

Déconvolution impulsionnelle par optimisation combinatoire exacte et application au CND radar

Hongyang He¹, Jérôme Idier¹, Vincent Baltazart², Yide Wang³

¹Laboratoire IRCCyN, CNRS UMR 6597, Ecole Centrale de Nantes
1 rue de la Noë, BP 92101, 44321 Nantes Cedex 3, France

²Laboratoire IFSTTAR
BP 4129, 44341 Bouguenais Cedex, France

³Laboratoire IREENA, Polytech’Nantes
rue Christian Pauc, BP 50609, 44306 Nantes Cedex 3, France
Hongyang.He@univ-nantes.fr, Jerome.Idier@ircryn.ec-nantes.fr
Vincent.Baltazart@ifsttar.fr, Yide.Wang@univ-nantes.fr

Résumé – Nous nous intéressons à l’estimation d’un signal par moindres carrés sous contrainte sur la pseudo-norme L0, dans le cas particulier d’un problème de déconvolution, lorsque le signal inconnu est fortement parcimonieux. Dans une telle situation, la recherche exhaustive est envisageable mais reste très coûteuse. Notre contribution consiste à optimiser cette recherche sans sacrifier l’optimalité. Nous proposons une stratégie permettant d’écartier sans explorer une partie significative des solutions. L’algorithme proposé est appliqué à un problème de contrôle non-destructif radar, en comparaison d’algorithmes sous-optimaux modernes. Dans ce contexte, l’intérêt de l’optimisation exacte apparaît clairement.

Abstract – We focus on the estimation of a sparse signal from a convolution process by least square under the constraint that the pseudo L0 norm is known. In some cases where the sought signal is strongly sparse, the exhaustive search is feasible but remains very expensive. Our contribution aims at accelerating the exhaustive search without any sacrifice in terms of optimality. Our strategy allows to discard a significant part of the solutions. The proposed algorithm is applied to a GPR (ground penetrating radar) non-destructive evaluation problem and its performance is compared to other modern sub-optimal algorithms. The interest of exact optimization clearly appears in this context.

1 Introduction

Les méthodes d’estimation parcimonieuse ont connu récemment un engouement considérable [1]. Nous nous plaçons ici dans le contexte de l’estimation d’un signal \mathbf{x} parcimonieux par déconvolution de données bruitées \mathbf{y} , reliées à \mathbf{x} par un modèle direct $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{b}$. Dans ce contexte, l’état de l’art consiste

- à considérer d’abord que la solution de référence minimise $\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2$ sous contrainte $\|\mathbf{x}\|_0 \leq k$, c’est-à-dire que le nombre de composantes non nulles de \mathbf{x} ne dépasse pas une valeur k connue (une variante consiste à adopter la solution des moindres carrés pénalisés par la norme L0). Malheureusement, la résolution exacte de ce problème requiert une recherche combinatoire exhaustive, qui est d’un coût calculatoire excessif dans la plupart des cas;
- à adopter ensuite une solution approchée. Les deux principales démarches conduisent à remplacer la pseudo-norme L0 par une norme L1 (le problème devient ainsi convexe), ou bien à adopter une méthode heuris-

tique d’optimisation pour calculer une solution sous-optimale au problème original : MP (*Matching Pursuit*) [2] et ses dérivées [3], OLS (*Orthogonal Least Squares*) [4], SBR (*Single Best Replacement*) [5], etc.

Dans certains contextes applicatifs spécifiques, la norme L0 du signal à estimer est faible. Ainsi, en contrôle non destructif (CND) radar appliqué à l’estimation de l’épaisseur de chaussées, \mathbf{x} possède typiquement un nombre k de composantes non nulles égal à trois, ce qui correspond à la traversée de deux couches de matériaux distincts. Dans une telle situation, la recherche exhaustive parmi les C_n^k candidats devient envisageable, tout en restant numériquement lourde.

Dans l’article proposé, nous nous sommes donc intéressés à la recherche exhaustive du vecteur $\hat{\mathbf{x}}$ solution de

$$\min_{\mathbf{x}} J(\mathbf{x}) \text{ sous contrainte } \|\mathbf{x}\|_0 = k, \quad (1)$$

avec

$$J(\mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2,$$

dans l’idée de réduire la complexité de cette recherche. Nous avons considéré spécifiquement le cas où \mathbf{H} est une

matrice de convolution (i.e., une matrice de Toeplitz) correspondant à une réponse impulsionnelle \mathbf{h} de largeur limitée à p échantillons. Le caractère Toeplitz de la matrice \mathbf{H} joue un rôle mineur dans la suite, en revanche la durée de la réponse impulsionnelle (la taille de \mathbf{h}) est importante.

