

Filtrage bayésien avec rétroaction. Conséquences sur le filtrage particulaire

Eric LE CARPENTIER

LUNAM Université, Ecole Centrale de Nantes
IRCCyN UMR CNRS 6597 (Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes)
BP 92101, 1 rue de la Noe, 44321 Nantes Cedex 03
Eric.Le-Carpentier@irccyn.ec-nantes.fr

Résumé – Le filtrage bayésien est en général présenté dans le cas d’un modèle de Markov caché à canal sans mémoire. Cette propriété ne peut être vérifiée, par exemple, lorsqu’un système est commandé en boucle fermée. On présente une hypothèse de modèle moins contraignante, qui généralise certaines extensions trouvées dans la littérature, mais dans lequel l’état ne vérifie pas nécessairement la condition de Markov (il ne la vérifie que *conditionnellement à la séquence des observations*). On développe le filtrage particulaire marginal sous cette hypothèse, en examinant les conséquences sur les mécanismes d’adaptation utilisés dans le filtrage particulaire auxiliaire.

Abstract – Bayes filtering on hidden Markov models is usually presented in the memoryless channel case. This hypothesis cannot be fulfilled, for example, when a system is controlled with feedback. We propose in this paper a weaker assumption, which is a more widely applicable, in which the state is not Markovian (more precisely, the state is Markovian, but *conditionally to the observation sequence*). Consequences on marginal particle filter are discussed, with a focus on adaptation schemes used in the auxiliary particle filter.

1 Introduction

Soit $(x[n])_{n \geq 1}$ une séquence de variables aléatoires non observables, l’état caché. L’évolution de ce phénomène se traduit par l’observation d’une séquence de variables aléatoires $(y[n])_{n \geq 1}$. On cherche, pour tout n , à fournir en ligne une estimation $\hat{x}^{|n}[n]$ de $x[n]$ connaissant $y[1:n] = (y[1], \dots, y[n])$. On utilisera, pour simplifier les notations, l’exposant $^{|n}$ qui signifie « connaissant $y[1:n]$ ». Dans un cadre bayésien, il s’agit alors d’exprimer la densité de probabilité $p_{x[n]}^{|n}$ de l’état à l’instant n connaissant les observations jusqu’à l’instant n pour obtenir, par exemple, l’estimateur en moyenne quadratique (MMSE) :

$$\hat{x}^{|n}[n] = \mathbb{E}^{|n} \{x[n]\} = \int x p_{x[n]}^{|n}(x) dx$$

Le filtrage bayésien et ses déclinaisons (filtrage de Kalman, filtrage particulaire) sont en général développés dans le cadre des modèles de Markov caché (HMM) à canal sans mémoire [1, 2, 3]. Dans [4, 5, 6], est autorisée une auto-régression de l’observation conditionnellement à l’état courant, mais l’état reste markovien. Il existe d’autres extensions, telles que les chaînes de Markov couple [7], ou le couple état-observation est une chaîne de Markov. Plus récemment, dans [8], a été proposée une propriété de Markov plus générale, dite d’ordre supérieur.

Mais ces extensions ne règlent pas le problème de l’estimation de l’état dans un système dynamique piloté en boucle fermée, dans lequel la loi de commande réinjecte à chaque instant

une fonction de l’historique des observations. L’état, à tout instant, dépend donc de tout l’historique des états, via l’historique des observations. Dans [9], ceci est pris en compte, mais sans aucune hypothèse markovienne.

On se propose, dans cet article, de présenter une contrainte de modélisation markovienne suffisamment générale pour pouvoir écrire simplement le filtrage bayésien, et d’en étudier les conséquences sur le filtrage particulaire marginal.

