

Étude d'un système de Pearson bivarié pour des images hétérogènes d'observation de la Terre

Marie CHABERT et Jean-Yves TOURNERET

Université de Toulouse, IRIT-ENSEEIH-TéSA, Toulouse, France

marie.chabert@enseeiht.fr, jean-yves.tourneret@enseeiht.fr

Résumé – Cet article étudie l'intérêt du système de Pearson multivarié pour la modélisation conjointe d'images d'observation de la Terre provenant de capteurs différents. Les images considérées sont issues de capteurs optiques et de radars à synthèse d'ouverture. Le système de Pearson univarié a déjà montré sa pertinence pour la modélisation des images radar. Cet article étudie une généralisation multivariée et plus particulièrement bivariée de ce système. Les paramètres de la distribution bivariée sont estimés en utilisant la méthode des moments. Les performances de l'estimation sont évaluées sur des données synthétiques et la pertinence du modèle sur des données réelles.

Abstract – This paper studies the potential interest of the multivariate Pearson system for the statistical modeling of images acquired by different sensors. These images include optical and synthetic aperture radar remote sensing images. The univariate Pearson system has shown good capacities to capture the statistical properties of radar images. This paper introduces a generalization of this system to multidimensional vectors with a particular attention to the bivariate case. The method of moments is investigated to estimate the unknown parameters of bivariate Pearson distributions. The estimation performance is evaluated using synthetic and real data.

1 Introduction

Les modèles statistiques multivariés peuvent être exploités dans de nombreuses applications telles que le recalage d'images ou la détection de changements. La loi jointe associée à ces modèles permet de calculer des informations pertinentes intervenant dans la prise de décision telles que le coefficient de corrélation [1], l'information mutuelle [2] ou la divergence de Kullback-Leibler [3]. Dans certaines situations, l'utilisateur dispose d'images issues de capteurs différents (par exemple optiques et radar) qui fournissent des informations complémentaires sur la scène observée. Ainsi, les images optiques sont caractérisées par une très haute résolution spatiale mais leur acquisition nécessite des conditions météorologiques et d'éclairage particulières. Par ailleurs, un bruit de scintillement limite la qualité des images radar mais certains objets y apparaissent beaucoup plus nettement que sur les images optiques, et ceci indépendamment des conditions d'acquisition [4, Chap. 2]. Exploiter la complémentarité de données hétérogènes nécessite un modèle statistique particulièrement flexible. Le système de Pearson apparaît comme un bon candidat puisque dans le cas univarié, il couvre une grande variété de distributions incluant les lois gaussiennes, Gamma, Beta et de Fisher adaptées aux images optiques ou radar [4, Chap. 2], [5], [6]. Dans le cas des images issues de radars à synthèse d'ouverture (RSO), un seul modèle statistique est insuffisant pour rendre compte de la grande variabilité des capteurs et des scènes observées [5]. À faible résolution, le champ complexe est gaussien, l'amplitude de l'image radar suit une loi de Rayleigh et son intensité une loi exponentielle négative. À plus haute résolution, la distribution log-normale s'applique à l'intensité des zones urbaines alors que la loi de Weibull est plus adaptée aux océans et aux terres émergées

dans le cas mono-vue [5]. Pour des images multi-vues, l'intensité peut généralement être décrite par une loi Gamma [5]. Le système de Pearson univarié a déjà été utilisé pour modéliser les images RSO en raison de sa flexibilité vis-à-vis de tous ces cas possibles [3, 7]. Ce système est simple à utiliser et fournit une expression analytique des lois univariées de l'image après calcul de deux paramètres fonctions des moments [3, 7]. Cet article introduit et étudie les propriétés d'un système de Pearson multivarié permettant de rendre compte conjointement des propriétés statistiques de plusieurs images d'une même scène. Par simplicité, cet article se concentre sur le cas bivarié lorsque deux images sont disponibles mais le système de Pearson est défini dans le cas multivarié. Le plan de l'article est le suivant : le paragraphe 2 introduit le système de Pearson multivarié et bivarié. Le paragraphe 3 s'intéresse à l'estimation des paramètres de la distribution de Pearson bivariée par la méthode des moments. Le paragraphe 4 présente les résultats sur des données synthétiques et réelles. Les conclusions et perspectives font l'objet du paragraphe 5.

