

# Formules de reconstruction améliorées pour l'échantillonnage périodique non uniforme d'ordre 2

Marie CHABERT<sup>1,2</sup> et Bernard LACAZE<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Université de Toulouse, IRIT-ENSEEIH, Toulouse, France

<sup>2</sup>TéSA 14/16 Port St-Etienne 31000 Toulouse France

marie.chabert@enseeiht.fr, bernard.lacaze@tesa.prd.fr

**Résumé** – Cet article étudie la reconstruction d'un processus aléatoire passe-bas ou passe-bande à partir d'un échantillonnage périodique non uniforme d'ordre 2. Le schéma PNS2 (pour *Periodic Nonuniform Sampling of order 2*) utilise deux suites entrelacées de même taux d'échantillonnage fixé en fonction du critère de Landau. La formule exacte de reconstruction classiquement associée au PNS2 est constituée de deux séries dont le terme général est en sinus cardinal. En pratique, le nombre d'échantillons disponibles est restreint ce qui conduit à une troncature des séries et donc à des formules approchées. Le taux de convergence de la série est donc un critère primordial pour les performances de la reconstruction. Or les termes en sinus cardinal conduisent à une convergence lente. Lorsque le processus est suréchantillonné par rapport au critère de Landau, nous proposons des fonctions d'interpolation en cosinus surelevé dont la régularité conduit à une augmentation de la convergence de la série et donc des performances de l'interpolation. Les performances de ces formules sont étudiées en fonction du nombre d'échantillons disponibles et du facteur de suréchantillonnage.

**Abstract** – This paper studies the reconstruction of a random low-pass or band-pass process from a non uniform periodic random sampling of order 2. This sampling scheme uses two interleaved sample sequences at the same rate. This rate is chosen according to the Landau criterion. The associated exact reconstruction formula is composed of two series with cardinal sine functions as general terms. In practical applications, the signal is observed on a finite window. The exact reconstruction formula is then approached by truncation of the series. The rate of convergence of the series has thus a strong influence on the reconstruction performance. Unfortunately, the cardinal sine functions lead to a slow convergence. In the case of an over-sampled process, we propose interpolation functions derived from raised cosine filters. The regularity of these functions leads to a higher series convergence rate. The proposed interpolation functions dramatically increase the series convergence rate and thus the reconstruction performance. The reconstruction performance is studied as a function of the window size and of the sampling rate.

## 1 Introduction

L'échantillonnage non uniforme périodique d'ordre 2 (PNS2 pour *Periodic Nonuniform Sampling of order 2*) est obtenu par entrelacement de deux séquences d'échantillonnage périodiques de même période [1], [2], [3], [4]. Ce procédé d'échantillonnage réduit la cadence d'acquisition des échantillons [1] et possède la propriété d'éliminer le repliement dans le cas des signaux passe-bande [2], [3], [5]. La reconstruction exacte du processus de départ en un instant quelconque est possible et nécessite seulement la connaissance de sa bande spectrale [6]. Malheureusement, les formules de reconstruction généralement utilisées souffrent d'un faible taux de convergence. Cet article propose des formules de reconstruction exacte possédant un taux de convergence élevé. Les fonctions d'interpolation utilisées sont obtenues à partir de filtres en cosinus surelevé qui possèdent les propriétés requises de continuité et de dérivabilité. La formule de reconstruction est fournie de manière explicite pour des signaux passe-bas mais également pour des signaux passe-bande, tels que ceux rencontrés en télécommunication et pour lesquels l'échantillonnage PNS2 montre tout son intérêt.

### 1.1 Modèle de signal

Le signal considéré est un processus aléatoire stationnaire  $\mathbf{Z} = \{Z(t), t \in \mathbb{R}\}$  de densité spectrale de puissance  $s_Z(\omega)$  définie par :

$$E[Z(t)Z^*(t-\tau)] = \int_{\Delta} e^{i\omega\tau} s_Z(\omega) d\omega$$

où  $E[\cdot]$  désigne l'espérance mathématique et  $*$  le complexe conjugué. Sa densité spectrale est à support  $\Delta$  inclu dans un ensemble  $\Delta_l$  défini par :

$$\Delta_l = ((-2l-1)\pi, (-2l+1)\pi) \cup ((2l-1)\pi, (2l+1)\pi)$$

où  $l \in \mathbb{N}$ . Le cas d'un signal en bande de base (respectivement en bande transposée) est obtenu pour  $l = 0$  (respectivement  $l \neq 0$ ) [7], [8].

