

Méthode variationnelle pour le démixage d'images hyperspectrales

Olivier ECHES^{1,2}, Nicolas DOBIGEON², Jean-Yves TOURNERET² et Hichem SNOUSSI³

¹Université d'Islande, Signal Processing Lab
VR-II, Hjardarhagi 2-6 IS-107 Reykjavik, Islande

²Université de Toulouse, IRIT/INP-ENSEEIH/TéSA
2 rue Camichel, 31071 Toulouse cedex 7, France

³Université de Technologie de Troyes, ICD/LM2S
10000 Troyes Cedex, France

{olivier.eches,nicolas.dobigeon,jean-yves.tourneret}@enseeiht.fr, hichem.snoussi@utt.fr

Résumé – Cet article étudie une méthode variationnelle Bayésienne pour un problème de démixage d'images hyperspectrales, consistant à estimer les coefficients (ou abondances) d'un mélange linéaire de signatures spectrales. Ces signatures spectrales associées à des matériaux purs sont supposées connues (elles sont estimées à l'aide d'une méthode d'extraction spécifique ou extraites d'une bibliothèque de spectres). L'approche proposée requiert la définition de lois *a priori* pour les paramètres d'intérêt et les hyperparamètres associés. Après avoir défini les lois *a priori* appropriées pour les abondances (lois uniformes sur l'intervalle $[0, 1]$), la loi jointe *a posteriori* des paramètres et hyperparamètres du modèle est calculée. La complexité de cette loi est contournée par l'utilisation de méthodes variationnelles qui permettent d'approcher la loi jointe *a posteriori* des paramètres et hyperparamètres du modèle. Les résultats de simulations menées sur des données synthétiques et réelles montrent des performances similaires à celles obtenues avec un algorithme de démixage basé sur des méthodes de Monte Carlo par Chaînes de Markov, avec un temps d'exécution réduit.

Abstract – This paper studies a variational Bayesian unmixing algorithm for hyperspectral images based on the standard linear mixing model. Each pixel of the image is modeled as a linear combination of *endmembers* whose corresponding fractions or *abundances* are estimated by a Bayesian algorithm. This approach requires to define prior distributions for the parameters of interest and the related hyperparameters. After defining appropriate priors for the abundances (uniform priors on the interval $[0, 1]$), the joint posterior distribution of the model parameters and hyperparameters is derived. The complexity of this distribution is handled by using variational methods that allow the joint distribution of the unknown parameters and hyperparameter to be approximated. Simulation results conducted on synthetic and real data show similar performances than those obtained with a previously published unmixing algorithm based on Markov chain Monte Carlo methods, with a significantly reduced computational cost.

1 Introduction

L'imagerie hyperspectrale a reçu un intérêt sans cesse grandissant dans de nombreux champs d'application différents. Le problème du démixage spectral, étape cruciale dans l'analyse d'images hyperspectrales, a été étudié pendant plusieurs décennies par les communautés de traitement du signal et de l'image où de nombreuses solutions ont été proposées (voir par exemple [1]). Le démixage hyperspectral suppose qu'un pixel de l'image est la combinaison linéaire d'un nombre donné de spectres purs (appelés *endmembers*) dont les proportions respectives sont appelées *abondances*. Supposer que les pixels de l'image sont la combinaison linéaire des endmembers pondérés par les abondances est une hypothèse classique pour le démixage hyperspectral. Plus précisément, le modèle de mélange linéaire (MML) considère qu'un pixel mélangé est la combinaison linéaire des matériaux purs corrompu par un bruit additif [1] :

$$\mathbf{y} = \sum_{r=1}^R \mathbf{m}_r a_r + \mathbf{n} \quad (1)$$

où \mathbf{y} est le spectre du pixel observé dans L bandes, R est le nombre de matériaux purs dans le pixel, \mathbf{m}_r est le spectre du r ième matériau pur, a_r est le coefficient d'abondance correspondant et \mathbf{n} est le bruit additif considéré comme blanc Gaussien de même variance dans toutes les