2 Le système de Pearson multivarié

Le système de Pearson permet de modéliser une grande variété de distributions [6]. Nous présentons tout d'abord les propriétés de ce système de distribution puis sa généralisation au cas multivarié.

2.1 Le système de Pearson univarié

La distribution de Pearson univariée est caractérisée par sa densité de probabilité $p(x)$ qui vérifie l'équation différentielle

suivante [6], [8, p. 15]

$$-\frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{b_0 + b_1x}{c_0 + c_1x + c_2x^2} \quad (1)$$

qui est caractérisée par deux vecteurs de paramètres $\mathbf{b} = (b_0, b_1)^T$ et $\mathbf{c} = (c_0, c_1, c_2)^T$. Notons $\beta_1 = E[X^3]^2$ le carré du skewness et $\beta_2 = E[X^4]$ le kurtosis pour une variable aléatoire centrée X de variance unité. Les distributions issues du système de Pearson peuvent être classifiées en 8 types selon les valeurs de β_1 et de β_2 comme le montre la figure 1

- type 0 : gaussienne ($\beta_1 = 0, \beta_2 = 3$)
- type I : Beta à skewness non nul
- type II : Beta à skewness nul ($\beta_1 = 0, \beta_2 < 3$)
- type III : Gamma
- type IV : distribution non standard
- type V : inverse-gamma
- type VI : Fisher
- type VII : Student ($\beta_1 = 0, \beta_2 > 3$).

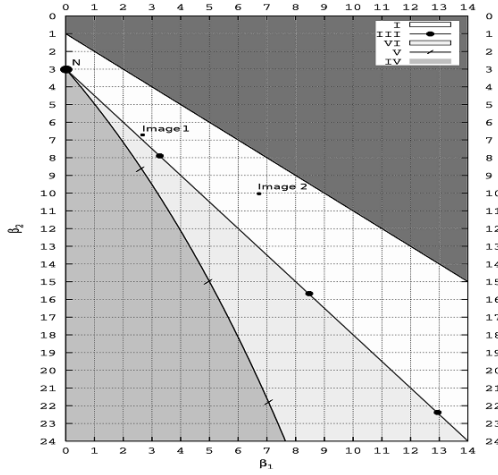


FIGURE 1 – Diagramme de Pearson

Des études ont montré que le système de Pearson univarié possédait des propriétés intéressantes pour les images RSO [3, 7]. Ce système a été utilisé en association avec la divergence de Kullback-Leibler pour détecter des changements entre des images SAR acquises à des dates différentes [3]. Dans la suite, nous présentons le système de Pearson multivarié initialement étudié dans [6] et nous étudions ses propriétés potentielles pour mesurer la corrélation entre des images acquises avec des capteurs différents.

2.2 Système de Pearson multivarié

2.2.1 Définition

La détection de changements et le recalage d'images suscitent un grand intérêt dans la communauté de la télédétection ([4, Chap. 1 and Chap. 4]). Cet article propose de modéliser la distribution jointe d'images éventuellement acquises avec des capteurs différents par une distribution de Pearson multivariée. Cette distribution jointe peut être utilisée pour mettre au point de nouveaux algorithmes de détection de changements ou de recalage. De tels algorithmes ont par exemple été développés dans [2] pour des lois Gamma bivariées associées à des images

RSO.