### 1.2 Schéma d'échantillonnage et formules de reconstruction

Pour des signaux en bande transposée ( $l \neq 0$ ), nous considérons le schéma d'échantillonnage PNS2 qui prélève les valeurs du processus en des instants distincts répartis selon deux séquences périodiques décalées l'une par rapport l'autre et définies par :

$$\mathbf{t}^a = \{n + a, n \in \mathbb{Z}\} \text{ et } \mathbf{t}^b = \{n + b, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Le taux d'échantillonnage moyen, alors égal à 2, est adapté à la largeur,  $4\pi$ , de la bande passante vérifiant ainsi le critère de Landau [9]. Alors que le critère de Nyquist porte sur la mesure de Lebesgue de la bande totale, celui de Landau porte sur celle de la bande passante. Sous la condition que  $2l(b-a) \notin \mathbb{Z}$ , le signal  $\mathbf{Z}$  peut être reconstruit de manière exacte, à un instant  $t$  quelconque, à partir des deux séquences de d'échantillons en utilisant la formule suivante [2], [3] :

$$Z(t) = \frac{A_a(t) \sin 2\pi l(t-b) + A_b(t) \sin 2\pi l(a-t)}{\sin 2\pi l(a-b)} \quad (1)$$

avec :

$$A_x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sin \pi(t-n-x)}{\pi(t-n-x)} Z(n+x). \quad (2)$$

Cette formule est la somme de deux séries dont les termes généraux sont des sinus cardinaux. Le taux de convergence de la formule de reconstruction est donc en  $n^{-1}$ , équivalent à celui de la formule classique de Shannon utilisée pour la reconstruction après échantillonnage uniforme. Ce faible taux de convergence constitue un inconvénient dans les applications pratiques pour lesquelles la longueur de la fenêtre d'observation est limitée. Dans la suite, nous noterons  $N$  le nombre d'échantillons de l'une des deux séquences disponibles dans cette fenêtre. Dans ce cas, le signal reconstruit est une approximation  $\tilde{Z}(t)$  de  $Z(t)$  obtenue pour :

$$\tilde{A}_x(t) = \sum_{n=-N/2}^{n=+N/2} \frac{\sin \pi(t-n-x)}{\pi(t-n-x)} Z(n+x). \quad (3)$$

## 2 Formules de reconstruction améliorées

### 2.1 Principe

La formule de reconstruction (1) repose sur l'isométrie fondamentale liant le processus  $Z(t)$  et l'exponentielle complexe  $e^{i\omega t}$  [5]. Elle est obtenue en développant en série de Fourier la fonction  $e^{i\omega t}$ ,  $\omega \in (-\pi, \pi)$  rendue  $2\pi$ -périodique par rapport à la variable  $\omega$ . Or cette fonction est discontinue sauf pour  $t \in \mathbb{Z}$  et son développement en série de Fourier converge donc en  $n^{-1}$  [10]. Le taux de convergence de la formule de reconstruction peut-être amélioré si elle est construite par développement en série de Fourier de fonctions plus régulières. Les formules améliorées proposées dans cet article ont été construites à partir de la fonction de transfert du filtre en cosinus surélevé possédant les propriétés de continuité et de dérivabilité souhaitées [11].

### 2.2 Filtre en cosinus surélevé

Soit  $\mathcal{F}$  un filtre linéaire invariant par rapport au temps de réponse impulsionnelle  $f(t)$  et de fonction de transfert  $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u} du$ . Le résultat du filtrage de  $\mathbf{Z}$  est le processus  $\mathbf{UF}[\mathbf{Z}]$  défini par :

$$U(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) Z(t-u) du$$

Le filtre en cosinus surélevé  $\mathcal{F}_\alpha$  de coefficient d'arrondi  $\alpha \neq \pi$  (cette condition permet d'exclure le cas dégénéré du filtre

passé-bas idéal) est défini par sa fonction de transfert [7] :