bandes, c'est à dire $\mathbf{n} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_L, s^2 \mathbf{I}_L)$. Les signatures spectrales \mathbf{m}_r et leurs proportions a_r sont généralement estimées successivement. Dans un premier temps, les endmembers sont déterminés à l'aide de méthodes d'extraction spécifiques comme par exemple l'algorithme N-FINDR développé dans [2] ou bien l'algorithme MVSA (Minimum Volume Simplex Analysis) présenté dans [3]. Après l'obtention des spectres purs, les abondances sont estimées dans une seconde étape dite d'*inversion* sous les contraintes de positivité et d'additivité inhérentes à la physique du problème :

$$\begin{cases} a_r \geq 0, \forall r = 1, \dots, R, \\ \sum_{r=1}^R a_r = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Un grand nombre d'algorithmes d'inversion respectant ces contraintes ont été proposés dans la littérature. Par exemple, les méthodes FCLS (Fully Constrained Least Squares) ou SGA (Scaled Gradient Algorithm) développées dans [4] et [5] sont deux méthodes d'optimisation qui respectent ces contraintes. Une autre approche introduite dans [6] consiste à munir les abondances de lois *a priori* et à résoudre le problème de démixage dans un cadre Bayésien. En dépit des résultats intéressants obtenus par cette approche, un inconvénient des méthodes Bayésiennes utilisées dans ce contexte est la complexité de la loi *a posteriori* d'intérêt. Cette complexité nécessite par exemple l'emploi des méthodes de Monte Carlo par Chaînes de Markov (MCMC) pour

déterminer les estimateurs Bayésiens des paramètres inconnus. Or, ces méthodes sont très coûteuses en temps de calcul. Dans un cadre Bayésien, une alternative aux méthodes MCMC repose sur l'emploi de méthodes d'approximation variationnelle [7] dont le principe est d'approcher la loi jointe *a posteriori* des paramètres $f(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ par une loi de forme simplifiée $q(\boldsymbol{\theta})$ qui minimise la distance de Kullback-Leibler entre les deux lois. La méthode proposée suppose que les abondances sont définies sur l'intervalle $[0, 1]$. La loi jointe *a posteriori* des paramètres du modèle obtenu à partir de la vraisemblance et des lois *a priori* ne permet pas d'obtenir directement les estimateurs Bayésiens classiques. Dès lors, la loi *a posteriori* d'intérêt peut s'approcher par un produit de lois simplifiées.

2 Modèle Bayésien

Ce paragraphe présente un modèle Bayésien inspiré de [6] pour le démelange hyperspectral.

2.1 Vraisemblance

Le MML défini dans (1) et les propriétés statistiques du bruit permettent d'écrire $\mathbf{y}|\mathbf{a}, s^2 \sim \mathcal{N}(\mathbf{M}\mathbf{a}, s^2\mathbf{I}_L)$ où la matrice $\mathbf{M} = [\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_R]$. Dès lors, la fonction de vraisemblance de \mathbf{y} est :

$$f(\mathbf{y}|\mathbf{a}, s^2) \propto \frac{1}{s^L} \exp\left[-\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{M}\mathbf{a}\|^2}{2s^2}\right] \quad (3)$$

où \propto signifie "proportionnel à" et $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}$ est la norme ℓ^2 standard. Le paragraphe suivant décrit les lois *a priori* des abondances, de la variance du bruit et des hyperparamètres associés.

2.2 Lois *a priori* des paramètres

2.2.1 Abondances

Afin de satisfaire les contraintes (2), un choix naturel de loi *a priori* est d'utiliser une loi de Dirichlet. Malheureusement l'application des méthodes variationnelles avec cette loi de Dirichlet mène à des lois *a posteriori* très difficiles à manipuler. La solution retenue dans cet article est dans un premier temps de relaxer la contrainte d'additivité sur les abondances et de les munir de lois *a priori* indépendantes uniformes sur l'intervalle $[0, 1]$, montrant ainsi que ces coefficients sont des proportions. La loi *a priori* résultante des abondances peut s'exprimer ainsi :

$$f(\mathbf{a}) = \prod_{r=1}^R f(a_r) = \prod_{r=1}^R \mathbf{1}_{(0,1)}(a_r) \quad (4)$$

où $\mathbf{1}_{\mathcal{E}}(\cdot)$ est la fonction indicatrice définie sur l'ensemble \mathcal{E} .