D'après [6], une distribution de Pearson multivariée peut être définie par la loi du vecteur $\mathbf{X} = \mathbf{M}\boldsymbol{\xi}$ où $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_p)^T$ est un vecteur aléatoire dont les composantes sont distribuées selon une loi de Pearson univariée avec $E(\xi_j) = 0$, $E(\xi_j^2) = 1$, $E(\xi_j^3) = \zeta_j$, $E(\xi_j^4) = \kappa_j$ et \mathbf{M} est une matrice $p \times p$ déterministe appelée matrice de mélange. Les conditions $E(\xi_j) = 0$ et $E(\xi_j^2) = 1$ sont introduites pour des raisons d'identifiabilité des paramètres du modèle.

2.2.2 Moments

Notons $\boldsymbol{\Sigma}$ la matrice de covariance du vecteur \mathbf{X} . Puisque les variables aléatoires ξ_i sont indépendantes et de variance unité, il est facile de montrer que la matrice de covariance de \mathbf{X} est

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{M}\mathbf{M}^T \quad (2)$$

En utilisant l'indépendance entre les variables aléatoires ξ_1, \dots, ξ_p , les moments d'ordre supérieur de \mathbf{X} peuvent être déterminés. Cet article se concentre sur le cas bivarié $p = 2$ où \mathbf{M} est une matrice de mélange 2×2 , $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^T$ et $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$. Ce cas particulier est important pour la détection de changements et le recalage d'images. Les deux variables aléatoires X_1 et X_2 sont alors les valeurs respectives des pixels sur chacune des images I_1 et I_2 . Les moments de \mathbf{X} jusqu'à l'ordre 4 notés $\mu_{ij} = E(X_1^i X_2^j)$ peuvent être exprimés en fonction des paramètres du modèle, i.e., des moments de $\boldsymbol{\xi}$ notés $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1, \kappa_2)$, $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2)$ et des éléments de la matrice de mélange \mathbf{M} notés m_{ij} (avec $i, j = 1, 2$) comme suit :

$$\begin{aligned} \mu_{30} &= m_{11}^3 \zeta_1 + m_{12}^3 \zeta_2, \mu_{03} = m_{21}^3 \zeta_1 + m_{22}^3 \zeta_2, \\ \mu_{21} &= m_{11}^2 m_{21}^2 \zeta_1 + m_{12}^2 m_{22}^2 \zeta_2, \\ \mu_{12} &= m_{11} m_{21}^2 \zeta_1 + m_{12} m_{22}^2 \zeta_2, \\ \mu_{40} &= m_{11}^4 \kappa_1 + 6m_{11}^2 m_{12}^2 \kappa_2, \\ \mu_{04} &= m_{21}^4 \kappa_1 + 6m_{22}^2 m_{21}^2 \kappa_2, \\ \mu_{31} &= m_{11}^3 m_{21} \kappa_1 + 3(m_{11} m_{21}^3 + m_{11}^2 m_{22} m_{21}) + \dots \\ &\quad m_{21}^3 m_{22} \kappa_2, \\ \mu_{22} &= m_{11}^2 m_{21}^2 \kappa_1 + (m_{12}^4 + 4m_{11} m_{21}^2 m_{22} + \\ &\quad m_{11}^2 m_{22}^2) + m_{21}^2 m_{22}^2 \kappa_2, \\ \mu_{13} &= m_{11} m_{21}^3 \kappa_1 + 3(m_{22} m_{12}^3 + m_{22}^2 m_{11} m_{21}) + \\ &\quad m_{21} m_{22}^3 \kappa_2, \mu_{20} = m_{11}^2 + m_{12}^2, \\ \mu_{02} &= m_{22}^2 + m_{21}^2, \mu_{11} = m_{12}(m_{11} + m_{22}). \end{aligned}$$

2.2.3 Densité de probabilité

Un changement de variables permet d'obtenir la densité bivariée du vecteur aléatoire \mathbf{X}

$$p_{\mathbf{X}}(x) = \frac{p_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{M}^{-1}x)}{|\mathbf{M}|}. \quad (3)$$