$$F_\alpha(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \omega \in (-\alpha, \alpha) \\ \cos^2 \left[ \frac{\pi}{2(\pi-\alpha)} (\omega - \alpha) \right] & \text{pour } \omega \in (\alpha, \pi) \\ \cos^2 \left[ \frac{\pi}{2(\pi-\alpha)} (\omega + \alpha) \right] & \text{pour } \omega \in (-\pi, -\alpha) \end{cases} \quad (4)$$

sur l'intervalle  $(-\pi, \pi)$ , étendue par périodicité à la droite réelle selon  $F_\alpha(\omega) = F_\alpha(\omega + 2\pi)$ . Les formules d'interpolation proposées dans cet article utilisent deux propriétés particulières de  $F_\alpha(\omega)$  et conduisent à un taux de convergence largement supérieur à celui de la formule de reconstruction initiale.

La première propriété, qui garantit la reconstruction exacte, est que, si  $s_Z(\omega) = 0$  pour  $\omega \notin \Delta_{l,\alpha}$  avec :

$$\Delta_{l,\alpha} = (-2l\pi - \alpha, -2l\pi + \alpha) \cup (2l\pi - \alpha, 2l\pi + \alpha) \quad (5)$$

alors

$$Z(t) = \mathcal{F}_\alpha[Z](t) \quad (6)$$

puisque, sur la bande du processus,  $F_\alpha(\omega) = 1$ . Considérons la décomposition en série de Fourier de  $F_\alpha(\omega) e^{i\omega t}$  sur l'intervalle  $(-\pi, \pi)$  :

$$F_\alpha(\omega) e^{i\omega t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(t) e^{in\omega}, \omega \in (-\pi, \pi). \quad (7)$$

Les fonctions  $a_n(t)$  sont définies par :

$$a_n(t) = \frac{-\beta^2 \sin \alpha(t-n) + \sin \pi(t-n)}{2\pi(t-n)[(t-n)^2 - \beta^2]} \text{ avec } \beta = \frac{\pi}{\pi - \alpha}. \quad (8)$$

Notons que la décomposition (7) n'est valable que pour  $\omega \in (-\pi, \pi)$ , sauf dans le cas où  $t$  est entier. L'égalité  $F_\alpha(\omega) = 1$  sur  $\Delta_{0,\alpha} \subset (-\pi, \pi)$  est équivalente à :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{i\omega t} - \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(t) e^{in\omega} \right|^2 s_Z(\omega) d\omega = 0.$$

Cette égalité permet d'établir la formule de reconstruction donnée de manière explicite dans le paragraphe suivant pour les processus passe-bas et passe-bande.

La deuxième propriété, qui garantit la rapidité de convergence, est que la dérivée de  $F_\alpha(\omega) e^{i\omega t}$  est continue sur l'intervalle  $(-\pi, \pi)$ . Elle possède donc une décomposition en série de Fourier qui converge en  $n^{-3}$  [10]. Cette propriété générale se vérifie simplement d'après (8) : la décroissance du terme  $a_n(t)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini est effectivement en  $n^{-3}$ .

### 2.3 Formule de reconstruction exacte à convergence rapide

En bande de base, après échantillonnage uniforme, sous la condition que  $s_Z(\omega) = 0, \omega \notin \Delta_{0,\alpha}$ , la formule de reconstruction suivante s'applique :

$$Z(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(t) Z(n). \quad (9)$$

où les  $a_n(t)$ , sont définies dans (8).

En bande transposée, pour effectuer la reconstruction, le processus  $\mathbf{Z}$  peut être décomposé en deux termes dont l'un correspond aux fréquences positives et l'autre aux fréquences négatives :

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_+ + \mathbf{Z}_-$$

avec

$$\begin{cases} s_{Z_+}(\omega) = 0, & \omega \notin (2l\pi - \alpha, 2l\pi + \alpha) \\ s_{Z_-}(\omega) = 0, & \omega \notin (-2l\pi - \alpha, -2l\pi + \alpha) \end{cases}$$