2 Filtrage bayésien

On donne ci-dessous les équations du filtrage bayésien, présentées sous la forme d’une cascade de calculs de lois de probabilité, initialisée par la loi *a priori* sur l’état initial de densité $p_{x[1]}^{|0} = p_{x[1]}$, et permettant, pour tout n :

- de prédire l’observation $y[n]$ connaissant les observations passées :

$$p_{y[n]}^{|n-1}(y) = \int p_{y[n]|x[n]}^{|n-1}(y, x) p_{x[n]}^{|n-1}(x) dx \quad (1)$$

- après observation de $y[n]$, d’estimer l’état présent $x[n]$ connaissant les observations passées et courante :

$$\underbrace{p_{x[n]|y[n]}^{|n-1}(x, y[n])}_{p_{x[n]}^{|n}(x)} = \frac{p_{y[n]|x[n]}^{|n-1}(y[n], x) p_{x[n]}^{|n-1}(x)}{p_{y[n]}^{|n-1}(y[n])} \quad (2)$$

- et de prédire l’état futur $x[n+1]$ connaissant les observa-

tions passées et courante :

$$p_{x[n+1]}^{|n}(x_+) = \int p_{x[n+1]|x[n]}^{|n}(x_+, x) p_{x[n]}^{|n}(x) dx \quad (3)$$

On reconnaît, dans la formule (1), la loi des probabilités totales conditionnée par les observations passées $y[1 : n-1]$, dans la formule (2), la loi de Bayes sous la même condition et, dans la formule (3), la loi des probabilités totales conditionnée par les observations passées et présente $y[1 : n]$.

Il est habituel de se restreindre aux modèles de Markov cachés à canal sans mémoire, c'est-à-dire tels que : a) la suite des états est une chaîne de Markov, b) conditionnellement à la suite des états, les observations sont indépendantes et c) l'observation à l'instant n est indépendante des états aux instants $\neq n$. Mais, comme il est souligné dans [10], cette approche n'est pas adaptée si l'on souhaite faire intervenir une rétroaction de l'historique des observations.

Il est facile de vérifier qu'on aboutit également au modèle de Markov caché à canal sans mémoire à l'aide de la suite d'hypothèses suivantes : H1) l'état courant $x[n]$ et l'historique des observations $y[1 : n-1]$ ont capturé toute l'information sur les états futurs et les observations courante $y[n]$ et futures, H2) l'état courant $x[n]$ suffit et, H3) connaissant l'état courant $x[n]$, état futur $x[n+1]$ et observation courante $y[n]$ sont indépendants.

$$p_{x[n+1], y[n]|x[1:n]}^{|n-1} = p_{x[n+1], y[n]|x[n]}^{|n-1} \quad (\text{H1})$$

$$= p_{x[n+1], y[n]|x[n]} \quad (+ \text{H2})$$

$$= p_{x[n+1]|x[n]} p_{y[n]|x[n]} \quad (+ \text{H3})$$

On a donc fait apparaître les densités des lois de transition $p_{x[n+1]|x[n]}^{|n}$ et d'émission $p_{y[n]|x[n]}^{|n}$.

Mais les hypothèses H2 et H3, qui permettent de revenir au modèle standard des modèles de Markov cachés à canal sans mémoire, ne sont en fait pas utiles pour utiliser la récurrence fondée sur les équations (1), (2) et (3) ; il est suffisant de s'en tenir à l'hypothèse H1, en faisant intervenir la densité $p_{x[n+1], y[n]|x[n]}^{|n-1}$ qui se décompose bien sûr sous la forme :

$$p_{x[n+1], y[n]|x[n]}^{|n-1} = p_{y[n]|x[n]}^{|n-1} p_{x[n+1]|x[n]}^{|n} \quad (4)$$

On a donc fait apparaître les densités des lois de transition $p_{x[n+1]|x[n]}^{|n}$ et d'émission $p_{y[n]|x[n]}^{|n-1}$. La séquence des états n'est plus une chaîne de Markov (marginale). Par contre, c'est une chaîne de Markov *conditionnellement à la suite des observations*.

