( *sifting process* en anglais) sur le résidu (différence du signal courant et de l'IMF). L'algorithme de la décomposition peut s'arrêter à un ordre défini, ou lorsqu'il n'existe plus d'oscillations à extraire dans le résidu. Ainsi, pour tout signal  $s[n]$ , l'EMD donne une décomposition suivante :

$$s[n] = \sum_{k=1}^K imf_k[n] + r_K[n], \quad (1)$$

où  $imf_k$  est le  $k^{ieme}$  IMF du signal, et  $r_K$  est le résidu final (un polynôme de faible degré). Il est connu que le *sifting process* procure un nombre limité d'IMFs qui sont par moment quasi orthogonaux. Un IMF peut être vu comme une ondelette à bande étroite  $\varphi$  modulée par un signal  $a[n]$  de basse fréquence.

$$imf_k[n] = a_k[n] \varphi_k[n].$$

[5, 4], une interprétation en termes de bancs de filtres peut être effectuée dans le cas de l'analyse de bruits stochastiques.

L'EMD s'apparente alors à bien des égards à la technique de décomposition par ondelettes. Par contre la propriété d'orthogonalité est bien matrisée dans la théorie des ondelettes, ce qui n'est pas le cas pour l'EMD. Contrairement à la décomposition en ondelettes, l'EMD fonctionne bien avec une classe de fonctions n'appartenant pas à  $C^2(\Omega)$ , il est prouvé dans [1] que l'espace des fonctions éligibles pour l'EMD est l'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$ . Dans la section suivante, nous exposons le modèle d'EDP et l'approche spectrale sur lesquels nous nous appuyons pour analyser l'orthogonalité dans la décomposition EMD.

## 2 Le Modèle d'EDP et l'approche spectrale pour l'EMD

Considérons le signal  $s_0$  à décomposer comme condition initiale d'un processus de diffusion laissant invariants les points caractéristiques du signal. Reprenons pour cela le modèle basé sur des EDPs ci-après proposé et largement étudié dans [6, 1, 2] :

$$\frac{\partial s(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( g(x) \frac{\partial^3 s(x, t)}{\partial x^3} \right) = 0, \quad (2)$$

où  $g(x)$  est une fonction de diffusivité. La variable temporelle est artificielle et désigne le degré de filtrage du signal d'entrée. Cette fonction est nulle aux points caractéristiques et permet à la solution de l'EDP d'interpoler ces points. Les points caractéristiques peuvent être constitués des extrema locaux, des points de maximum ou minimum de courbure ou des points d'inflexion du signal. Ainsi selon le type de points caractéristiques, la solution asymptotique de l'EDP donne l'enveloppe supérieure ou l'enveloppe inférieure ou l'enveloppe moyenne. La fonction

de diffusivité peut prendre plusieurs formes (voir [6, 1, 2]) dont la suivante

$$g^\pm(x) = \frac{1}{9} \left[ |\operatorname{sgn}(\delta_x^1 s_0(x))| \pm \operatorname{sgn}(\delta_x^2 s_0(x)) + 1 \right]^2. \quad (3)$$

qui correspond au calcul des enveloppes supérieures ( $g^+$ ) et inférieures ( $g^-$ ).

L'équation (2) peut être vue comme une équation du type *Long-Range Diffusion (LRD)* (voir [7, p.244]), avec une fonction de sélectivité  $g(x)$ . Désignons respectivement par  $s_0(x) = s(x, t=0)$  et  $s_\infty(x) = s(x, t=\infty)$  les conditions initiales et les solutions asymptotiques de l'équation (2) avec conditions aux bords de Neuman (voir [1] pour les résultats d'existence). Pour tout  $t > 0$ , la solution  $s(\cdot, t)$  est dans l'espace

$$\mathcal{V} = \left\{ v \in H^3(\Omega) \mid \frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \exists \Gamma_\Omega \subset \Omega : \int_{\Gamma_\Omega} v dx = 0 \right\}$$

où  $\Omega$  est le domaine de définition du signal.

