

Calcul de la matrice des probabilités de transfert en imagerie Compton 3D

Xavier LOJACONO, Voichita MAXIM, Rémy PROST

Laboratoire CREATIS
7, avenue Jean Capelle 69621 Villeurbanne cedex FRANCE
{lojacono,maxim,prost}@creatis.insa-lyon.fr

Résumé – La caméra à collimation électronique, appelée également caméra Compton, est un dispositif d'imagerie pour la tomographie monophotonique (TEMP), d'une sensibilité beaucoup plus importante que la caméra à collimation mécanique actuellement utilisée en médecine nucléaire. L'image de la source est calculée par reconstruction tomographique. L'algorithme le plus utilisé est l'algorithme MLEM (Maximul Likelihood Expectation Maximization), algorithme itératif bien connu en imagerie d'émission TEP et TEMP. Dans ce travail nous proposons une méthode pour le calcul de la matrice des probabilités de transfert se distinguant par l'utilisation d'un échantillonnage non régulier du cône Compton. Nous approchons ses coefficients par discrétisation de l'intégrale modélisant le processus de détection pour un dispositif ayant des résolutions spatiale et énergétique idéales. Nous proposons une méthode pour la suppression des calculs redondants dus aux intersections multiples des génératrices du cône avec le volume englobant l'objet à reconstruire.

Abstract – The electronically collimated camera, also called Compton camera is an imaging device for SPECT tomography with a sensitivity much higher than the mechanically collimated one currently used in nuclear medicine. The image of the source is calculated by tomographic reconstruction. The algorithm most widely used is the MLEM (Maximul Likelihood Expectation Maximization), an iterative algorithm well known in PET and SPECT imaging. In this work we propose a method to calculate the transition probability matrix that uses a non-regular sampling of the Compton cone. Its coefficients are estimated by the discretization of the formula modeling the detection process for a device with both spatial and energy resolutions assumed to be ideal. We propose a method that avoids redundant computations due to multiple intersections of generatrices of the cone with the volume surrounding the object to be reconstructed.

1 Introduction

L'imagerie par effet Compton des sources de rayons γ est en plein essor, d'une part grâce aux développements technologiques récents, d'autre part du fait des besoins dans des domaines différents : médecine, astronomie, sécurité civile. Elle répond au besoin de détecter des photons γ de haute énergie provenant d'une source proche ou lointaine. Le dispositif d'imagerie associé, appelé caméra Compton ou caméra à collimation électronique, est composé de deux détecteurs. Le premier est choisi pour favoriser la diffusion Compton des photons incidents. Le second détecteur est optimisé pour arrêter les photons diffusés, par absorption photoélectrique. Les deux détecteurs donnent le point d'interaction photon-électron ainsi que la mesure de l'énergie déposée par le photon incident. Le principe de fonctionnement de la caméra Compton est le suivant. Un photon γ émis au point V_0 avec une énergie initiale E traverse le premier détecteur. Au point V_1 il transfère à un électron du milieu une partie de son énergie, E_1 . Le photon change sa trajectoire et pénètre dans l'absorbeur où il interagit au point V_2 en déposant (idéalement) toute son énergie, cf. figure 1.

La loi de conservation de l'énergie permet alors de calculer l'angle β sous lequel le photon a été diffusé, appelé angle

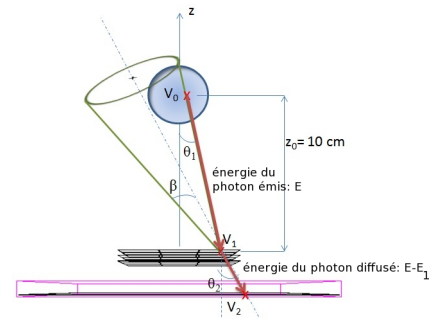


FIG. 1 – Géométrie de la caméra Compton simulée.