3 Exemples

On commande le système dynamique dont la représentation dans l'espace d'état est :

$$\begin{cases} y[n] &= h(x[n]) + w[n] \\ x[n+1] &= f(x[n], c[n]) + v[n] \end{cases}$$

avec $(x[1], v[1], w[1], v[2], w[2], \dots)$, c'est-à-dire l'état initial et les séquences de bruit, sont mutuellement indépendants, et où

$(c[n])_{n \geq 1}$ représente la séquence de commande. En boucle ouverte, la commande étant supposée déterministe, on a alors un modèle de Markov caché à canal sans mémoire dont les lois d'émission et de transition s'écrivent :

$$\begin{cases} p_{y[n]|x[n]}(y, x) &= p_{w[n]}(y - h(x)) \\ p_{x[n+1]|x[n]}(x_+, x) &= p_{v[n]}(x_+ - f(x, c[n])) \end{cases}$$

La formule (4) s'écrit alors :

$$p_{x[n+1], y[n]|x[n]}^{|n-1} = p_{y[n]|x[n]} p_{x[n+1]|x[n]}$$

Par contre, en boucle fermée, la commande $c^n[n]$ est obtenue par filtrage de l'observation $y[1 : n]$ et n'est plus déterministe, il faut donc utiliser la loi de transition :

$$p_{x[n+1]|x[n]}^{|n}(x_+, x) = p_{v[n]}(x_+ - f(x, c^n[n]))$$

La formule (4) s'écrit alors :

$$p_{x[n+1], y[n]|x[n]}^{|n-1} = p_{y[n]|x[n]} p_{x[n+1]|x[n]}^{|n}$$

Sur cet exemple précis, on constate cependant que l'algorithme de filtrage bayésien sera exactement le même, qu'on soit en boucle ouverte ou en boucle fermée.

Inversement, dans les processus commutés à régime markovien, tels que les processus auto-régressifs commutés [4, 5, 6], l'état reste markovien, et la formule (4) s'écrit :

$$p_{x[n+1], y[n]|x[n]}^{|n-1} = p_{y[n]|x[n]}^{|n-1} p_{x[n+1]|x[n]}$$

4 Filtrage particulaire

Quelles sont les répercussions de cette généralisation, en termes de loi de probabilité, sur les implémentations approchées du filtrage bayésien telles que le filtrage particulaire marginal [11] ?

On cherche à estimer en ligne l'état d'un modèle caractérisé par les densités $p_{x[1]}$ (loi initiale), $p_{y[n]|x[n]}^{|n-1}$ (loi d'émission) et $p_{x[n+1]|x[n]}^{|n}$ (loi de transition). Le filtrage particulaire [3, 12] consiste à propager, par filtrage bayésien, une approximation particulaire $\hat{p}_{x[n]}^{|n}$ de la densité $p_{x[n]}^{|n}$, caractérisée par un lot de n_p particules pondérées $(u_q[n], \omega_q[n])_{1 \leq q \leq n_p}$:

$$\hat{p}_{x[n]}^{|n}(x) = \sum_{q=1}^{n_p} \omega_q[n] \delta(x - u_q[n])$$

On constate facilement qu'à l'issue de l'étape décrite dans la formule (3), la densité obtenue est celle d'une loi de mélange ; elle n'est donc plus sous forme particulaire, et doit être ré-échantillonnée.

- On se donne une chaîne instrumentale $u = (u[n])_{n \geq 1}$
- de Markov *connaissant les observations* $(y[n])_{n \geq 1}$;
- caractérisée par les densités $p_{u[1]}^{|1}$ (loi initiale) et $p_{u[n+1]|u[n]}^{|n+1}$ (loi de transition) ;
- qu'on sait simuler (pour générer les particules) ;
- telle qu'on sait calculer $\frac{p_{x[1]}^{|1}}{p_{u[1]}^{|1}}$ et $\frac{p_{x[n+1]|x[n]}^{|n+1}}{p_{u[n+1]|u[n]}^{|n+1}}$ (pour mettre à jour les poids).