2.2.2 Variance du bruit

Une loi conjuguée inverse-gamma a été choisie pour la variance du bruit :

$$s^2|\nu, \delta \sim \mathcal{IG}(\nu, \delta) \quad (5)$$

où $\nu = 1$ (de manière similaire à [8]) et δ est inclu dans le modèle Bayésien résultant en une modélisation hiérarchique. Comme dans n'importe quel algorithme Bayésien hiérarchique, une loi *a priori* pour l'hyperparamètre δ doit être définie. Comme dans [6], une loi non-informative de Jeffreys est affectée à δ , i.e.,

$$f(\delta) \propto \frac{1}{\delta} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(\delta). \quad (6)$$

Ce choix, classique dans les problèmes d'estimation Bayésienne, reflète le manque de connaissance *a priori* sur δ .

2.3 Loi *a posteriori*

En utilisant le théorème de Bayes, la loi jointe *a posteriori* du vecteur des paramètres inconnus $\boldsymbol{\theta} = \{\mathbf{a}, s^2, \delta\}$ est :

$$f(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) \propto \frac{\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(\delta)}{\delta s^{4+L}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{M}\mathbf{a}\|^2 + 2\delta}{2s^2}\right) \mathbf{1}_{(0,1)^R}(\mathbf{a}). \quad (7)$$

La loi *a posteriori* (7) est trop complexe pour déduire simplement les expressions des estimateurs Bayésiens du vecteur des paramètres inconnus $\boldsymbol{\theta}$. Afin de contourner ce problème, les estimateurs ont été approchés dans [6] à partir d'échantillons de la loi (7) générés à l'aide de méthodes MCMC. Le paragraphe suivant étudie une autre approche pour retrouver les estimateurs Bayésiens de $\boldsymbol{\theta}$ par l'utilisation de méthodes variationnelles.

3 Approximation de la loi *a posteriori*

3.1 Méthodes variationnelles

L'idée principale des méthodes variationnelles est d'approcher la loi *a posteriori* du vecteur des paramètres inconnus $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ par une loi plus simple appelée loi *variationnelle*. Un choix courant consiste à factoriser la loi jointe *a posteriori*¹ en plusieurs facteurs disjoints [9, p. 28–29] :

$$f(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) \approx q(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^N q(\theta_i). \quad (8)$$

L'approche optimale est obtenue en minimisant la divergence de Kullback-Leibler (KLD) entre la loi $f(\cdot)$ et son approximation $q(\cdot)$:

$$\text{KLD}(f, q) = \int q(\boldsymbol{\theta}) \log \left[\frac{q(\boldsymbol{\theta})}{f(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})} \right] d\boldsymbol{\theta}.$$

En utilisant le théorème de Bayes, la KLD peut être réécrite de cette manière :

$$\text{KLD}(f, q) = -\mathcal{F}(q) + \log f(\mathbf{y}), \quad (9)$$

où $\mathcal{F}(q)$ est égal à :

$$\mathcal{F}(q) = \int q(\boldsymbol{\theta}) \log \left[\frac{f(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y})}{q(\boldsymbol{\theta})} \right] d\boldsymbol{\theta}. \quad (10)$$

