

Apport des dictionnaires temps-fréquence, de la parcimonie et des structures pour l'imagerie cérébrale fonctionnelle M/EEG

Alexandre GRAMFORT^{1,2}, Daniel STROHMEIER³, Jens HAUEISEN³, Matti HAMALAINEN¹, Matthieu KOWALSKI⁴

¹Department of Radiology, Martinos Center for Biomedical Imaging, Massachusetts General Hospital, Harvard Medical School, Boston, MA.

²Parietal Project Team, INRIA Saclay-Ile de France, France.

³Institute of Biomedical Engineering and Informatics, Ilmenau University of Technology, Ilmenau, Germany and Biomagnetic Center, Department of Neurology, University Hospital Jena, Jena, Allemagne

⁴Univ. Paris-Sud, Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS-SUPELEC-Univ. Paris-Sud) SUPELEC, Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France

gramfort@nmr.mgh.harvard.edu, daniel.strohmeier@tu-ilmenau.de, msh@nmr.mgh.harvard.edu, jens.haueisen@tu-ilmenau.de, kowalski@lss.supelec.fr

Résumé – On s'intéresse au problème inverse mal posé rencontré dans la localisation de sources d'activité cérébrale par M/EEG (magneto/électro-encéphalographie). Bien qu'on ait à disposition un modèle physique réaliste de la diffusion (ou du « mélange ») des sources, le caractère très sous-déterminé le rend très difficile à inverser. La nécessité de trouver des *a priori* forts et pertinents physiquement sur les sources est une des parties difficiles de ce problème. Bien que les ondelettes et les gaborettes soient largement utilisées en traitement du signal pour l'analyse temps-fréquence et le débruitage, elles n'ont été que relativement peu employées afin d'améliorer le problème inverse M/EEG. On présente comment les décompositions temps-fréquence et les *a priori* de parcimonie structurée peuvent être utilisés afin d'obtenir un *a priori* convexe et physiologiquement motivé. L'*a priori* introduit ici favorise des estimations avec peu de sources cérébrales actives, tout en ayant un décours temporel lisse. La méthode présentée est alors capable de reconstruire des signaux corticaux non-stationnaires. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux obtenus par l'état de l'art sur des signaux MEG simulés, mais aussi sur des données réelles.

Abstract – We interested in the ill-posed inverse problem that aims at localizing brain activations with magneto-electroencephalography (M/EEG). Even with a realistic forward model derived from physics, the underdetermined nature of this problem makes it difficult to invert. One of the challenge is to find strong and relevant priors on the sources. Although the Wavelets and Gaborets are intensively used in signal processing, they have rarely been used to improve M/EEG source localizations. We present how the time-frequency decompositions and structured sparse priors can be used in order to obtain a convex prior that is physiologically meaningful. The prior introduced here promotes estimates with few active brain sources having smooth time-courses. The presented method is able to reconstruct non-stationary brain signals. The obtained results are compared with the state-of-the art methods on both simulated and real data.

1 Introduction

La magnéto- et l'électro-encéphalographie (M/EEG) mesurent à l'extérieure de la tête, et donc de façon non-invasive, les champs électro-magnétiques induits par l'activité électrique des neurones. Le but de l'analyse de ces données est la localisation des sources à l'origine du signal mesuré. Nous considérons ici les modèles de sources distribuées. Ils consistent à placer sur la surface du cortex des milliers sources. Chaque source est modélisée par un dipôle de courant. D'après les équations de Maxwell, chaque dipôle ajoute sa contribution de façon linéaire au signal mesuré. Le problème direct peut alors s'écrire comme une problème linéaire.

Cependant, le nombre de sources est bien supérieur au nombre de capteurs M/EEG, ce qui rend le problème extrêmement mal posé. Il est donc nécessaire d'utiliser des connaissances *a priori*

basées sur les propriétés des sources. Les *a priori* classiques utilisent une norme de Frobenius afin d'obtenir une solution d'énergie minimale. Plus récemment, des *a priori* parcimonieux comme la norme ℓ_1 ont été introduit afin de prendre en compte le fait que seules quelques régions cérébrales sont actives durant une tâche cognitive.