On se donne aussi une loi discrète, pouvant évoluer au cours du temps, de paramètres $(\lambda_1[n], \dots, \lambda_{n_p}[n])$.

Cette loi discrète et la chaîne instrumentale vont permettre de ré-échantillonner la loi de mélange par échantillonnage préférentiel.

En regroupant les étapes de prédiction et d'estimation en une seule étape d'estimation, on obtient l'algorithme ci-dessous.

La récurrence est initialisée, pour $n = 1$, par :

- 1^{re} observation, soit $y[1]$.
- Pour tout q , échantillonnage :
 - tirer $u_q[1]$ avec loi de densité $p_{u[1]}^1$
 - mettre à jour le poids

$$\bar{\omega}_q[1] = \frac{1}{n_p} \frac{p_{x[1]}(u_q[1])}{p_{u[1]}^1(u_q[1])} p_{y[1]|x[1]}(y[1], u_q[1]) \quad (5)$$

- Pour tout q , normalisation des poids :

$$\omega_q[1] = \frac{\bar{\omega}_q[1]}{\sum_{\ell=1}^{n_p} \bar{\omega}_\ell[1]}$$

- Estimation 1^{er} état :

$$\hat{x}^1[1] = \sum_{q=1}^{n_p} \omega_q[1] u_q[1]$$

La récurrence, pour tout $n \geq 2$, alimentée par les particules $(u_q[n-1], \omega_q[n-1])_{1 \leq q \leq n_p}$, s'écrit :

- n^e observation, soit $y[n]$.
- Pour tout q , sélection :¹
 - tirer l'indice $z_q[n-1]$ de la particule parente avec la loi discrète $(\lambda_1[n-1], \dots, \lambda_{n_p}[n-1])$
 - recopier la valeur $\tilde{u}_q[n-1] = u_{z_q[n-1]}[n-1]$
 - mettre à jour le poids $\tilde{\omega}_q[n-1] = \frac{\omega_{z_q[n-1]}[n-1]}{n_p \lambda_{z_q[n-1]}[n-1]}$
- Pour tout q , mutation :
 - tirer $u_q[n]$ avec loi de densité $p_{u[n]|u[n-1]}^n(\cdot, \tilde{u}_q[n-1])$
 - mettre à jour le poids

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_q[n] &= \tilde{\omega}_q[n-1] \times \\ &\frac{p_{x[n]|x[n-1]}^{n-1}(u_q[n], \tilde{u}_q[n-1])}{p_{u[n]|u[n-1]}^n(u_q[n], \tilde{u}_q[n-1])} \times \\ &p_{y[n]|x[n]}^{n-1}(y[n], u_q[n]) \end{aligned} \quad (6)$$

- Pour tout q , normalisation des poids :

$$\omega_q[n] = \frac{\bar{\omega}_q[n]}{\sum_{\ell=1}^{n_p} \bar{\omega}_\ell[n]}$$

1. Ou, ce qui est équivalent :

- Tirer $(n_{\text{desc}}(z))_{1 \leq z \leq n_p}$ suivant la loi multinomiale de paramètres $(n_p, \lambda_1[n-1], \dots, \lambda_{n_p}[n-1])$
- Redistribuer les particules :

$$(\tilde{u}_q[n-1], \tilde{\omega}_q[n-1])_{1 \leq q \leq n_p} = \underbrace{\left(\left(u_z[n-1], \frac{\omega_z[n-1]}{n_p \lambda_z[n-1]} \right) \right)_{1 \leq z \leq n_p}}_{n_{\text{desc}}(z) \text{ fois}}$$