Puisque la KLD est strictement positive, minimiser $\text{KLD}(f, q)$ est équivalent à maximiser $\mathcal{F}(q)$. Dès lors, la solution du problème d'optimisation $\frac{d\mathcal{F}}{dq} = 0$ donne les fonctions approchantes. Comme démontré dans [9, p. 29], la solution optimale $q(\cdot)$ de ce problème, lorsque $f(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ est approché par (8), est donnée par l'expression suivante :

$$q(\theta_i) \propto \exp\langle \log f(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) \rangle_{\boldsymbol{\theta}_{-i}} \quad (11)$$

où $\boldsymbol{\theta}_{-i} = \{\theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_n\}$, et $\langle \cdot \rangle_{\boldsymbol{\theta}_{-i}}$ dénotent l'espérance par rapport à $\boldsymbol{\theta}_{-i}$, c'est-à-dire les composantes du vecteur $\boldsymbol{\theta}$ différents de θ_i . De plus, l'approximation optimale $q(\boldsymbol{\theta})$ peut être calculée en utilisant un algorithme itératif décrit dans [9, p. 15] où les "paramètres de formes" (espérances, variances,...) de chaque loi approchante sont mis à jour successivement. Après la convergence, les paramètres inconnus peuvent être estimés à partir des moyennes des lois variationnelles selon le principe de l'erreur quadratique moyenne minimum ou *minimum mean square error* en anglais (MMSE).

1. La loi approchant dépend bien entendu de \mathbf{y} . Par concision, la notation $q(\boldsymbol{\theta})$ représente abusivement cette loi.

3.2 Approximation de la loi *a posteriori*

Suivant le principe de l'approximation variationnelle décrit précédemment, cet article propose d'approcher la loi *a posteriori* (7) du vecteur des paramètres inconnus $\theta = \{\mathbf{a}, s^2, \delta\}$ comme suit

$$f(\theta|\mathbf{y}) \approx q(\mathbf{a})q(s^2)q(\delta), \quad (12)$$

où les lois approchantes $q(\mathbf{a})$, $q(s^2)$ et $q(\delta)$ sont données ci-dessous.

3.3 Vecteur des abondances

L'approximation variationnelle force l'indépendance *a posteriori* entre les composantes du vecteur des paramètres inconnus [9, p. 31]. Dès lors, il est possible d'écrire $q(\mathbf{a}) = \prod_{r=1}^R q(a_r)$. De plus (11) mène à la loi variationnelle² de a_r :

$$q(a_r) \propto \exp \left\langle -\frac{L}{2} \log s^2 - \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{M}\mathbf{a}\|^2}{2s^2} + \log f(\mathbf{a}) \right\rangle.$$

Soit $\varepsilon_r = \mathbf{y} - \sum_{i \neq r} a_i \mathbf{m}_i$. On peut montrer après calculs (voir [10]) que les lois marginales $q(a_r)$ sont des lois normales tronquées :

$$a_r \sim \mathcal{N}_{(0,1)}(\mu_r, \sigma_r^2), \quad (13)$$

où

$$\begin{cases} \frac{1}{\sigma_r^2} = \left\langle \frac{1}{s^2} \right\rangle \|\mathbf{m}_r\|^2, \\ \mu_r = \sigma_r^2 \langle \varepsilon_r \rangle^T \mathbf{m}_r \left\langle \frac{1}{s^2} \right\rangle, \end{cases} \quad (14)$$

et où $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}(m, v^2)$ est la loi Gaussienne tronquée sur l'ensemble \mathcal{A} de moyenne cachée m et de variance cachée v^2 .

3.4 Variance du bruit

En utilisant (11), la loi approchante pour la variance du bruit est la loi inverse-gamma suivante :

$$s^2 \sim \mathcal{IG} \left(\frac{L}{2} + 1, \frac{1}{2} \langle \|\mathbf{y} - \mathbf{M}\mathbf{a}\|^2 \rangle + \langle \delta \rangle \right), \quad (15)$$

avec $\langle \|\mathbf{y} - \mathbf{M}\mathbf{a}\|^2 \rangle = \text{tr} [\mathbf{y}\mathbf{y}^T - 2\mathbf{y}\langle \mathbf{a}^T \rangle \mathbf{M}^T + \mathbf{M}\langle \mathbf{a}\mathbf{a}^T \rangle \mathbf{M}^T]$ et $\langle \mathbf{a}\mathbf{a}^T \rangle$ est donné dans [10]. En utilisant les propriétés de la loi inverse-gamma, la relation suivante peut être établie : $\langle \frac{1}{s^2} \rangle = \frac{L/2}{(L/2-1)\langle s^2 \rangle}$.