Bien que les décompositions en ondelettes ou l'analyse temps-fréquence (TF) soit utilisée couramment en M/EEG pour retrouver des composantes transitoire et oscillatoire dans le signal, de telles décompositions ont rarement été employées afin de mieux contraindre le problème inverse.

On propose ici d'utiliser ces deux stratégies pour construire un *a priori* physiologiquement motivé, en utilisant la composition d'une norme mixte ℓ_{21} – permettant de regrouper en temps l'activité des régions dans le cerveaux – et d'une norme ℓ_1 pour imposer de la parcimonie dans un dictionnaire de Gabor.

2 Transformée de Gabor

On présente brièvement la définition et les propriétés essentielles d'une transformée de Gabor. On pourra se référer à [2] pour plus de détails. Étant donné un signal temporel, sa transformée de Fourier permet d'estimer son contenu fréquentiel mais on perd alors toute l'information temporel. Afin d'analyser l'évolution du spectre en fonction du temps, Gabor introduit des atomes de Fourier fenêtré, en calculant la transformée de Fourier dans une fenêtre gaussienne. Lorsqu'on fait glisser de façon continue la fenêtre d'analyse, on obtient la transformée de Fourier à court terme (STFT). Pour des raisons numériques pratiques, il devient nécessaire de discrétiser proprement une telle analyse. C'est cette version discrète de la transformée de Fourier à court terme qu'on appellera transformée de Gabor.

En dimension finie, soit $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^T$ la fenêtre d'analyse. Soit $f_0 \in \mathbb{N}$ et $k_0 \in \mathbb{N}$ les taux d'échantillonnage respectivement en temps et fréquence du plan temps-fréquence généré par la STF. Les translattées modulées de la fenêtre d'analyse génèrent une famille d'atomes de Gabor $(\phi_{mf})_{mf}$. Soit K le nombre d'atomes. Ces atomes peuvent être écrits comme

$$\phi_{mf}[n] = \mathbf{g}[n - mk_0] e^{\frac{i2\pi f_0 f n}{T}},$$

avec $m \in \{0, \dots, \frac{T}{k_0} - 1\}$, $f \in \{0, \dots, \frac{T}{f_0} - 1\}$.

Si le produit $f_0 k_0$ est assez petit, *i.e.*, le plan temps-fréquence est suffisamment échantillonné, la famille $(\phi_{mf})_{mf}$ est un repère de \mathbb{R}^T , *i.e.*, on peut retrouver n'importe quel signal à partir de ses coefficients de Gabor $(\langle \mathbf{x}, \phi_{mf} \rangle) = \Phi^H \mathbf{x}$. On supposera bien entendu que cette condition est vérifiée dans le reste de l'article.

Plus précisément, cela implique qu'il existe deux constantes $A, B > 0$ telles que

$$A \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \sum_{m,f} \langle \mathbf{x}, \phi_{mf} \rangle \leq B \|\mathbf{x}\|_2^2. \quad (1)$$

Lorsque $A = B$, le repère est dit « ajusté » et si $A = B = 1$ alors le repère est une base orthogonale. La théorème de Balian-Law nous dit qu'il est impossible de construire un repère de Gabor qui est une base orthogonale lorsque la fenêtre d'analyse est Gaussienne (plus généralement ce sont les propriétés de régularité qui en font une fenêtre « douce »). Par conséquent, une transformée de Gabor est redondante. Cela implique qu'il existe une infinité de reconstruction possible de \mathbf{x} .

La reconstruction canonique de \mathbf{x} à partir de ses coefficients de Gabor nécessite une fenêtre duale notée $\tilde{\mathbf{g}}$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_{m,f} \langle \mathbf{x}, \phi_{mf} \rangle \tilde{\phi}_{mf} = \sum_{m,f} \langle \mathbf{x}, \tilde{\phi}_{mf} \rangle \phi_{mf} \\ &= \Phi^H \mathbf{x} \Phi = \tilde{\Phi}^H \mathbf{x} \Phi, \end{aligned}$$

où $\tilde{\Phi}$ est le dictionnaire de Gabor formé à partir de la fenêtre duale. Lorsque le repère est ajusté, on a alors simplement $\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{g}$, et plus particulièrement, on a $\Phi \tilde{\Phi}^H = \|\Phi\|^2 \mathbf{Id}^1$. La représentation étant redondante, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^T$ on peut trouver un ensemble de coefficients z_{mf} tels que $\mathbf{x} = \sum_{m,f} z_{mf} \phi_{mf}$,

de manière à ce que les z_{mf} vérifient les propriétés désirées par l'application considérée. Par exemple, on s'intéressera ici aux représentations parcimonieuses.