Compton, selon la formule

$$\cos \beta = 1 - \frac{m_e c^2 E_1}{(E - E_1)E}, \quad (1)$$

où $m_e c^2 = 511$ keV. Les mesures de position et d'énergie permettent de localiser le point d'émission V_0 sur la surface d'un cône de sommet V_1 , d'axe de direction $\vec{V_2 V_1}$ et de demi-angle β . L'image de la source peut être alors reconstruite en utilisant un algorithme analytique ([1, 2, 3, 4, 5]) ou un algorithme itératif. Les algorithmes itératifs les plus utilisés sont basés sur la maximisation de la fonction de vraisemblance modélisant l'émission des photons par une loi de Poisson ([6, 7, 8, 9]).

L'algorithme LM-MLEM (List Mode Maximum Likelihood Expectation Maximization) calcule la suite de vecteurs ($\lambda^{(\ell)}$),

$$\lambda_j^{(\ell+1)} = \frac{\lambda_j^{(\ell)}}{s_j} \sum_i \frac{t_{ij}}{\sum_k t_{ik} \lambda_k^{(\ell)}}, \quad (2)$$

supposée converger vers le vecteur λ des intensités moyennes d'émission des voxels du volume. Dans (2), s_j représente la probabilité qu'un photon émis par le voxel j soit détecté et t_{ij} est la probabilité qu'un photon émis par le voxel j soit détecté en tant qu'événement i . Cette formule est la même que celle utilisée en imagerie TEP et TEMP. Seul le calcul des éléments t_{ij} diffère. Les imprécisions de détection, aussi bien en énergie qu'en position, font que ces éléments devraient être définis par un volume autour du cône Compton. Dans ce travail nous faisons cependant abstraction des erreurs de mesure, et nous nous contentons de les définir comme des aires de surface.

Les valeurs t_{ij} sont les éléments de la matrice $T = (t_{ij})$, la matrice de transition du système. Le rôle de cette matrice est crucial, car elle permet de modéliser toutes les caractéristiques du système d'imagerie, ainsi que les phénomènes parasites (diffusion, absorption) ayant lieu dans l'objet. Cette capacité constitue l'apport des méthodes itératives comparées aux méthodes analytiques. En contrepartie, le calcul de la matrice T et sa taille en sont le principal inconvénient, menant à des temps de calcul et un espace mémoire nécessaire beaucoup plus importants. Dans ce travail nous modélisons dans la matrice T uniquement la géométrie du dispositif d'imagerie. On suppose aussi, comme il est usuel de le faire, que la probabilité de détection en tant qu'événement i d'un photon émis par un point du voxel est constante dans ce dernier.

Deux approches de calcul des éléments de la matrice de transition du système ont été proposées dans la littérature. Dans la première, on modélise la surface d'un cône comme une superposition de coniques dans des plans parallèles [8, 9]. De cette façon, on décompose le calcul 3D par un sous-ensemble de calculs en 2D et on approche la surface d'intersection entre le cône Compton et un voxel par une valeur qui ne dépendra pas de la dimension de cette surface, ni des longueurs des courbes d'intersection. La deuxième approche [7, 10] consiste à modéliser la surface d'un cône comme un ensemble de génératrices équiréparties sur la surface [10] et de calculer les éléments de la matrice à partir des longueurs des rayons qui traversent chaque voxel. Une comparaison de ces deux méthodes a été faite dans [10] concluant que l'algorithme basé sur le lancer de rayons converge plus vite que l'empilement de coniques, alors que la complexité de l'algorithme d'initialisation, consistant essentiellement par le calcul des coefficients de la matrice T , est similaire en $O(N_\lambda N^2)$ pour N_λ photons détectés et une image reconstruite de $N \times N \times N$ voxels. Dans ce qui suit nous proposons une méthode de calcul basée sur le lancer de rayons, mais sans imposer une équirépartition sur la surface du cône. Les rayons seront définis par l'intersection entre le cône et le quadrillage de la surface du volume englobant l'objet à reconstruire. L'algorithme a l'avantage d'effectuer une seule détection des intersections d'une conique avec la grille de discrétisation ;

on évite aussi les erreurs numériques importantes liées aux événements ayant une trajectoire presque horizontale. En contrepartie, la précision est variable selon la distance entre le voxel et le diffuseur, et est liée au nombre de rayons qui traversent le voxel.