3.5 Hyperparamètres

La loi approchante pour δ est la loi gamma suivante :

$$\delta \sim \mathcal{G} \left(\nu, \left\langle \frac{1}{s^2} \right\rangle \right). \quad (16)$$

3.6 Paramètres de formes

Les lois variationnelles données dans les équations (13), (15) et (16) dépendent des "paramètres de formes" $\langle a_r \rangle$, $\langle \mathbf{a}\mathbf{a}^T \rangle$, $\langle s^2 \rangle$ and $\langle \delta \rangle$ qui sont calculés itérativement en utilisant les relations suivantes

$$\langle a_r \rangle = \mu_r + \sigma_r \frac{\phi\left(\frac{-\mu_r}{\sigma_r}\right) - \phi\left(\frac{1-\mu_r}{\sigma_r}\right)}{\frac{1}{2} \left[\text{erf}\left(\frac{1-\mu_r}{\sigma_r}\right) - \text{erf}\left(\frac{-\mu_r}{\sigma_r}\right) \right]}, \quad (17)$$

$$\langle s^2 \rangle = \frac{2}{L} \left(\frac{1}{2} \langle \|\mathbf{y} - \mathbf{M}\mathbf{a}\|^2 \rangle + \langle \delta \rangle \right), \quad (18)$$

$$\langle \delta \rangle = \frac{\nu}{\left\langle \frac{1}{s^2} \right\rangle}, \quad (19)$$

2. Le terme θ_{-i} dans la notation $\langle \cdot \rangle_{\theta_{-i}}$ a été ignoré par concision.

où $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. En résumé, l'inférence variationnelle Bayésienne est mise en oeuvre via un algorithme itératif qui met à jour successivement $q(\mathbf{a})$, $q(s^2)$ et $q(\delta)$ utilisant (17), (18) et (19). Quand la convergence est atteinte, les moyennes des abondances sont normalisées pour s'assurer que la contrainte d'additivité soit respectée. Les moyennes des lois variationnelles sont ensuite employées pour approcher les estimateurs MMSE des paramètres inconnus. Dans cet article, le critère de convergence de l'algorithme dépend de la distance au carré entre les moyennes des abondances à l'itération courante et celles à l'itération précédente.

4 Résultats de simulations

4.1 Données synthétiques

Ce paragraphe étudie les performances de l'algorithme proposé pour le démixage d'un pixel synthétique, généré avec $R = 3$ spectres avec pour abondances $\mathbf{a} = [0.12, 0.37, 0.51]^T$ et comme variance de bruit $s^2 = 0.001$ (correspondant à un rapport signal-sur-bruit de³ SNR = 20dB). Les spectres employés dans le mélange ont été extraits d'une bibliothèque spectrale fournie par le logiciel ENVI et correspondent respectivement au béton de construction, à l'herbe verte et à la terre grasse micacée. Chaque spectre a un nombre de bandes spectrales égales à $L = 276$. La figure 1 montre, en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme, les moyennes des estimations (avec l'écart-type correspondant) provenant des résultats de 50 simulations de Monte Carlo respectivement obtenues pour les abondances (à gauche) et pour la variance du bruit (à droite). Ces figures nous montrent que l'algorithme converge bien vers les valeurs réelles des paramètres avec un faible écart-type.

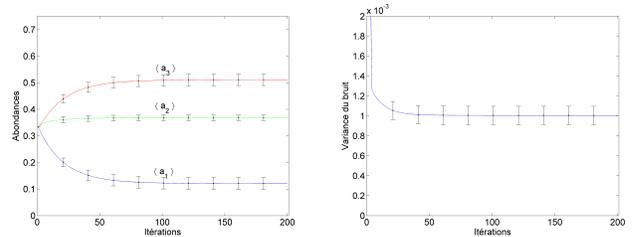


FIGURE 1 – Moyenne des estimations (trait continu) et écart-type (barres verticales) de $\langle \mathbf{a} \rangle$ (à gauche) et $\langle s^2 \rangle$ (à droite).