Les deux processus  $Z_+$  et  $Z_-$  ont des bandes spectrales de longueur inférieure à  $2\pi$  et peuvent donc être reconstruits à partir de l'une quelconque des séquences d'échantillonnage  $\mathbf{t}_a$  ou  $\mathbf{t}_b$  en utilisant l'isométrie et la relation suivante :

$$e^{i\omega t} = e^{2i\pi\epsilon l(t-a)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(t-a) e^{i(n+a)\omega} \quad (10)$$

pour  $\omega \in (-\alpha + 2\pi\epsilon l, \alpha + 2\pi\epsilon l)$  avec  $\epsilon = \pm 1$ . Par exemple, la formule de reconstruction de  $Z_-$  à partir des échantillons prélevés aux instants  $\mathbf{t}_b$  est la suivante :

$$Z_-(t) = e^{-2i\pi l(t-b)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(t-b) Z_-(n+b).$$

La reconstruction de  $Z_-$  et  $Z_+$  avec chacune des séquences d'échantillonnage  $\mathbf{t}_a$  et  $\mathbf{t}_b$  nous permet de construire un système linéaire à deux équations :

$$\begin{cases} Z_+(t) e^{-2i\pi l(t-a)} + Z_-(t) e^{2i\pi l(t-a)} = A_a(t) \\ Z_+(t) e^{-2i\pi l(t-b)} + Z_-(t) e^{2i\pi l(t-b)} = A_b(t) \end{cases}$$

avec :

$$A_x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(t-x) Z(n+x)$$

La résolution de ce système fournit la formule de reconstruction suivante :

$$Z(t) = \frac{A_a(t) \sin 2\pi l(t-b) + A_b(t) \sin 2\pi l(a-t)}{\sin 2\pi l(a-b)}$$

Cette formule est valable pour les signaux en bande de base tels que  $s_Z(\omega) = 0, \omega \notin \Delta_{l,\alpha}, l \neq 0$ . En bande de base comme en bande transposée, le taux de convergence est en  $n^{-3}$ .

### 3 Etude des performances

Dans un premier temps, les formules précédentes ont été testées sur un signal passe-bande ( $l = 3, \alpha = 0.251 * \pi$ ) somme d'un sinus à phase aléatoire uniforme et d'un bruit blanc dans la bande considérée. La densité spectrale de puissance du signal original est représentée sur la figure 1. Le signal est ensuite échantillonné selon les deux séquences entrelacées  $\mathbf{t}_a$  et  $\mathbf{t}_b$  avec  $a = 0.1$  et  $b = 0.777$ . La figure 2 représente les deux séquences d'échantillons associées ainsi que la reconstruction obtenue avec les deux formules dans le cas d'une fenêtre d'observation finie de taille  $N = 10$ . Dans les deux cas, le signal reconstruit passe par les deux séquences d'échantillons. Toutefois, la reconstruction n'est pas exacte sur la globalité de la fenêtre comme le confirme la figure 3 représentant l'erreur. D'après les figures 2 et 3, il est clair que la reconstruction est d'autant meilleure que l'on se trouve au voisinage du centre de la fenêtre : le signal est alors reconstruit avec un nombre équivalent d'échantillons de part et d'autre. Les effets de bord sont visibles pour les deux méthodes sur les figures 2 et 3. En pratique, la reconstruction s'effectue sur une fenêtre glissante. Nous comparerons les performances des méthodes en terme d'erreur de reconstruction au point central de la fenêtre correspondant à  $t = 0$  en fonction des différents paramètres intervenant dans le modèle proposé. La figure 4 montre l'influence

de la taille  $N$  de la fenêtre d'observation : comme prévu, la convergence est plus rapide avec la méthode proposée. L'erreur quadratique de reconstruction représentée sur les figures 4 et 5 est estimée à partir d'une moyenne sur  $n_{it} = 1000$  réalisations du signal. La figure 5 montre l'influence du paramètre  $\alpha$  mesurant le suréchantillonnage. Plus le signal est suréchantillonné plus il y a d'intérêt à utiliser la méthode proposée pour accélérer la convergence.