En pratique, les coefficients de Gabor sont calculés en utilisant la transformée de Fourier rapide. L'opération de synthèse (et donc la transformée inverse avec la fenêtre idoine) est effectuée par transformée de Fourier inverse et des techniques d'« overlap-add ». Ces opérations d'analyse/synthèse sont implémentées de manière efficace dans la toolbox Matlab et octave² [9].

3 Méthode

L'étude du problème directe, c'est-à-dire la façon dont le champs électro-magnétique se propage à travers le cerveau, permet une estimation de la matrice de gain, notée \mathbf{G} [3]. C'est un opérateur linéaire $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{N \times P}$, où N est le nombre de capteurs et P le nombre de sources. On note $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N \times T}$ les signaux M/EEG mesurés, avec T le nombre d'échantillons temporels. Le lien entre les mesures \mathbf{M} et les sources $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{P \times T}$ est donné par $\mathbf{M} = \mathbf{G}\mathbf{X} + \mathbf{E}$, où \mathbf{E} représente un bruit additif tenant compte du bruit de mesure et de modèle. Les sources \mathbf{X} sont supposées admettre un représentation parcimonieuse dans les dictionnaires de Gabor, c'est-à-dire que seuls quelques atomes temps-fréquences permettent d'obtenir une bonne estimation pour une source donnée. Si l'on note $\Phi^H \in \mathbb{C}^{K \times T}$ un tel dictionnaire de K atomes de Gabor, le modèle considéré peut s'écrire comme : $\mathbf{M} = \mathbf{G}\mathbf{X} + \mathbf{E} = \mathbf{G}\mathbf{Z}\Phi^H + \mathbf{E}$, où $\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{P \times K}$ sont les coefficients de Gabor. On suppose que le bruit additif \mathbf{E} blanc Gaussien. Cette hypothèse est classique et raisonnable pour de telles données.

Afin d'obtenir une solution physiquement acceptable au problème précédent (qui admet une infinité de solution), on se donne un *a priori* sur \mathbf{Z} : $\mathcal{P}(\mathbf{Z}) \sim \exp(-\Omega(\mathbf{Z}))$. On considère alors l'estimateur du maximum a posteriori (MAP) donné par :

$$\mathbf{Z}^* = \arg \min_{\mathbf{Z}} \frac{1}{2} \|\mathbf{M} - \mathbf{G}\mathbf{Z}\Phi^H\|_{\text{Fro}}^2 + \lambda \Omega(\mathbf{Z}), \quad \lambda > 0. \quad (2)$$

Si l'on choisit $\Omega(\mathbf{Z}) = \|\mathbf{Z}\|_1$, (4) correspond au problème du Lasso où les régresseurs sont les atomes spatiotemporels. En l'absence de dictionnaire TF, cette formulation est connue comme « Minimum Current Estimate » dans la communauté M/EEG [7]. Cependant, un tel *a priori* sur les sources donne des résultats inconsistants à travers le temps [8] en raison de l'hypothèse d'indépendance des sources sous-jacentes. Afin de favoriser quelques sources actives à travers une fenêtre temporelle d'intérêt, l'emploi d'une norme mixte de type « Group-Lasso » ℓ_{21} a été proposée [8]. L'inconvénient de l'*a priori* ℓ_{21} sur \mathbf{Z} est qu'aucun débruitage n'est opéré sur les sources qui sont estimées.