## Technique spectrale de calcul des enveloppes

La résolution de l'EDP précédente (voir [1, 2]) par un schéma numérique dans le domaine  $\Omega \times [0, T]$  maillé avec le réseau de points  $(t_k, x_i) = (k\Delta t, i\Delta x)$  pour  $k \geq 0, i \in \mathbb{Z}$ , avec  $\Delta x = 1, N$  désignant la longueur de  $\Omega$ , on note par  $U_i^k$  la valeur approchée de la solution  $u(t, x)$  au point  $(k\Delta t, i\Delta x) = (k\Delta t, i)$ , donne le schéma discret :

$$\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta t} + Au_{j+1} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (4)$$

Avec  $A$  l'opérateur issu de la discrétisation. Par récurrence

$$u_n = (I + \Delta t A)^{-n} u_0 = (I + \Delta t A)^{-1} u_{n-1} \quad (5)$$

Quand  $n$  tend vers l'infini,  $u_n$  tend vers  $u$ , l'enveloppe moyenne. En passant à la limite dans les deux membres, on a :

$$u = u_\infty = (I + \Delta t A)^{-1} u_\infty. \quad (6)$$

C'est à dire que  $u$  est un point fixe de l'opérateur  $\mathcal{A} = (I + \Delta t A)^{-1}$  ou encore que  $u$  est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 du même opérateur  $\mathcal{A}$ . Finalement pour calculer  $u$ , il suffit de chercher les vecteurs propres de  $\mathcal{A}$  associés à la valeur propre 1. La solution  $u$  est alors la combinaison linéaire de ces vecteurs propres pondérés par l'amplitude des points caractéristiques. Dans la figure 1, sont représentés les vecteurs propres de l'opérateur  $\mathcal{A}$  associés à la valeur propre 1, pour le signal  $s$ . Pour plus de clarté, un vecteur propre sur cinq est représenté. Le nombre de ces vecteurs propres est de l'ordre du nombre de points caractéristiques du signal d'entrée. [1, 2].

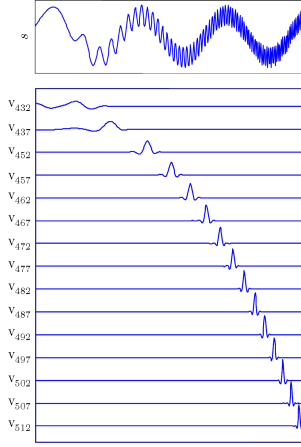


FIGURE 1 – Représentation de vecteurs propres associés à la valeur propre 1, avec une décimation de 5. Les indices représentant les positions des valeurs propres dans la matrice diagonale du spectre de  $\mathcal{A}$ .

### 3 Analyse de l'orthogonalité par approche spectrale et projections orthogonales

#### Par approche spectrale

D'après ce qui précède, si la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 1 est  $p_1$  et si on note  $M_1$  la somme pondérée des ces  $p_1$  vecteurs propres, il s'en suit la décomposition suivante :  $u_0 = M_1 + \text{Imf}_1$ , avec  $M_1 \in \mathcal{V}$  et  $\text{Imf}_1 = u_0 - M_1$  qui est un *protomode* si la condition d'extraction d'IMF est vérifiée. Sur la figure précédente on note que les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont quasi orthogonaux. Dés lors pour espérer avoir une décomposition orthogonale, on peut procéder par une orthonormalisation des vecteurs propres ou en choisir un échantillon issus de valeurs propres suffisamment éloignées les unes des autres. L'opérateur  $\mathcal{A}$  n'est pas parfaitement symétrique. La distorsion de la symétrie est observée autour des points caractéristiques, ce qui explique principalement la non orthogonalité parfaite de la décomposition. La recherche d'un opérateur symétrique est alors une piste pour obtenir une base orthogonale de décomposition.

#### Par suite de projections orthogonales

Considérons l'ensemble des réseaux de points de contrôles constitué par les points caractéristiques représentés ici par les points d'inflexion du signal d'entrée  $s_0 \in H^2(\Omega)$ , qu'on suppose en nombre fini  $N_1$  et représentés par la famille de points  $(x_i^0, s_0(x_i^0))_{i \in [0, \dots, N_1]}$ . Soit alors  $V_{N_1}^0$  l'espace des fonctions de  $H^3(\Omega)$  engendrées par les splines cubiques sur  $\Omega = ]a, b[$  définies par les points de contrôles

$(x_i^0, s_0(x_i^0))_{i \in [0, \dots, N_1]}$ .  $V_{N_1}^0$  est un sous espace fermé de  $H^3(\Omega)$ , de même que  $\mathcal{V} \cap V_{N_1}^0$ . Et soit  $P_{V_{N_1}^0}$  la projection orthogonale de  $H^2(\Omega)$  ( du fait que  $u_0 \in H^2(\Omega)$ ) sur  $\mathcal{V} \cap V_{N_1}^0$ . La projection de  $u_0$  vérifie l'équation suivante :

$$s_0 = P_{V_{N_1}^0}(s_0) + (s_0 - P_{V_{N_1}^0}(s_0)). \quad (7)$$

En posant  $D_1(s_0) = s_0 - P_{V_{N_1}^0}(s_0)$  et  $R_1(s_0) = P_{V_{N_1}^0}(s_0)$ , il s'en suit la décomposition orthogonale suivante :

$$s_0 = R_1(s_0) + D_1(s_0) \quad (8)$$

où  $(R_1(s_0) \perp D_1(s_0))$ .