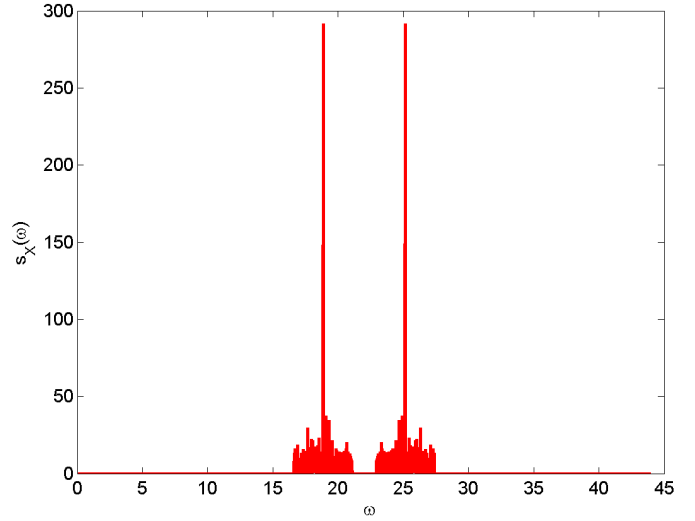


FIGURE 1 – Densité spectrale de puissance du signal original

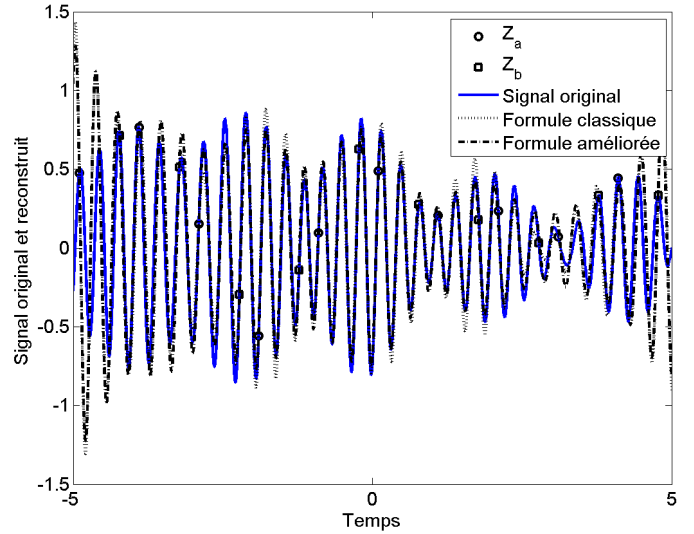


FIGURE 2 – Reconstruction temporelle du signal

### 4 Conclusion

Cet article s'intéresse à la reconstruction après échantillonnage non uniforme de type PNS2. Une formule de reconstruction améliorée en terme de vitesse de convergence est proposée dans