Nous proposons d'exploiter les avantages des deux *a priori* afin d'obtenir quelques sources actives à travers le temps tout

1. On ne peut cependant rien dire sur $\Phi^H \Phi$ en général.

2. <http://tftat.sourceforge.net/>

en les débruitant grâce à l'emploi de Gaborettes. L'a priori composite formé par la somme des normes ℓ_{21} et ℓ_1 est :

$$\Omega(\mathbf{Z}) = \rho \|\mathbf{Z}\|_1 + (1 - \rho) \|\mathbf{Z}\|_{21}, \quad 0 < \rho < 1. \quad (3)$$

4 Optimisation

L'optimisation se fait en appliquant l'algorithme FISTA [1], grâce à l'opérateur de proximité de la norme composite qui est obtenu par composition des opérateurs de proximité des normes ℓ_1 et ℓ_{21} [5]. On rappelle la définition de l'opérateur de proximité :

Definition 1 (Opérateur de proximité) Soit $\varphi : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction propre convexe. L'opérateur de proximité associé à φ , noté $\text{prox}_\varphi : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M$, s'écrit :

$$\text{prox}_\varphi(\mathbf{Z}) = \arg \min_{\mathbf{V} \in \mathbb{R}^M} \frac{1}{2} \|\mathbf{Z} - \mathbf{V}\|_2^2 + \varphi(\mathbf{V}).$$

L'opérateur de proximité de la norme composite (3) est alors donné dans la proposition suivante

Proposition 1 (Opérateur de proximité de $\ell_{21} + \ell_1$) Soit $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{P \times K}$ indicé par un double indice (p, k) .

$$\mathbf{Z} = \underset{\lambda(\rho \|\cdot\|_1 + (1-\rho)\|\cdot\|_{21})}{\text{prox}}(\mathbf{Y})$$

est donné pour chaque coordonnée (p, k) par

$$Z_{p,k} = \frac{Y_{p,k}}{|Y_{p,k}|} (|Y_{p,k}| - \lambda\rho)^+ \left(1 - \frac{\lambda(1-\rho)}{\sqrt{\sum_k (|Y_{p,k}| - \lambda\rho)^2}} \right)^+.$$

où $x \in \mathbb{R}$, $(x)^+ = \max(x, 0)$, et par convention $\frac{0}{0} = 0$.

Ce résultat est un corolaire de l'opérateur de proximité des pénalisation par groupes hiérarchiques donné dans [5].

L'algorithme FISTA peut alors s'écrire :

Algorithm 1 FISTA avec dictionnaire TF

Require: Données \mathbf{M} , matrice de gain \mathbf{G} , paramètre de régularisation $\lambda > 0$ et I le nombre d'itérations.

Ensure: \mathbf{Z}^*

- 1: Variables auxiliaires : \mathbf{Y} et $\mathbf{Z}_o \in \mathbb{R}^{P \times K}$, τ et $\tau_o \in \mathbb{R}$.
 - 2: Estimation de la constante de Lipschitz \mathcal{L} par méthode des puissances itérées.
 - 3: $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^* = \mathbf{Z}$, $\tau = 1$, $0 < \mu < \mathcal{L}^{-1}$
 - 4: **for** $i = 1$ to I **do**
 - 5: $\mathbf{Z}_o = \mathbf{Z}^*$
 - 6: $\mathbf{Z}^* = \text{prox}_{\mu\lambda\Omega}(Y + \mu\mathbf{G}^T(\mathbf{M} - \mathbf{G}\mathbf{Y}\Phi^H)\Phi)$
 - 7: $\tau_o = \tau$
 - 8: $\tau = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\tau^2}}{2}$
 - 9: $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^* + \frac{\tau_o - 1}{\tau}(\mathbf{Z}^* - \mathbf{Z}_o)$
 - 10: **end for**
-

5 Résultats

Le dictionnaire de Gabor utilisé est ajusté, avec des longueurs de fenêtre 128 échantillons, un décalage temporel $k_0 = 4$ et un décalage fréquentiel $f_0 = 1$.

5.1 Données simulées

On a généré un ensemble de données synthétiques avec 20 capteurs et 200 sources. Quatre de ces sources ont été sélectionnées comme active aléatoirement. Les décours temporels des sources (cf. figure. 1(a)) représentent une composante haute fréquence et trois composantes basse fréquence. Le décours temporel de la composante oscillatoire haute fréquence est modélisé par un atome de Gabor tandis que le décours temporel de la composante basse fréquence est obtenue à partir de l'étude d'un potentiel évoqué somatosensoriel [4] en positionnant manuellement les sources des composantes P15, N20 et P23.