2 Méthodes

Modélisation du problème direct. Pour un photon γ émis au point V_0 , diffusé en V_1 et absorbé en V_2 , ayant déposé l'énergie E_1 dans le diffuseur et $E - E_1$ dans l'absorbeur, on note respectivement θ_1 et θ_2 les angles formés par $\overline{V_1 V_0}$ et $\overline{V_1 V_2}$ avec la verticale, β l'angle Compton (voir figure 1) et $\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_2$ les distances parcourues par le photon dans les détecteurs respectivement avant diffusion, après diffusion jusqu'à la sortie du premier détecteur et dans le second détecteur avant absorption totale.

La diffusion Compton peut alors être décrite par la densité de probabilité ([8]) :

$$p(V_1, E_1, V_2, E - E_1 | V_0) = \frac{1}{8\pi^2} \frac{\mu_C}{\mu_{1,t}} (1 - e^{-\mu_C \delta_{11}}) \quad (3)$$

$$\times K(\beta, E) e^{-\mu_{1,t} \delta_{12}} (1 - e^{-\mu_{2,t} \delta_2}) \frac{\cos(\theta_1) \cos(\theta_2)}{|V_0 V_1|^2 |V_1 V_2|^2},$$

où $\frac{\mu_C}{\mu_{1,t}}$ est le rapport entre les sections efficaces de diffusion Compton et d'absorption totale dans le premier détecteur, $\mu_{2,t}$ la section efficace d'absorption totale dans le second détecteur et $K(\beta, E)$ est la probabilité qu'un photon d'énergie E soit diffusé selon l'angle β dont la formule de calcul en fonction des énergies E et E_1 est donnée dans (1). La densité de probabilité en $(V_1, E_1, V_2, E - E_1)$, obtenue par la formule de la loi marginale, est :

$$p(V_1, E_1, V_2, E - E_1) = \int_{V_0 \in \mathcal{C}} p(V_1, E_1, V_2, E - E_1 | V_0) p(V_0) ds, \quad (4)$$

où $p(V_0)$ est la densité de la loi d'émission d'un photon prise en V_0 , ds est l'élément de surface et \mathcal{C} représente le cône défini par $(V_1, E_1, V_2, E - E_1)$.

Supposant que la densité $p(V_0)$ est uniforme à l'intérieur d'un voxel et en négligeant l'influence des sections efficaces de diffusion et d'absorption, la probabilité qu'un photon émis par le voxel j soit détecté comme l'événement i , correspondant à une réalisation de $(V_1, E_1, V_2, E - E_1)$, est proportionnelle à :

$$t_{ij} = K(\beta, E) \frac{\cos(\theta_2)}{|V_1 V_2|^2} \int_{V_0 \in \mathcal{C}} \frac{\cos(\theta_1)}{|V_0 V_1|^2} ds, \quad (5)$$

La sensibilité du système d'imagerie ne tient pas compte seulement des événements qui ont eu lieu, mais aussi de tous les événements qui auraient pu se produire. Elle joue sur l'aptitude de l'algorithme à reconstruire une image quantitative. Plusieurs approches sont actuellement utilisées, allant de l'hypothèse que la sensibilité est constante jusqu'à des formules un peu plus précises. L'expression suivant est proposée dans [9] :

$$s_j = \sum_D \frac{\cos \theta_1}{|V_0 V_1|^2} (1 - e^{-\mu_{1,t} \delta_{11}}), \quad (6)$$

où la somme est prise sur tous les éléments du diffuseur, V_0 est le centre du voxel j , V_1 est le centre de l'élément de diffuseur, θ_1 est l'angle fait par $\vec{V_1V_0}$ avec la verticale et δ_{11} est la longueur de l'intersection entre la droite (V_0V_1) et le diffuseur. Dans ce travail, nous avons pris $s_j = 1$