La méthode proposée a également été comparée avec l'algorithme de démixage basée sur les méthodes MCMC développé dans [6] (qui utilise un modèle Bayésien similaire à celui étudié dans cet article). Une image de $P = 625$ pixels a été générée à partir d'un mélange de $R = 6$ signatures spectrales, avec $s^2 = 10^{-2}$ (SNR \approx 20dB). Les signatures spectrales ont été déterminées à l'aide de l'algorithme MVSA [3] tandis que les abondances ont été estimées par l'algorithme proposé et l'algorithme basé sur les méthodes MCMC [6] avec un nombre d'itérations égal à 10000 dont 1500 itérations de chauffage. L'erreur quadratique moyenne (EQM) des vecteurs d'abondance déterminée pour les deux algorithmes est donnée dans le tableau ci-dessous avec l'écart-type correspondant et leur temps de simulation respectifs⁴. Ces résultats montrent que la méthode variationnelle proposée permet de réduire de manière significative le temps d'exécution de la procédure de démixage tout en fournissant des performances similaires à l'al-

3. Le niveau de bruit a été choisi très bas afin de tester la robustesse de l'approche proposée par rapport au bruit.

4. Résultats obtenus sur processeur double coeur 2.93 GHz à l'aide du logiciel MATLAB 7.1.

gorithme basé sur une méthode de simulation stochastique étudié dans [6]. Ces résultats sont très encourageants.

TABLE 1 – Erreur quadratique moyenne et écart-types respectifs des coefficients d’abondances.

	MCMC	Variationnel
EQM ²	$1.25 \pm 0.99 \times 10^{-2}$	$1.29 \pm 1.02 \times 10^{-2}$
Temps (sec.)	11×10^3	4.4×10^2

4.2 Données réelles

L’algorithme proposé a été appliqué à une image hyperspectrale réelle, acquise au dessus de Moffett Field (Californie, USA) en 1997 par le spectro-imageur AVIRIS de la NASA. Des travaux précédents ont déjà employés cette image pour illustrer et comparer des méthodes de démixage [11]. La région d’intérêt est une image de 50×50 pixels déjà utilisée dans [6] et représentée sur la figure 2. Le nombre de bandes a été réduit de $L = 224$ bandes à $L = 189$ bandes en supprimant les bandes d’absorption d’eau. Dans un premier temps, un pré-traitement par une analyse en composantes principales (ACP) a été mis en oeuvre pour connaître le nombre de composants purs présents dans l’image considérée donnant un nombre de matériaux purs $R = 3$. Puis, les spectres, donnés figure 3, ont été extraits en utilisant l’algorithme N-FINDR proposé par Winter dans [2]. Les cartes d’abondances estimées par l’algorithme proposé sont représentées sur la figure 4 (haut). Ces résultats peuvent être comparés avec ceux obtenus par l’algorithme basé sur les méthodes MCMC donnés sur la figure 4 (bas). Les cartes d’abondances obtenues par les deux algorithmes sont similaires. Cependant, le temps de simulations de l’algorithme basé sur les méthodes variationnelles est approximativement de 1 minute alors que l’algorithme en comparaison a un temps de simulation de 5 heures.



FIGURE 2 – Image hyperspectrale réelle : *Moffett field* acquise par le capteur AVIRIS en 1997 (à gauche) et la région d’intérêt en couleurs (à droite).

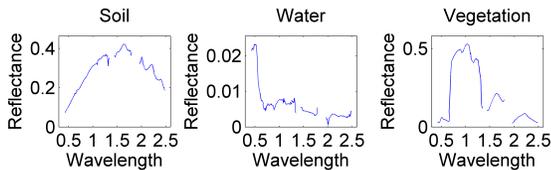


FIGURE 3 – Les $R = 3$ spectres des matériaux purs obtenus par l’algorithme N-FINDR.