- Estimation n^e état :

$$\hat{x}^n[n] = \sum_{q=1}^{n_p} \omega_q[n] u_q[n]$$

C'est la forme générale d'un filtre particulière auxiliaire (où on utilise la variable auxiliaire $z_q[n-1]$ pour mettre à jour les poids lors de l'échantillonnage préférentiel [13]), si ce n'est qu'on a remplacé les lois de transition et d'émission par leur forme conditionnée par le passé des observations. Comment choisir les paramètres de la loi discrète et la loi de la chaîne instrumentale ? En reprenant les mécanismes d'adaptation proposés dans [13], on obtient (voir l'annexe) que si on choisit, lors de la redistribution :

$$\lambda_z[n-1] \propto \omega_z[n-1] p_{y[n]|x[n-1]}^{n-1}(y[n], u_z[n-1]) \quad (7)$$

et, lors de la mutation :

$$\begin{aligned} p_{u[n]|u[n-1]}^n &= p_{x[n]|x[n-1]}^n \\ &= p_{x[n]|x[n-1], y[n]}^{n-1} \end{aligned} \quad (8)$$

alors, tous les poids sont égaux ; c'est la pleine adaptation. On retrouve les formules bien connues de la pleine adaptation, si ce n'est que la vraisemblance prédictive dans l'équation (7) est conditionnée par le passé des observations, ainsi que la densité de loi de transition dans l'équation (8). Dans le cas particulier des modèles de Markov cachés à canal sans mémoire, la loi de transition optimale n'est conditionnée que par l'observation courante, et non les observations passées, comme cela est indiqué dans [12] ; mais c'est une conséquence naturelle de ce cas particulier.

Evidemment, dans le cas général proposé dans cette étude, il n'est pas plus facile d'obtenir l'expression des lois pleinement adaptées que dans le cas particulier des chaînes de Markov cachées, mais il est possible de poursuivre cette étude pour approcher la pleine adaptation à l'aide, par exemple, d'un filtre particulière sans parfum.

5 Conclusion et perspectives

On a montré qu'il est licite d'employer le filtrage bayésien dans le cas d'un modèle présentant une rétroaction de la séquence des observations sur l'état, qui perd ainsi la propriété markovienne. On a récrit le filtrage particulière dans ce cas plus général. Les retombées pratiques sont réduites ; dans le cas d'un système dynamique piloté en boucle fermée à l'aide d'un filtrage *déterministe* des observations, les algorithmes seront dans la plupart des cas inchangés.

Cependant, dans un but d'intégration, il peut être intéressant d'examiner le cas d'une loi de commande par retour d'état estimé par filtrage particulière ; il serait alors nécessaire de prendre en compte globalement le modèle du système et la structure du filtre particulière employé.

Annexe : démonstration des formules de pleine adaptation

En utilisant la formule $p_{y[n]|x[n]}^{n-1} = p_{y[n]|x[n],x[n-1]}^{n-1}$, les poids non normalisés donnés par la formule (6) peuvent aussi s'écrire :

$$\bar{\omega}_q[n] = \tilde{\omega}_q[n-1] \frac{p_{x[n],y[n]|x[n-1]}^{n-1}(u_q[n], y[n], \tilde{u}_q[n-1])}{p_{u_q[n]|u_q[n-1]}^n(u_q[n], \tilde{u}_q[n-1])}$$

D'où on déduit :

$$\bar{\omega}_q[n] = \underbrace{\tilde{\omega}_q[n-1] p_{y[n]|x[n-1]}^{n-1}(y[n], \tilde{u}_q[n-1])}_{1^{\text{er}} \text{ terme}} \times \underbrace{\frac{p_{x[n]|x[n-1]}^n(u_q[n], \tilde{u}_q[n-1])}{p_{u_q[n]|u_q[n-1]}^n(u_q[n], \tilde{u}_q[n-1])}}_{2^{\text{e}} \text{ terme}} \quad (9)$$

On se place juste avant le tirage des nouvelles particules, les particules parentes ayant été sélectionnées, c'est-à-dire connaissant la variable $C = (y[1:n], z_{1:n_p}[1:n-1], u_{1:n_p}[1:n-1])$. On va montrer que conditionnellement à C , tous les poids sont de même moyenne si la formule (7) est vérifiée, et de variance nulle si la condition (8) est vérifiée.