En utilisant l'indépendance entre les variables aléatoires ξ_1 et ξ_2 , la loi jointe de $\boldsymbol{\xi}$ peut s'écrire $p_{\boldsymbol{\xi}}(\xi_1, \xi_2) = p_{\xi_1}(\xi_1, \cdot) p_{\xi_2}(\cdot, \xi_2)$, où $p_{\xi_1}(\xi_1, \cdot)$ et $p_{\xi_2}(\cdot, \xi_2)$ sont les lois marginales de $\boldsymbol{\xi}$. Par conséquent, la loi jointe de \mathbf{X} peut être formulée explicitement à partir des lois marginales de ξ_1 et de ξ_2 et de la matrice de mélange \mathbf{M} . Ce résultat peut être utilisé pour calculer des mesures de distance comme l'information mutuelle et la divergence de Kullback-Leibler utiles pour la détection de changements [2]. Il faut noter que les composantes du vecteur aléatoire

\mathbf{X} ne sont pas nécessairement marginalement distribuées selon une loi appartenant au système de Pearson.

3 Estimation des paramètres

Cette partie traite le problème de l'estimation des paramètres de la distribution de Pearson bivariée présentée précédemment c'est-à-dire de la matrice de mélange \mathbf{M} et des paramètres $\boldsymbol{\kappa}$ et $\boldsymbol{\zeta}$. La méthode du maximum de vraisemblance est la méthode la plus fréquemment utilisée pour estimer les paramètres d'une densité de probabilité de forme connue. Dans le cas du système de Pearson, d'après le paragraphe 2, la vraisemblance possède plusieurs expressions possibles selon les valeurs des paramètres β_1 et β_2 . Par conséquent, la méthode des moments qui consiste à estimer les paramètres en identifiant les moments théoriques et empiriques (notés respectivement μ_{ij} et $\hat{\mu}_{ij}$) apparaît plus appropriée. Les moments empiriques sont estimés sur une fenêtre composée de n observations du vecteur aléatoire \mathbf{X} . Une observation est constituée d'une paire de valeurs associée à chacune des images (une image optique et une image radar dans le cas d'application considérée) :

$$\hat{\mu}_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n X_1^i(l) X_2^j(l) \quad (4)$$

où n est le nombre de pixels de la fenêtre d'observation centrée sur le pixel d'intérêt et $\mathbf{X} = [X_1(l), X_2(l)]^T$ est le vecteur d'observation d'indice l . La méthode des moments détermine les paramètres inconnus \mathbf{M} et $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\kappa}^T, \boldsymbol{\zeta}^T)^T$ qui minimisent le critère des moindres carrés suivant

$$J(\mathbf{M}, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{ij} [\mu_{ij}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\theta}) - \hat{\mu}_{ij}]^2. \quad (5)$$

D'après le paragraphe 2.2.2, pour une matrice de mélange donnée \mathbf{M} , les moments de la distribution de Pearson bivariée sont liés aux paramètres $\boldsymbol{\theta}$ par une transformation affine

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{A}(\mathbf{M})\boldsymbol{\theta} - \mathbf{b}(\mathbf{M}) \quad (6)$$

où $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\theta})$ contient tous les moments considérés, $\mathbf{A}(\mathbf{M})$ est une matrice 2×2 et $\mathbf{b}(\mathbf{M})$ est un vecteur 2×1 dont les éléments dépendent de \mathbf{M} . Par conséquent, pour une matrice de mélange \mathbf{M} , le critère des moindres carrés est minimisé pour

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{M}) = [\mathbf{A}^T(\mathbf{M})\mathbf{A}(\mathbf{M})]^{-1} \mathbf{A}^T(\mathbf{M}) [\mathbf{b}(\mathbf{M}) + \hat{\boldsymbol{\mu}}] \quad (7)$$

où $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ est un vecteur contenant les moments estimés $\hat{\mu}_{ij}$. Cette relation montre que le vecteur $\boldsymbol{\theta}$ peut être estimé à partir des moments empiriques et de la matrice de mélange \mathbf{M} . L'estimation de la matrice de mélange \mathbf{M} peut être réalisée en utilisant la relation (2), i.e., en déterminant la racine carrée positive de la matrice de covariance