Notre contribution correspond à une approche de type *cutting plane*, telle que celles envisagées dans [6, Chap. 3], c'est-à-dire qu'elle consiste à introduire des calculs spécifiques, permettant d'écarter une partie des solutions sans les explorer. Il est clair que l'intérêt de ces approches reste limité à des contextes bien précis. Dans le cas général, elles sont susceptibles d'écarter un nombre réduit de solutions, tandis que le nombre de solutions restant à explorer demeurera gigantesque. Néanmoins, nous pensons que le champ d'application de la recherche exhaustive optimisée n'est pas anecdotique dans le contexte des problèmes inverses, d'autant plus que son application, quand elle est possible, est susceptible de fournir des résultats d'une qualité et d'une robustesse inégale.

Le reste de l'article est organisé comme suit. Dans la section 2, nous présentons la méthodologie de manière générale puis l'algorithme proposé. La section 3 explicite l'application de la méthode au problème de CND radar et propose quelques résultats de simulation. Enfin, la section 4 conclut ce travail.

2 Déconvolution Impulsionnelle par Recherche Exhaustive

2.1 Méthode Générale

Étant donné une observation bruitée $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^m$, reliée au signal parcimonieux inconnu $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ par

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

où $\mathbf{H} \in \mathcal{R}^{m \times n}$ est la matrice de convolution, nous cherchons à estimer \mathbf{x} par moindres carrés sous contrainte $\|\mathbf{x}\|_0 = k$. Définissons le vecteur binaire $\mathbf{q} \in \{0, 1\}^n$ caractérisant le support du vecteur \mathbf{x} :

$$\mathbf{q}_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x}_i \neq 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Pour un support \mathbf{q} donné, le minimiseur de J est donné par

$$\hat{\mathbf{x}}_q = (\mathbf{H}_q^t \mathbf{H}_q)^{-1} \mathbf{H}_q^t \mathbf{y} \quad (2)$$

où $\mathbf{x}_q \in \mathcal{R}^k$ est le sous-vecteur extrait de \mathbf{x} associé à \mathbf{q} . De même, $\mathbf{H}_q \in \mathcal{R}^{m \times k}$ est constituée des colonnes correspondants à \mathbf{q} .

La méthode de recherche exhaustive requiert de tester l'ensemble des supports qui répondent à la condition $\|\mathbf{x}\|_0 = k$ (ou de façon plus rigoureuse $\|\mathbf{q}\|_0 = k$, car en théorie, l'estimée $\hat{\mathbf{x}}_q$ obtenue par (2) peut comprendre des composantes nulles). La comparaison des termes $J(\hat{\mathbf{x}}_q)$

pour l'ensemble des supports de cardinal k permet de trouver le minimiseur global du problème (1). Dans cette approche exhaustive, le nombre de candidats à tester est égal à C_n^k , et pour chaque candidat le système linéaire (2) (de taille k) doit être résolu. Même si cette résolution est envisageable sous une forme récursive, le coût de calcul de l'approche exhaustive peut s'avérer trop élevé pour de nombreuses applications réelles. Pour abaisser ce coût, nous nous intéressons à réduire le nombre de candidats afin d'économiser en temps de calcul sans sacrifier l'optimalité.

2.2 Réduction du Nombre de Candidats

L'idée principale de l'approche proposée réside dans l'utilisation de l'information apportée par une solution quelconque à k composantes $\hat{\mathbf{x}}_0$. L'idée est que la solution optimale $\hat{\mathbf{x}}$ du problème (1) doit faire au moins aussi bien que $\hat{\mathbf{x}}_0$ en termes de critère J , ce qui impose certaines contraintes structurelles à $\hat{\mathbf{x}}$.

2.2.1 Critère d'Énergie Cumulée

Considérons l'énergie cumulée des observations successives y_i, \dots, y_j pour tout couple d'indices (i, j) , $1 \leq i < j \leq m$:

$$E_{i,j} = \sum_{\ell=i}^j y_\ell^2$$

Considérons par ailleurs une solution sous-optimale quelconque $\hat{\mathbf{x}}_0$ de norme L0 égale à k , typiquement obtenue par une approche heuristique (par exemple, OMP, OLS ou SBR). Nous avons alors la proposition suivante.