5 Conclusions

Cet article présente un nouvel algorithme Bayésien de démixage se basant sur une technique variationnelle. La méthode proposée permet d’approcher la loi jointe *a posteriori* par un produit de lois séparables dont les paramètres intrinsèques sont estimés à l’aide d’un

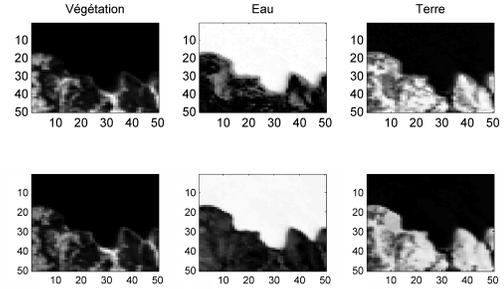


FIGURE 4 – Haut : cartes d’abondances estimées par l’algorithme Bayésien variationnel. Bas : cartes d’abondances estimées par l’algorithme MCMC Bayésien (un pixel noir (resp. blanc) signifie l’absence (resp. présence) du matériau pur).

algorithme itératif. Les simulations effectuées dans cet article sur des données synthétiques et réelles montrent que la méthode proposée atteint des performances d’estimation similaires à un algorithme Bayésien de démixage basé sur une méthode MCMC de la littérature mais avec un coût calculatoire beaucoup moins élevé. Une extension de la méthode variationnelle à un modèle tenant compte des corrélations spatiales est en cours d’étude.

Références

- [1] N. Keshava and J. Mustard, “Spectral unmixing,” *IEEE Signal Processing Magazine*, pp. 44–56, Jan. 2002.
- [2] M. E. Winter, “Fast autonomous spectral endmember determination in hyperspectral data,” in *Proc. 13th Int. Conf. on Applied Geologic Remote Sensing*, vol. 2, Vancouver, April 1999, pp. 337–344.
- [3] J. Li and J. M. Bioucas-Dias, “Minimum volume simplex analysis : a fast algorithm to unmix hyperspectral data,” in *Proc. IEEE Int. Conf. Geosci. Remote Sens. (IGARSS)*, vol. 3, Boston, MA, Jul. 2008, pp. 250–253.
- [4] D. C. Heinz and C.-I Chang, “Fully constrained least squares linear spectral mixture analysis method for material quantification in hyperspectral imagery,” *IEEE Trans. Geosci. and Remote Sensing*, vol. 39, no. 3, pp. 529–545, March 2001.
- [5] C. Theys, N. Dobigeon, J.-Y. Tourneret, and H. Lantéri, “Linear unmixing of hyperspectral images using a scaled gradient method,” in *Proc. IEEE-SP Workshop Stat. and Signal Processing (SSP)*, Cardiff, UK, Aug. 2009, pp. 729–732.
- [6] N. Dobigeon, J.-Y. Tourneret, and C.-I Chang, “Semi-supervised linear spectral unmixing using a hierarchical Bayesian model for hyperspectral imagery,” *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 56, no. 7, pp. 2684–2696, July 2008.
- [7] T. S. Jaakkola and M. Jordan, “Bayesian parameter estimation via variational methods,” *Statistics and Computing*, vol. 10, no. 1, pp. 25–37, Jan. 2000.
- [8] N. Dobigeon, J.-Y. Tourneret, and M. Davy, “Joint segmentation of piecewise constant autoregressive processes by using a hierarchical model and a Bayesian sampling approach,” *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 55, no. 4, pp. 1251–1263, April 2007.
- [9] V. Smidl and A. Quinn, *The variational Bayes method in signal processing*. New York : Springer Verlag, 2006.
- [10] O. Eches, N. Dobigeon, J.-Y. Tourneret, and H. Snoussi, “Variational methods for spectral unmixing of hyperspectral images,” University of Toulouse, Tech. Rep., Oct. 2010. [Online]. Available : <http://hi.is/~eches>
- [11] T. Akgun, Y. Altunbasak, and R. M. Mersereau, “Super-resolution reconstruction of hyperspectral images,” *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 14, no. 11, pp. 1860–1875, Nov. 2005.