Nous pouvons interpréter  $R_1(s_0)$  comme le résidu ou *le résumé* (approximation) de  $s_0$  et  $D_1(s_0)$  comme les détails à la première échelle de décomposition. Ainsi si  $R_1(s_0) \neq 0$ , on pose  $s_1 = D_1(s_0)$  et on suit le principe du *sifting process* en considérant la projection orthogonale  $P_{V_{N_2}^1}$  sur le sous espace  $\mathcal{V} \cap V_{N_2}^1$  de  $H^3(\Omega)$  engendré par les splines cubiques définies par  $(x_j^1, s_1(x_j^1))_{j \in [0, \dots, N_2]}$ , suite des points d'inflexion de  $s_1$ . On espère maintenant que  $P_{V_{N_2}^1}(s_1) = 0$  ou qu'il vérifie les condition d'extraction d'IMF.

Si c'est le cas, la décomposition orthogonale suivante étant de rigueur

$$s_1 = R_2(s_1) + D_2(s_1), \quad (9)$$

avec  $R_2(s_1) = P_{V_{N_2}^1}(s_1)$  et  $D_2(s_1) = s_1 - P_{V_{N_2}^1}(s_1)$ , nous obtenons la représentation du signal original  $s_0$

$$s_0 = R_1(s_0) + R_2(s_1) + D_2(s_0). \quad (10)$$

En posant  $R_{\text{residu}} = R_2(s_1) + R_1(s_0)$ , on a une première décomposition quasi orthogonale de  $s_0$ ,

$$s_0 = D_2(s_1) + R_{\text{residu}}. \quad (11)$$

Cette décomposition est orthogonale avec  $D_2(s_1) = \text{IMF}_1$  le premier mode. Pour obtenir le deuxième mode, il suffit de reprendre le processus avec  $R_{\text{residu}}$ . Cette procédure est répétée jusqu'au rang  $k$  pour donner la décomposition

$$s_0 = \sum_{i=1}^k \text{IMF}_i + R_k. \quad (12)$$

Les  $\text{IMF}_i$  sont deux à deux orthogonaux et  $(\sum_{i=1}^k \text{IMF}_i) \perp R_k$  ainsi, la parfaite orthogonalité est perturbée par  $R_k$ .

## 4 Construction d'un pseudo-dictionnaire pour l'EMD

Nous reprenons l'analogie faite entre l'EMD et l'algorithme de poursuite (ou en anglais *matching pursuit* [8]) avec cette fois-ci l'enveloppe moyenne passant par les points d'inflexion du signal. A chaque étape numéro  $p$  du *sifting process*, on récupère l'enveloppe moyenne  $\psi_p$ . Et on construit un *pseudo-dictionnaire*  $\mathcal{D}$  défini par :

$$\mathcal{D} = \left\{ (\psi_p)_{p=1, \dots, m} \right\} \quad (13)$$

où  $m \in \mathbb{N}$  est le nombre d'enveloppes moyennes tout au long de la *sifting process*. Par construction, le dictionnaire  $\mathcal{D}$  profite de l'auto-adaptabilité de l'EMD. La forme des vecteurs propres associés à la valeur propre 1 représentés dans la figure 1 donne une idée sur le comportement des éléments du dictionnaire. L'aspect orthogonal des éléments du dictionnaire est assez visible. Soit  $\mathcal{H}$  le sous-espace vectoriel fermé de  $L^2(\Omega)$  engendré par les éléments de  $\mathcal{D}$ . Pour un signal à décomposer  $x \in L^2(\Omega)$ , on désigne par  $\mathcal{V}_1$  l'espace vectoriel engendré par l'enveloppe moyenne  $m_1$  du signal  $x$ . Si  $p_1^x$  désigne la projection orthogonale de  $x$  sur  $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{D}$ , alors il résulte des propriétés de projection orthogonale que  $p_1^x = m_1$  est orthogonale à  $x - p_1^x$ . Ainsi, on a la décomposition orthogonale suivante  $x = x - p_1^x + p_1^x$ . A partir de cette équation, nous voyons que l'orthogonalité de la décomposition au sens de l'EMD est obtenue. En notant  $p_k^{m_{k-1}}$  la projection orthogonale de l'enveloppe  $m_{k-1}$  sur la droite vectorielle engendrée par  $m_k$ , et en répétant la même procédure de projection on a :  $x = imf_1 + m_1$ ,  $m_1 = m_1 - m_2 + m_2$ ,  $imf_2 = m_1 - m_2$ . D'où  $x = imf_1 + imf_2 + m_2$ . Ce dont on est certain c'est que  $imf_2 + m_2$  est orthogonal à  $imf_1$ , mais l'on est pas sûre que  $imf_2$  soit orthogonal à  $imf_1$ . Si le résidu  $m_2$  est très proche de zéro on a une quasi orthogonalité. En définitive avec une profondeur de décomposition  $K$ , on a