Proposition. Si

$$E_{i,j} > J(\hat{\mathbf{x}}_0), \quad (3)$$

alors il existe au moins une composante non nulle parmi $\hat{x}_{i-p+1}, \dots, \hat{x}_j$.

Démonstration. On démontre ce résultat par l'absurde. Supposons que le sous-vecteur $[\hat{x}_{i-p+1}, \dots, \hat{x}_j]$ est uniformément nul. Le signal de sortie $\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}$ est alors nul dans l'intervalle i, \dots, j , donc on peut écrire

$$\begin{aligned} J(\hat{\mathbf{x}}) &= \sum_{\ell=1}^m (y_\ell - (\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}})_\ell)^2 \\ &\geq \sum_{\ell=i}^j (y_\ell - (\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}})_\ell)^2 = \sum_{\ell=i}^j y_\ell^2 = E_{i,j} > J(\hat{\mathbf{x}}_0) \end{aligned}$$

ce qui contredit le fait que $\hat{\mathbf{x}}$ est la solution du problème (1).

Remarquons que le calcul de l'énergie cumulée ne comprend que des opérations simples. L'ensemble des contraintes est d'autant plus riche que l'énergie est inégalement répartie dans le signal observé; cet ensemble de contraintes peut être vide si $\hat{\mathbf{x}}_0$ est une solution médiocre (i.e., $J(\hat{\mathbf{x}}_0)$ est une valeur élevée), ou à fort niveau de bruit.

2.2.2 Algorithme Proposé

Première étape : recensement des contraintes. Il s'agit de comparer l'énergie cumulée $E_{i,j}$ à $J(\hat{\mathbf{x}}_0)$ pour tout (i, j) . Nous obtenons alors un ensemble d'intervalles $[i, j]$ qui satisfont le critère (3), chacun de ses intervalles induisant une contrainte sur $\hat{\mathbf{x}}$ d'après la Proposition. En pratique, de nombreux intervalles sont emboîtés les uns dans les autres. En fait il suffit de ne retenir que les intervalles les plus petits (au sens où ils ne contiennent eux-même aucun intervalle plus petit satisfaisant (3)) correspondent aux contraintes les plus fortes. En effet, la satisfaction de ces contraintes les plus fortes implique la satisfaction de l'ensemble des contraintes.

A la fin de cette étape, nous disposons d'un ensemble d'intervalles de type $]i - p, j]$ et nous sommes sûr que $\hat{\mathbf{x}}$ comporte au moins une composante non nulle dans chacun de ces intervalles.

Deuxième étape : recensements des scénarios possibles. Les intervalles obtenus ont en général des intersections non vides, et une composante non nulle placée à l'intersection de deux intervalles satisfait simultanément les deux contraintes correspondantes. Par ailleurs, dans le cas de deux intervalles contenant au moins une composante non nulle et d'intersection non vide, remarquons que la réunion des deux intervalles est un intervalle qui contient au moins une composante non nulle, mais cette contrainte simplifiée n'est pas équivalente à la donnée des deux contraintes initiales.

Explorer toutes les combinaisons à k composantes non nulles satisfaisant l'ensemble des contraintes n'est donc pas immédiat. Nous proposons de procéder de la façon suivante.

Soit $(i_1, j_1, i_2, j_2, \dots)$ la suite des indices correspondants aux extrémités des intervalles recensés, ouverts à gauche, et soit (s_ℓ) cette même liste classée par ordre d'indices croissants. Si 0 et n ne sont pas présents, on les ajoute dans la liste en première et en dernière position, respectivement. La liste résultante partitionne l'intervalle $]0, n]$ en $L - 1$ intervalles élémentaires de type $]s_\ell, s_{\ell+1}]$ si L désigne la longueur de cette liste. En pratique, de nombreux intervalles élémentaires ne contiennent qu'un indice (i.e., ils sont de la forme $]l - 1, l]$).

On détermine ensuite l'ensemble des scénarios admissibles par recherche exhaustive parmi toutes les configurations concernant l'appartenance des composantes non nulles aux intervalles élémentaires. Il y a de l'ordre de $(L - 1)^k / k!$ possibilités à explorer. Cette exploration est peu coûteuse car elle implique uniquement des opérations logiques. Néanmoins, dans les cas où le nombre de possibilités à explorer serait trop important, il reste possible de réduire ce nombre en réunissant des intervalles suivant la remarque faite ci-dessus, quitte à sacrifier une partie de l'information disponible.