La sélection des rayons. L'approche que nous proposons ici consiste à modéliser la surface du cône Compton comme un ensemble de génératrices, mais celles-ci ne seront pas équireparties sur la surface, comme il avait été fait auparavant (voir par exemple [10]). Pour comprendre la raison de ce choix, prenons l'exemple d'un cône dont l'angle d'inclinaison de l'axe θ_2 , et l'angle Compton β , vérifient $\theta_2 + \beta > \pi/2$. Cette situation se produit en particulier lorsque l'absorbeur entoure le diffuseur comme dans [11]. L'intersection du cône avec un plan horizontal se fait alors selon une hyperbole. Un nombre très faible de génératrices correspondant à un échantillonnage régulier du paramètre angulaire du cône intersecteront alors le volume objet, ce qui conduira à une mauvaise estimation de la ligne de la matrice T associée à un tel événement. Même dans les situations moins extrêmes, un échantillonnage régulier de la surface ne permet pas toujours de réaliser un échantillonnage suffisant de la source.

L'algorithme que nous décrivons ci-dessous permet de sélectionner des rayons qui intersectent le volume et qui conduisent à un bon quadrillage de celui-ci.

Pour cela, et afin d'éviter de rechercher toutes les courbes d'intersection du cône avec le volume et pour ne pas avoir à gérer les intersections doubles des droites génératrices avec le volume objet, nous définissons la "surface guide" comme suit. Les rayons qui intersectent le volume objet ($ABCDMNPQ$ dans la figure 2.a) se trouvent dans l'hyperpyramide ayant pour base $ABCDMNPQ$ et pour apex le sommet du cône V_1 . En prolongeant les arêtes jusqu'à intersecter le plan supérieur $ABCD$, on obtient une surface plane comme dans l'exemple illustré dans la figure 2.b). Nous appelons surface guide le rectangle minimal qui couvre $ABCD$ et $M'N'P'Q'$, noté $RBSQ'$.

Pour trouver les points d'intersection du cône avec le quadrillage de la surface guide nous suivons la méthode décrite dans [6]. Ces points d'intersection, reliés au sommet du cône, définissent des génératrices sur sa surface. Nous utilisons ensuite l'algorithme de lancer de rayons décrit dans [12] pour calculer leur intersection avec le quadrillage 3D du volume initial.

Calcul numérique de la matrice de transition. Soit le cône Compton de sommet V_1 , cône défini par l'événement i . On lui associe un repère direct d'origine V_1 et d'axe des z parallèle à $\vec{V_2V_1}$. Une équation paramétrique du cône dans ce repère est

$$\begin{cases} x' = z' \tan \beta \cos \varphi \\ y' = z' \tan \beta \sin \varphi \\ z' = z' \end{cases} \quad z \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (7)$$

Soient M_{kl} les points où la génératrice d'angle φ_k intersecte le quadrillage du volume objet. Soit G_{kl} le milieu du segment

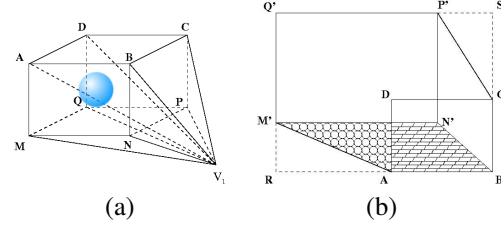


FIG. 2 – (a) Représentation de l'hyperpyramide définie par le volume englobant l'objet à reconstruire et le sommet du cône, (b) surface que son extension dessine sur le plan supérieur $ABCD$. Le rectangle $M'N'P'Q'$ est l'image projetée du rectangle $MNPQ$. La surface guide est la surface $RBSQ'$. Le rayon qui relie un point de la surface pavée avec des briques au sommet du cône, traverse la face supérieure $ABCD$ et la face latérale $ABNM$ du volume-objet. Le rayon qui relie un point de la surface pavée avec des cercles au sommet du cône, traverse les faces latérales $ABNM$ et $ADQM$ du volume-objet.