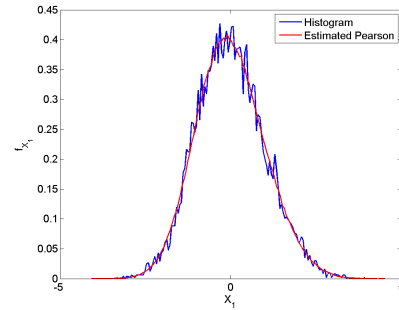
$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \mathbf{X}(l)\mathbf{X}^T(l). \quad (8)$$

4 Simulations

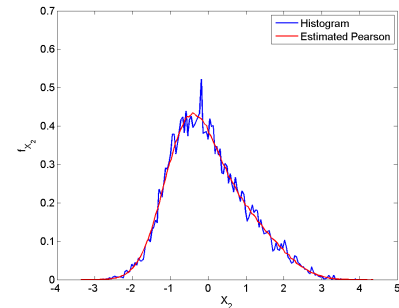
4.1 Données synthétiques

Nous considérons des variables aléatoires générées selon un modèle de Pearson bivarié à partir d'une matrice de mélange

dont les éléments sont $m_{11} = m_{22} = 0.8$, $m_{12} = m_{21} = 0.6$, et les paramètres $\zeta_1 = 0, \zeta_2 = 1, \kappa_1 = \kappa_2 = 3$. Les figures 2-a) et 2-b) montrent les histogrammes de 1000 réalisations des variables aléatoires X_1 et X_2 (en bleu). Les paramètres du modèle $\mathbf{M}, \boldsymbol{\zeta}$ and $\boldsymbol{\kappa}$ sont estimés grâce à la méthode des moments présentée dans le paragraphe 3. Ces estimées sont ensuite utilisées pour générer 100000 réalisations de la distribution bivariée. Les histogrammes de ces données générées à partir des estimées sont représentés sur les figures 2-a) et 2-b) (en rouge) et peuvent être comparés aux histogrammes associés aux vecteurs X_1 et X_2 . Les histogrammes se superposent ce qui atteste des bonnes performances de la méthode des moments. Les figures 3 et 4 représentent l'erreur quadratique moyenne en fonction du nombre de pixels de la fenêtre d'observation n . Les résultats montrent que la matrice de mélange est plus facile à estimer que les moments (d'ordre 3 et 4) $\boldsymbol{\zeta}$ et $\boldsymbol{\kappa}$.



(a) Image synthétique X_1



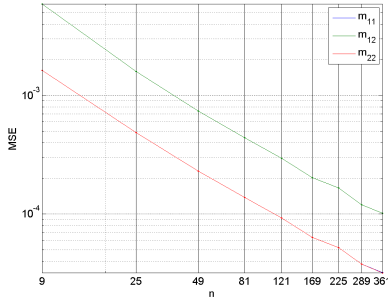
(b) Image synthétique X_2

FIGURE 2 – Résultats sur des images synthétiques

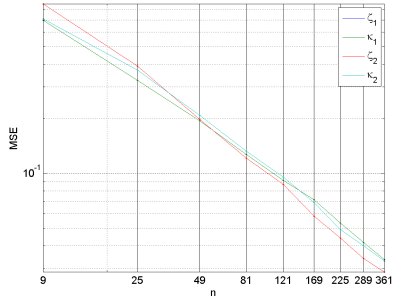
4.2 Données réelles

La deuxième série de simulations utilise des images réelles fournies par le CNES (Toulouse, France)¹ afin d'évaluer l'intérêt potentiel de la distribution de Pearson bivariée pour les images d'observation de la Terre. La figure 4-a) montre une image de la banlieue toulousaine acquise par le capteur aéroporté PELI-CAN. L'image SAR associée est représentée sur la figure 4-b). Nous considérons des régions à peu près homogènes dans chacune des deux images. Les histogrammes empiriques de ces deux régions sont représentés sur les figures 5-a) et 5-b)