$$x = \sum_{k=1}^K IMF_k + R_K. \quad (14)$$

Cette décomposition peut être interprétée comme étant à *orthogonalité emboîtée*, en ce sens que chaque composante courante  $IMF_p$  est orthogonale à la somme des composantes suivantes de la décomposition  $\sum_{k=p+1}^K IMF_k + R_K$ . Soit le pseudo-dictionnaire  $\mathcal{D}$  construit avec l'ensemble des enveloppes moyennes, on reproduit une version de l'algorithme de poursuite comme suit : en récupérant dans  $R_1$ , le meilleur élément du dictionnaire des enveloppes et en répétant la décomposition :  $Imf_1 = x - \langle x, R_1 \rangle R_1$ ,

$$\text{avec } R_1 = \arg \min_{h \in \mathcal{D}} |\langle x, h \rangle|^2.$$

Pour une profondeur de décomposition égale à  $N$ , cela donne la décomposition EMD du signal  $x$ , avec un aspect multi-échelle

$$x = \sum_{m=1}^N \langle R_{m-1}, imf_m \rangle imf_m + R_N. \quad (15)$$

A chaque étape  $m$ , de la décomposition,  $R_{m+1}$  et  $Imf_{m+1}$  sont orthogonaux. On a ainsi une décomposition presque orthogonale qui ressemble à bien des allures à celle de type Franklin [9] et à l'algorithme de poursuite.

## 5 Conclusion

Par l'interpolateur EDP et une approche spectrale, nous avons analysé l'orthogonalité de la décomposition EMD.

Les points caractéristiques peuvent être les points de maximum et minimum de courbure qui généralisent le cadre de l'étude effectuée. Par cette étude, on a montré pourquoi l'EMD pouvait être vue comme une décomposition quasi orthogonale en comparaison d'une part avec l'algorithme de poursuite, et d'autre part avec une cascade de projections orthogonales sur un sous-espace de  $\mathcal{V}$ . La ressemblance avec la décomposition de Franklin est aussi établie. Une étude plus fine du pseudo-dictionnaire pour l'EMD et une symétrisation de l'opérateur  $\mathcal{A}$  permettraient de rechercher les propriétés de systèmes de Riesz, de mieux appréhender l'*orthogonalité emboîtée* de l'EMD et d'ouvrir la voie d'une meilleure compréhension de l'EMD.

## Références

- [1] O. Niang, "Empirical Mode Decomposition : Contribution à la modélisation mathématique et application en traitement du signal et l'image," PhD thesis, Univ Paris 12, Créteil, France, Septembre 2007.
- [2] Oumar NIANG, Eric Déléchelle and Jacques Lemoine. "A spectral approach for sifting process in empirical mode decomposition". Transaction on Signal Processing, Volume 58, Num 11. pp 5612-5623. October 2010.
- [3] N.E. Huang, Z. Shen, S.R. Long, M.L. Wu, H.H. Shih, Q. Zheng, N.C. Yen, C.C. Tung, and H.H. Liu, "The empirical mode decomposition and Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis," Proc. Roy. Soc. London A, vol. 545, pp. 903-995, 1998.
- [4] P. Flandrin, G. Rilling, and P. Gonçalves, "Empirical mode decomposition as a filter bank," IEEE Signal Processing Letters, vol. 11, pp. 112-114, 2004.
- [5] Z. Wu and N.E. Huang, "A study of the characteristics of white noise using the Empirical Mode Decomposition method," Proc. Roy. Soc. London A, vol. 460, no. 2046, pp. 1597-1611, 2004.
- [6] E. Deléchelle, J. Lemoine, and O. Niang, "Empirical Mode Decomposition : An Analytical Approach for Sifting Process," IEEE Signal Processing Letters, vol. 12, no 11, pp. 764-767, 2005.
- [7] J.D. Murray, *Mathematical Biology*, 2nd ed., New York : Springer-Verlag, Biomathematics Texts, vol. 19, 1993.
- [8] S. Mallat and Z. Zhang. "Matching pursuit with time-frequency dictionaries". IEEE Trans. Signal Process., 41(12) :p.33973415, 1993.
- [9] Alain Yger. Théorie et analyse du signal : cours et initiation matlab et Scilab. Université Maths Appli, 1999.