$|M_{k,l}M_{k,l-1}|$. La discrétisation de la formule (5), après développement de l'élément d'aire ds , montre que le coefficient t_{ij} peut être approché par :

$$\begin{aligned} \tilde{t}_{ij} &= K(\beta, E) \frac{\sin \beta}{D^2 \cos \theta_2} \\ &\times \sum_{G_{kl} \in \text{voxel } j} |M_{k,l}M_{k,l-1}| \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_{k-1}}{|V_1M_{kl}| + |V_1M_{k,l-1}|} \cos \theta_{1,k}. \end{aligned} \quad (8)$$

où D est l'écartement entre les deux détecteurs et où toutes les variables dépendent implicitement de i .

Dans cette formule on estime la probabilité de détecter un photon émis dans j comme événement i par la moyenne pondérée des longueurs de segments $|M_{k,l}M_{k,l-1}|$ des rayons qui traversent le voxel. Les poids prennent en compte non seulement la densité de probabilité $p(V_1, E_1, V_2, E - E_1|V_0)$ mais aussi l'élément de surface conique autour du segment, ce qui n'est pas fait lorsque T est calculée à partir des intersections de coniques avec les voxels.

3 Résultats

Nos premiers résultats s'appuient sur des données réalistes simulées à l'aide de MEGAlib, un module de simulation Monte Carlo basé sur GEANT4. Une sphère de diamètre 2 cm émet de manière isotrope des photons d'énergie 200 keV. Le volume englobant est un cube de 10 cm de côté, choisi de façon à ce que la source soit positionnée au centre.

La caméra simulée est composée de 3 diffuseurs en silicium (Si) de $19 \times 19 \text{ cm}^2$, et d'un absorbeur composé de cristaux d'iode de césium (CsI) de $36 \times 36 \times 2 \text{ cm}^3$, l'ensemble placé respectivement à 10, 11, 12 et 17 cm de la source. Le centre de la sphère se trouve au dessus du centre du détecteur (cf. figure 1). Les résolutions spatiale et énergétique du dispositif sont idéales, seul l'effet Doppler est pris en compte dans ces simulations.

Dans la figure 3 nous montrons deux coupes parallèles au détecteur dans l'image retroprojetée de 5 événements. La rétro-projection correspond à l'étape d'initialisation de l'algorithme.

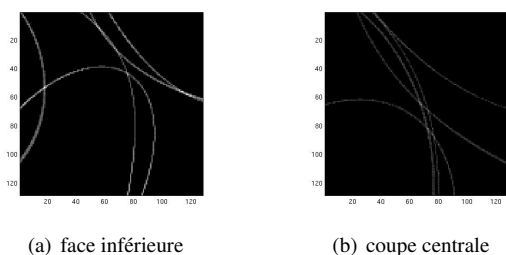


FIG. 3 – Retroprojection de 5 événements.

La figure 3 montre l'image reconstruite de la source, après 15 itérations, ainsi que l'influence du nombre d'événements. Le volume objet de $(10\text{ cm})^3$ est découpé en 20^3 voxels cubiques, ce qui donne pour la source un diamètre de 4 voxels. Les images (a) et (b) correspondent à une reconstruction à partir de 3000 événements, (c) et (d) utilisent 38600 événements. Les temps de calcul avec un processeur Intel Core i7 CPU, Q820@1.73 GHz sont mentionnés dans la légende.

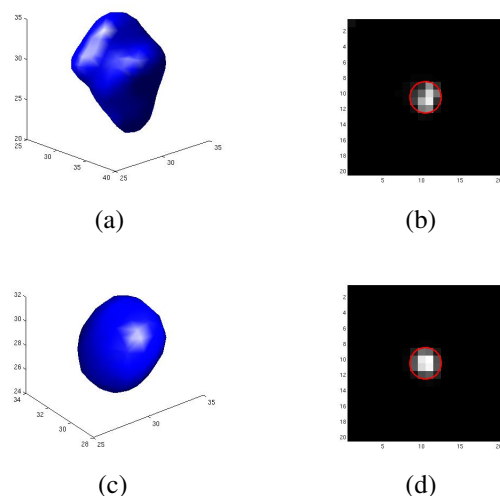


FIG. 4 – Reconstructions 3D de la source et coupes centrales parallèles au détecteur. (a), (b) 3000 événements. Temps de calcul : 16s. (c), (d) 38600 événements. Temps de calcul : 188,3s. Le volume englobant est un cube de $(10\text{ cm})^3$ composé de $20 \times 20 \times 20$ voxels et la source est une sphère de 2 cm de diamètre. 15 itérations. Sur les coupes, le cercle indique la position théorique de la source.