L'opérateur utilisé est une matrice aléatoire dont les colonnes sont normalisées à 1. Enfin, un bruit blanc Gaussien est ajouté.

Les estimations obtenues sur des données simulées avec les trois *a priori* sont illustrées sur la Fig. 1. La solution donnée avec la norme composite en (j) correspond le mieux avec les sources simulées en (a), et illustre le bénéfice de la parcimonie mise sur les coefficients de Gabor intra-groupe en plus de la parcimonie inter-groupe.

5.2 Données réelles

On montre sur la figure 5.2 les résultats obtenus sur des données MEG somatosensorielles enregistrées pendant la stimulation du nerf médian droit. La méthode proposée estime 37 sources cérébrales actives. Dans un but de visualisation ces sources ont été classées en 4 groupes par un algorithme de k-means. La procédure aboutit à la mise en évidence de régions fonctionnelles pertinentes : le cortex sensoriel primaire controlatéral (S1), les cortex sensoriels secondaires ipsilatéral et controlatéral (iS2 et cS2) et le cortex pariétal postérieur controlatéral (cPPC). La figure 5.2-(e) fournit la densité d'énergie au sein de chaque région au court du temps. On y observe très clairement l'organisation temporelle des activations : l'activité commence dans cS1, puis se propage de façon quasi-synchrone à cS2 et iS2, pour enfin atteindre cPPC.

6 Conclusion

Cette article démontre l'intérêt du choix de la représentation sur laquelle injecter l'*a priori* de parcimonie. Ici, les dictionnaires de Gabor permettent d'obtenir une représentation parcimonieuse des signaux M/EEG, de part l'emploi d'une pénalité ℓ_1 . De plus, afin de promouvoir des sources avec peu de sources actives, une norme de parcimonie jointe du type ℓ_{21} est utilisée. Ceci aboutit à un *a priori* composite.

Les simulations montrent les bénéfices d'une telle approche, tandis que les expériences sur des données MEG aujourd'hui

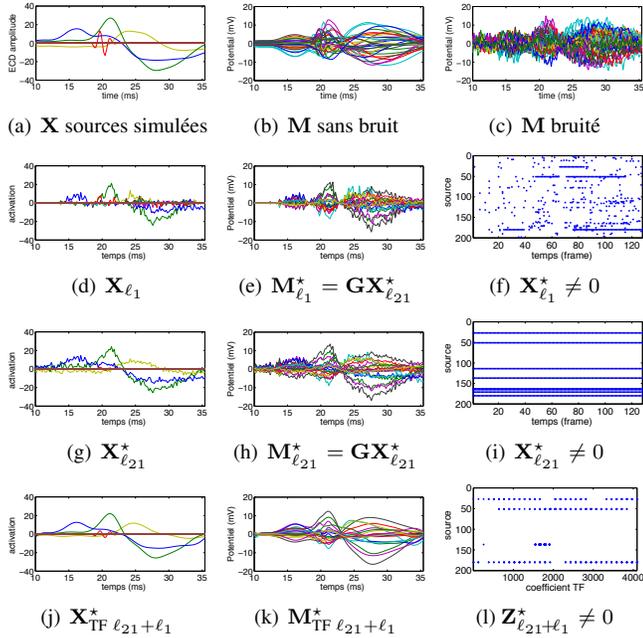


FIGURE 1 – Résultats des simulations, avec un SNR de 6 dB. (a) activation des sources simulées. (b) mesures simulées non bruitées. (c) Mesures simulées bruitées. (d-e-f) Estimation avec ℓ_1 . (g-h-i) Estimation avec ℓ_{21} [8]. (j-k-l) Estimation avec la norme composite et le dictionnaire de Gabor. (f-i-l) montrent l’organisation des coefficients non-nuls et les structures de parcimonie obtenues avec les trois normes. Le résultat (j) montre comme la norme composite avec le dictionnaire temps-fréquence améliore le résultat en comparaison de (d) et (g).

bien comprises et maîtrisées confirment la validité de la reconstruction.