1. Les auteurs remercient le CNES de Toulouse et plus spécialement Jordi Inglada pour ces données réelles.



(a) Coefficients de la matrice de mélange



(b) Moments

FIGURE 3 – Performances de l'estimation des paramètres en fonction de la longueur de la fenêtre d'observation

(en bleu) et comparés aux lois marginales de Pearson (lignes rouges), dont les paramètres du modèle ont été estimés grâce à la méthode des moments. Les lois marginales issues du modèle de Pearson épousent bien les histogrammes empiriques des images réelles. Le modèle de Pearson se montre donc simple d'utilisation et capable de s'adapter à des images RSO et optiques.



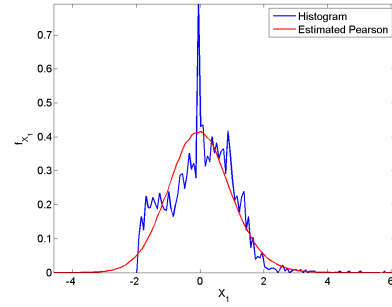
(a) Image optique

(b) Image radar

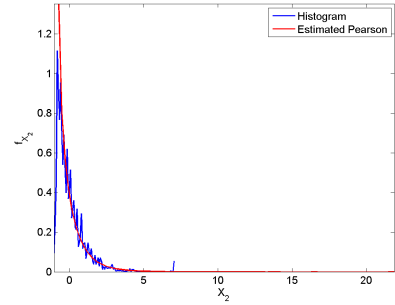
FIGURE 4 – Images réelles

5 Conclusion

Nous avons montré que le système de Pearson multivarié offre un modèle statistique flexible pour des données hétérogènes. Nous avons plus particulièrement étudié le cas de deux images, l'une optique et l'autre radar, d'une même scène. Les paramètres du système de Pearson bivarié ont été estimés en utilisant la méthode des moments. Les performances ont été étudiées à partir de données synthétiques et réelles. Le modèle de Pearson bivarié s'avère suffisamment flexible pour s'adapter aux



(a) Image optique



(b) Image Radar

FIGURE 5 – Résultats sur des images réelles

images radar et optiques. L'application de ce modèle statistique à la détection de changements et au recalage d'image est actuellement à l'étude.

Références

- [1] J.-Y. Tourneret, V. Poulain, M. Chabert, and J. Inglada. Similarity measure between vector data bases and optical images for change detection. In *Proc. IEEE Int. Conf. Geosci. and Remote Sensing (IGARSS)*, pages 992–995, Cape Town, South Africa, July 2009.
- [2] F. Chatelain, J.-Y. Tourneret, A. Ferrari, and J. Inglada. Bivariate gamma distributions for images registration and change detection. *IEEE Trans. on Image Processing*, 16(7) :1796–1806, July 2007.
- [3] J. Inglada. Change detection on SAR images by using a parametric estimation of the Kullback-Leibler divergence. In *Proc. IEEE Int. Conf. Geosci. and Remote Sensing (IGARSS)*, pages 4104–4106, Toulouse, France, July 2003.
- [4] C. Collet, J. Chanussot, and K. Chehdi (Eds). *Multivariate Image Processing*. Wiley, New York, 2010.
- [5] C. Oliver and S. Quegan. *Understanding Aperture Radar Images*. Artech House, 1998.
- [6] Y. Nagahara. A method of simulating multivariate nonnormal distributions by the Pearson distribution system and estimation. *Computational statistics and data analysis*, 47(1) :1–29, 2004.
- [7] Y. Delignon, R. Garello, and A. Hillion. Statistical modeling of ocean SAR images. *IEE Proc. on Radar, Sonar and Navig.*, 44(66) :348–354, 1997.
- [8] N. L. Johnson, S. Kotz, and N. Balakrishnan. *Continuous Univariate Distribution - Second Edition - Volume 1*. Wiley, 1994.