Troisième étape : exploration de chaque scénario possible. La plupart des scénarios possibles correspondent à plusieurs k -uplets de positions possibles. Pour chaque scénario, l'ensemble des combinaisons possibles doit maintenant être exploré. Leur nombre est égal au produit des longueurs des intervalles élémentaires considérés. Pour chaque combinaison, le système linéaire (2) doit être résolu afin d'évaluer finalement le critère J .

Le nombre total de combinaisons à explorer est difficile à évaluer de façon formelle, mais ce nombre ne peut évidemment pas dépasser C_n^k .

3 Simulation en CND radar

Dans le contexte de l'auscultation de couches de chaussées, on souhaite évaluer l'épaisseur de chaque couche de façon non destructive. Cette évaluation peut être réalisée par une technique électromagnétique d'émission-réception utilisant un GPR (*Ground Penetrating Radar*). Le milieu de propagation est souvent supposé non-dispersif, ce qui permet de modéliser le problème direct par un produit de convolution entre la forme d'onde de propagation et le signal parcimonieux décrivant la position des réflecteurs, localisés aux interfaces entre couches [7].

Dans cette application, le nombre de pics est supposé égale à trois¹ car on s'intéresse seulement aux couches de surface et d'assise. La Fig. 1 propose un exemple simulé, pour un rapport signal à bruit (RSB)² égal à 20 dB. Ce RSB peut sembler élevé, mais il est obtenu couramment par moyennage de signaux mesurés, typiquement quelques dizaines de signaux à RSB égal à 10 dB.

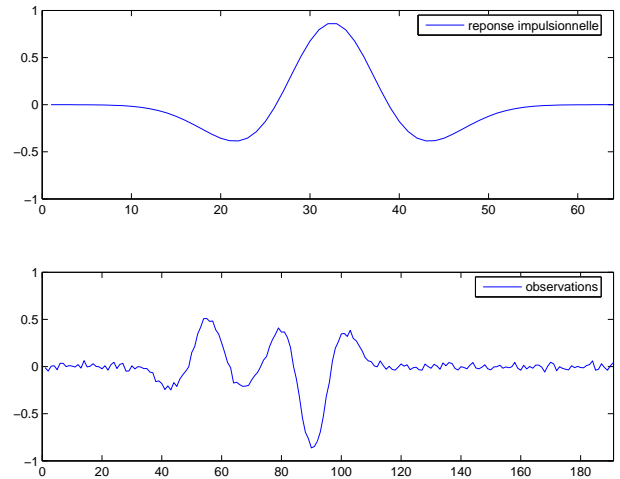


FIGURE 1 – En haut, réponse impulsionnelle du canal de propagation; en bas, signal observé (RSB = 20 dB).

1. Nous supposons ici que la discrétisation de l'épaisseur des couches est parfaite : un seul pic est présent dans le signal à restaurer pour chaque interface entre couches.

2. La puissance du signal est définie par $E_s = \|\mathbf{H}\mathbf{x}\|_2^2 / \|\mathbf{H}\mathbf{x}\|_0$.

Dans la simulation, la réponse impulsionnelle du canal de propagation est modélisée par l'ondelette de Ricker (Fig. 1 en haut). La taille de \mathbf{h} (durée de la réponse impulsionnelle) est égale à 64. Le signal original est discrétisé par une suite de $n = 128$ composantes parmi lesquelles seulement trois composantes sont non nulles : $x_{20} = 0.3$, $x_{26} = 0.5$ et $x_{59} = -1$. La taille du signal observé (Fig. 1 en bas) est alors $m = 191$. Afin de montrer la performance de l'algorithme proposé, nous comparons sur la Fig. 2 le résultat de déconvolution fourni par la méthode exhaustive proposée, avec le résultat d'OLS et de SBR (avec réglage automatique de l'hyperparamètre). La recherche exhaustive trouve le support correct, tandis qu'OLS et SBR fournissent des solutions non optimales. La difficulté du problème est évidemment de localiser correctement les deux premiers pics, alors que le canal de propagation filtre sévèrement les hautes fréquences.