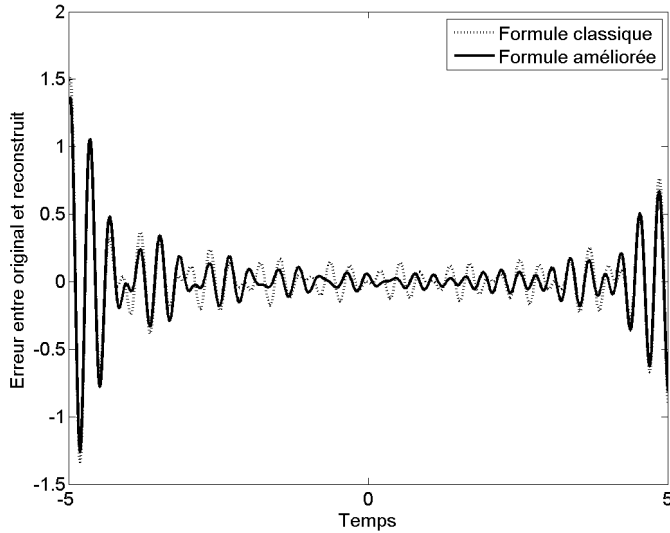


FIGURE 3 – Erreur de reconstruction

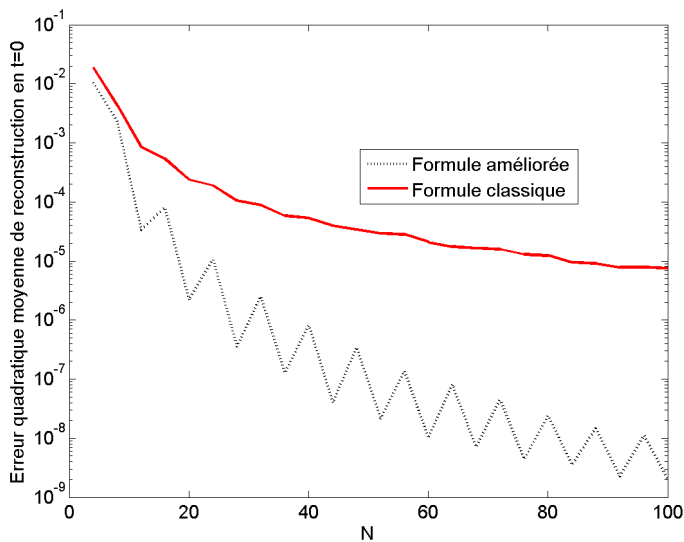


FIGURE 4 – Influence du nombre d'échantillons

le cas suréchantillonné. Ceci résulte d'un choix particulier des fonctions d'interpolation. L'interpolateur en cosinus surélevé proposé offre une convergence beaucoup plus rapide que celui, classique, en sinus cardinal. L'article illustre ce résultat sur des signaux synthétiques. En particulier la vitesse de convergence est étudiée en fonction des paramètres  $l$  et  $\alpha$  fixant la bande du signal (fréquence centrale et largeur). Sur ce principe, d'autres interpolateurs peuvent également être envisagés conduisant à des vitesses de convergence encore supérieures.

## Références

[1] J. L. Yen. On nonuniform sampling of bandwidth-limited signals. *IRE Trans. on Circ. Th.*, CT-3(12) :251–257, 1956.

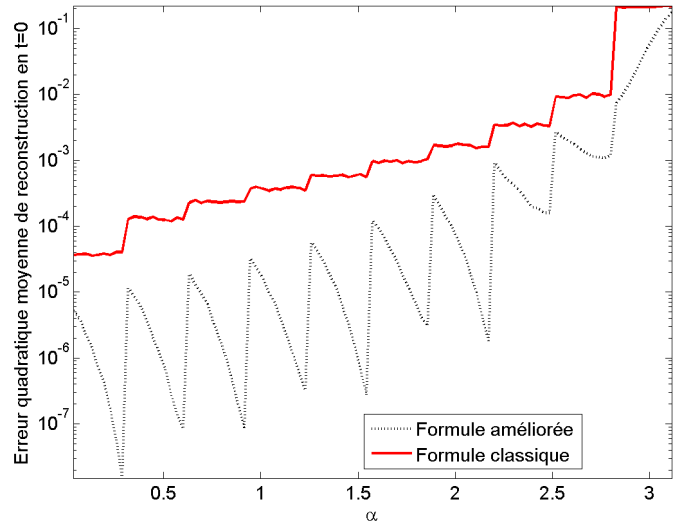


FIGURE 5 – Influence du sur-échantillonnage

- [2] J. R. Higgins. A sampling theorem for irregular sample points. *IEEE Trans. Inf. Theory*, pages 621–622, 1976.
- [3] J. R. Higgins. Some gap sampling series for multiband signals. *Signal Processing*, 12(66) :313–319, April 1987.
- [4] Y-P. Lin and P. P. Vaidyanathan. Periodically nonuniform sampling of bandpass signals. *IEEE Trans. Circuits and Systems*, 45(3) :340–351, 1998.
- [5] B. Lacaze. Equivalent circuits for the PNS2 sampling scheme. *IEEE Trans. Circuits and Systems*, 57(11) :2904–2914, Nov 2010.
- [6] B. Lacaze. About a multiperiodic sampling scheme. *IEEE Signal Processing Lett.*, 6(12) :307, Dec 1999.
- [7] A. Papoulis. *Signal Analysis*. Mc-Graw Hill, New York, 1977.
- [8] H. Cramèr and M. R. Leadbetter. *Stationary and related stochastic processes*. Wiley, New-York, 1966.
- [9] H. J. Landau. Sampling, data transmission, and the nyquist rate. *Proceedings of the IEEE*, 55(10) :11701–1706, Oct. 1967.
- [10] C. Gasquet and P. Witomski. *Analyse de Fourier et applications. Filtrage, Calcul Numérique, Ondelettes*. Masson, Paris, Milan, Barcelone, Mexico, 1990.
- [11] B. Lacaze and M. Chabert. New reconstruction formulas for oversampled processes and functions. *Signal Processing*, 86 :2827–2835, 1999.