4 Conclusions

La méthode itérative de reconstruction est d'ores et déjà très utilisée, cependant nous avons apporté ici un nouvel algorithme pour son implémentation. Nous avons proposé pour la première fois une formule pour le calcul numérique de la matrice de transfert qui prend en compte la modélisation par des projections Compton avec des intégrales sur des surfaces coniques. Une comparaison avec des méthodes déjà existantes fera l'objet des travaux ultérieurs.

Remerciements. This research is supported by the ENVISION project (co-funded by the European Commission under

the FP7 Collaborative Projects Grant Agreement Nr. 241851FP7), and by ETOILE's Research Program (PRRH/UCBL, under CPER 2007-13 funding).

Références

- [1] M.J. Cree et P. J. Bones, "Towards direct reconstruction from a gamma camera based on Compton scattering", IEEE Trans. Med. Imaging, vol.13 pp 398-407, 1994.
- [2] L.C. Parra, "Reconstruction of cone-beam projections from Compton scattered data", IEEE Trans. Nucl. Sci., vol. 47 pp 1543-1550, 2000.
- [3] M. Hirasawa et T. Tomitani, "An analytical image reconstruction algorithm to compensate for scattering angle broadening in Compton cameras", Phys. Med. Biol., vol. 48 pp 1009-1026, 2003.
- [4] V. Maxim, M. Frandes et R. Prost, "Analytical inversion of the Compton Transform using the full set of available projections", Inverse Problems, vol. 25 No. 9 pp 1-31, 2009.
- [5] X. Lojacono, V. Maxim, A. Zoglauer, F. Peyrin, R. Prost, "A filtered backprojection reconstruction algorithm for Compton camera", Fully3D, 2011.
- [6] S.J. Wilderman, W. Les Rogers, G.F. Knoll et C. Engdahl, "Fast algorithm for list-mode back-projection of Compton scatter camera data", IEEE Trans. on Nucl. Sci., vol. 45 pp 957-962, 1998.
- [7] S.R. Tornga, M.W. Rawool Sullivan et J.P. Sullivan, "Three-dimensional Compton imaging using list-mode maximum likelihood expectation maximization", IEEE Trans. Nucl. Sci., vol. 56 No. 3 pp 1372-1376, 2009.
- [8] S.J. Wilderman, N.H. Clinthorne, J.A. Fessler, C-h. Hua et W. Les Rogers, "List mode EM reconstruction of Compton scatter camera images in 3-D", IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record, vol.2 pp 15/292-15/295, 2000.
- [9] S.J. Wilderman, J.A. Fessler, N.H. Clinthorne, J.W. LeBlanc et W.L. Rogers, "Improved modeling of system response in list mode EM reconstruction for Compton scatter camera images", Nuclear Science, IEEE Transactions, vol.48 No.1 pp 111-116, 2001
- [10] S.M. Kim, J.S. Lee, M.N. Lee, J.H. Lee, C.S. Lee, C.H. Kim, D.S. Lee et S.J. Lee, "Two approaches to implementing projector-backprojector pairs for 3D reconstruction for Compton scattered data", Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Research A 571, pp 255-258, 2007.
- [11] M. Frandes, A. Zoglauer, V. Maxim et R. Prost, "A Tracking Compton-Scattering Imaging System for Hadron Therapy Monitoring", IEEE Trans. Nucl. Sci., vol.57 No. 1 pp 144-150, 2010.
- [12] H. Zhao et A.J. Reader. "Fast ray-tracing technique to calculate line integral paths in voxel arrays", Nuclear Science Symposium Conference Record, vol.4 pp 2808-2812, 2003