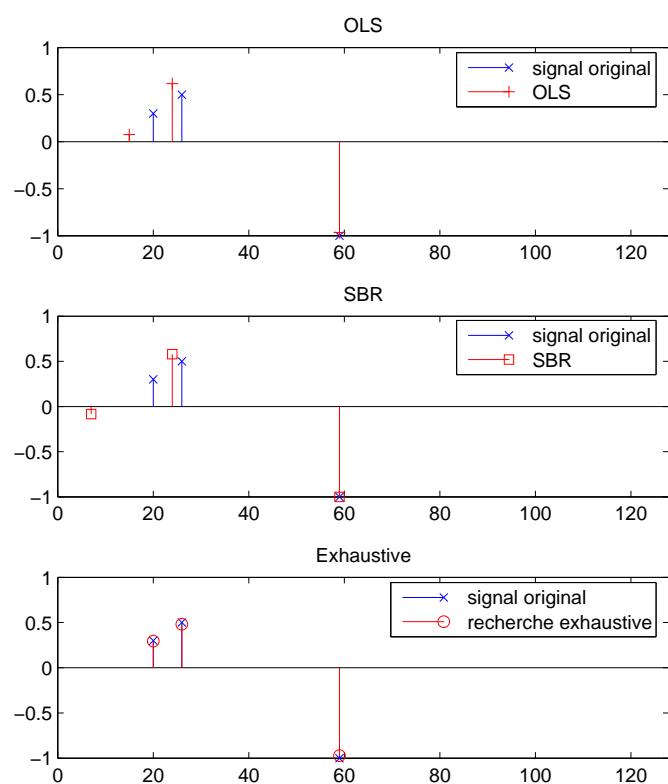


FIGURE 2 – Résultats obtenus par OLS, SBR et par la méthode proposée, en superposition avec le signal simulé.

Par ailleurs, l'approche proposée est capable de réduire significativement l'espace de recherche. Plus précisément, la méthode de recherche exhaustive standard teste $C_{128}^3 = 341376$ combinaisons de trois pics. En se basant sur la solution sous-optimale obtenue par OLS, la méthode proposée permet de limiter la recherche à environ 168000 combinaisons (chiffre moyen obtenu sur 100 réalisations de bruit), soit à peu près 50% du total. En termes de temps de calcul (pour des codes en Matlab), on passe de 81 à 53 se-

condes, soit une économie d'environ 35%. La différence de pourcentage vient principalement des manipulations plus nombreuses et plus complexes à effectuer pour appliquer la stratégie présentée. En particulier, la récursivité de la résolution des systèmes linéaires (2) devient partielle. En effet, pour chaque scénario dans la troisième étape, l'algorithme récursif doit être réinitialisé.

4 Conclusion

Nous avons présenté une approche de déconvolution pour restaurer un signal fortement parcimonieux à partir d'une observation bruitée. L'idée développée consiste à rechercher la solution optimale du problème L2 sous contrainte L0, tout en diminuant l'espace de recherche suivant un procédé de type *cutting plane* basé sur l'énergie cumulée du signal observé. Ce procédé est original, à notre connaissance. A titre d'illustration, la démarche a été ensuite appliquée au CND radar avec pour objectif d'évaluer l'épaisseur des couches de chaussées.

Références

- [1] J. Tropp et S. Wright, Computational Methods for Sparse Solution of Linear Inverse Problems. *Proc. IEEE*, Vol. 98, No. 6, pp. 948-958, Jun. 2010.
- [2] S. Mallat et Z. Zhang, Matching pursuits with time-frequency dictionaries, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 41, no. 12, pp. 3397-3415, Dec. 1993.
- [3] Y. C. Pati, R. Rezaifar, et P. S. Krishnaprasad, Orthogonal matching pursuit : Recursive function approximation with applications to wavelet decomposition, *Proc. 27th Asilomar Conf. Signals, Systems and Computers*, vol. 1, pp. 40-44, Nov. 1993.
- [4] S. Chen, S. A. Billings, and W. Luo, Orthogonal least squares methods and their application to non-linear system identification, *Int. J. Control*, vol. 50, no. 5, pp. 1873-1896, Nov. 1989.
- [5] C. Soussen, J. Idier, D. Brie et J. Duan, From Bernoulli-Gaussian deconvolution to sparse signal restoration, à paraître, *IEEE Trans. Signal Processing*, 2011.
- [6] A. J. Miller, *Subset Selection in Regression*, 2nd ed. London, U.K. Chapman and Hall, 2002.
- [7] G. Turner, Subsurface radar propagation deconvolution, *Geophysics*, vol. 9(2), pp. 215-223, Fev. 1995.