Les travaux futurs s’attarderont sur le choix du dictionnaire de Gabor qui fait intervenir un compromis sur la résolution temps-fréquence. En particulier, l’union de deux dictionnaires est envisagée.

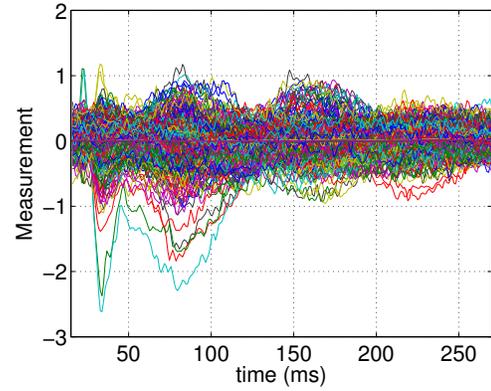
Références

[1] A. Beck and M. Teboulle. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2(1) :183–202, 2009.

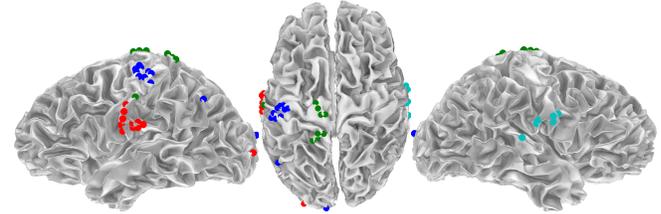
[2] I. Daubechies. *Ten lectures on Wavelets*. SIAM-CBMS Conferences Series, 1992.

[3] A. Gramfort, T. Papadopoulo, E. Olivi, and M. Clerc. OpenMEEG : opensource software for quasistatic bioelectromagnetics. *BioMedical Engineering OnLine*, 9(1) :45, 2010.

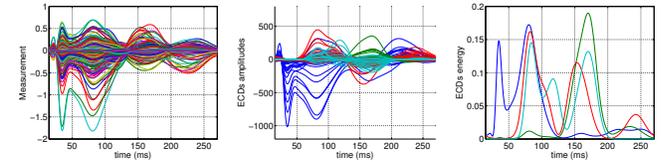
[4] U. Jaros, B. Hilgenfeld, S. Lau, G. Curio, and J. Hauelsen. Nonlinear interactions of high-frequency oscillations in the human somatosensory system. *Clin Neurophysiol*, 119(11) :2647–57, 2008.



(a) Données MEG : $M \in \mathbb{R}^{306 \times 256}$



(b) Localisation des estimations ECDs actives. Les groupes ECDs ont le code couleur suivant : bleu foncé pour cS1, rouge pour cS2, bleu clair pour iS2, vert pour cPPC.



(c) $M^* = GX^*$ (d) $X^* \in \mathbb{R}^{24585 \times 256}$ (e) Densité d’énergie moyenne à travers le temps pour chaque région.

FIGURE 2 – Résultats obtenus avec l’a priori composite $\ell_{21} + \ell_1$ dans un dictionnaire de Gabor appliqué aux données somatosensorielle MEG. L’estimation a été faite avec des orientations non-contraînées sur un ensemble de 8195 localisation corticales ($G \in \mathbb{R}^{306 \times 24585}$).

[5] R. Jenatton, J. Mairal, G. Obozinski, and F. Bach. Proximal methods for hierarchical sparse coding. In *International Conference of Machine Learning*, 2010.

[6] R. Jenatton, J. Mairal, G. Obozinski, and F. Bach. Proximal methods for sparse hierarchical dictionary learning. In *International Conference on Machine Learning*, 2010.

[7] K. Matsuura and Y. Okabe. Selective minimum-norm solution of the biomagnetic inverse problem. *IEEE Trans Biomed Eng*, 42(6) :608–615, June 1995.

[8] W. Ou, M. Hämaläinen, and P. Golland. A distributed spatio-temporal EEG/MEG inverse solver. *NeuroImage*, 44(3) :932–946, Feb 2009.

[9] P. Soendergard, B. Torrèsani, and P. Balazs. The linear time frequency toolbox. Technical report, Technical University of Denmark, 2009.