A C connu, le 1^{er} terme de la formule (9) est fixé, et les particules sont tirées suivant la loi dont la densité est le dénominateur du 2^e terme ; le 2^e terme est donc de moyenne 1 ; on obtient immédiatement :

$$\begin{aligned} E\{\bar{\omega}_q[n] | C\} &= \tilde{\omega}_q[n-1] p_{y[n]|x[n-1]}^{n-1}(y[n], \tilde{u}_q[n-1]) \\ &= \frac{\omega_{z_q[n-1]}[n-1]}{n_p \lambda_{z_q[n-1]}[n-1]} p_{y[n]|x[n-1]}^{n-1}(y[n], u_{z_q[n-1]}[n-1]) \end{aligned}$$

Donc, sous la condition (7), tous les poids sont de même moyenne. D'autre part, sous la condition (8), le 2^e terme vaut 1. Le 1^{er} terme étant fixé connaissant C , les poids sont donc déterminés.

Les poids $\bar{\omega}_q[n]$ étant de même moyenne et déterminés, ils sont donc égaux. Après normalisation, les poids $\omega_q[n]$ sont tous égaux à $\frac{1}{n_p}$, les particules sont toutes également représentées pour calculer l'estimateur $\hat{x}^n[n]$, c'est la pleine adaptation.

Références

- [1] Yariv EPHRAIM et Neri MERHAV : Hidden Markov Processes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 48(6):1518–1569, juin 2002.
- [2] François LEGLAND : Filtrage particulaire. *In Colloque GRETSI sur le traitement du signal et des images*, Paris, 2003.
- [3] Olivier CAPPÉ, Simon J. GODSILL et Eric MOULINES : An Overview of Existing Methods and Recent Advances

in Sequential Monte Carlo. *Proceedings of the IEEE*, 95(5), mai 2007.

- [4] Yariv EPHRAIM et William J.J. ROBERTS : Revisiting Autoregressive Hidden Markov Modeling of Speech Signals. *IEEE Signal Processing Letters*, 12(2):166–169, 2005.
- [5] Naoto KUNITOMO et Seisho SATO : Asymmetry in economic time series and the simultaneous switching autoregressive model. *Structural Change and Economic Dynamics*, 7(1):1–34, 1996.
- [6] Markku LANNE et Helmut LUETKEPOHL : Stock Prices and Economic Fluctuations : A Markov Switching Structural Vector Autoregressive Analysis. Economics Working Papers ECO2008/29, European University Institute, 2008.
- [7] Wojciech PIECZYNSKI : Pairwise Markov chains. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 25(5):634–639, 2003.
- [8] Pan PAN et Dan SCHONFELD : Visual Tracking Using High-Order Particle Filtering. *IEEE Signal Processing Letters*, 18(1):51–54, janvier 2011.
- [9] Dan CRISAN et Arnaud DOUCET : Convergence of sequential monte carlo methods. Rapport technique, CUED/F-INFENG/TR381, Department of Engineering, University of Cambridge, 2000.
- [10] James L. MASSEY : Causality, Feedback And Directed Information. *In Intl. Symp. on Info. Th. and its Applications*, pages 27–30, Waikiki, Hawaii, novembre 1990.
- [11] Mike KLAAS, Nando de FREITAS et Arnaud DOUCET : Toward Practical N2 Monte Carlo : the Marginal Particle Filter. *In Proceedings of the Twenty-First Conference Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI-05)*, pages 308–315, Arlington, Virginia, 2005. AUAI Press.
- [12] Arnaud DOUCET et Adam M. JOHANSEN : A tutorial on particle filtering and smoothing : fifteen years later. *In D. CRISAN et B. ROZOVSKY, éditeurs : Handbook of Nonlinear Filtering*. Oxford University Press, 2009.
- [13] Michael K. PITT et Neil SHEPHARD : Filtering via Simulation : Auxiliary Particle Filters. *Journal of the American Statistical Association*, 94(446):590–599, 1999.