

Estimation de la fréquence instantanée d'un signal FM par opérateur d'énergie

Abdel-Ouahab Boudraa

Arts et Métiers ParisTech/Ecole Navale

IRENav-EA3634, BCRM Brest, CC 600, 29240 BREST Cedex 9, France

boudra@ecole-navale.fr

Résumé – L'opérateur d'énergie Ψ_B [1] est une extension de l'opérateur non-linéaire d'énergie croisée de Teager-Kaiser [2] pour l'estimation de l'interaction en énergie entre deux signaux complexes. Nous avons récemment montré l'intérêt d'un tel opérateur pour l'analyse des signaux non-stationnaires [3]. Dans ce papier deux nouvelles propriétés de l'opérateur Ψ_B sont présentées. La première propriété est une relation entre l'opérateur Ψ_B et le signal dynamique qui est une généralisation de la Fréquence Instantanée (FI) d'un signal [4]. La seconde propriété est un lien étroit entre l'opérateur Ψ_B et la FI d'un signal FM. Ces deux propriétés confirment l'intérêt de l'opérateur Ψ_B pour l'estimation d'attributs instantanés (FI, ...) des signaux non-stationnaires. Nous illustrons l'intérêt de l'opérateur Ψ_B par le calcul de la FI d'un signal à phase polynomiale noyé dans un bruit blanc Gaussien complexe de rapport signal à bruit allant de -6dB à 40dB. Les résultats obtenus montrent que les performances d'estimation de la FI basée sur l'opérateur Ψ_B sont meilleurs que celles des approches basées sur la transformée d'Hilbert et la distribution de Wigner-Ville.

Abstract – Ψ_B energy operator [1] is an extension of the cross Teager-Kaiser energy operator [2] which is an non-linear energy tracking operator to deal with complex signals and its usefulness for non-stationary signals analysis has been demonstrated [3]. In this paper two new properties of Ψ_B operator are established. The first property is the link between Ψ_B operator and the dynamic signal which is a generalization of the Instantaneous Frequency (IF) [4]. The second property obtained for FM signals is a simple way to estimate the IF. These properties confirm the interest of Ψ_B operator to track instantaneous features (IF, ...) of non-stationary signals. We show the interest of Ψ_B operator by the estimation of IF of a polynomial phase signal embedded in white Gaussian noise with signal to noise ration ranging from -6dB to 40dB. The obtained results show that Ψ_B operator is effective for estimating the IF of a non-linear FM signal and performs better than Hilbert transform and Wigner-Ville distribution based approaches.

1 Introduction

L'opérateur d'énergie croisée Ψ_B est une extension de l'opérateur non-linéaire de Teager-Kaiser [2], utilisé en démodulation des signaux AM-FM [5], aux signaux complexes [1]. Basé sur les crochets de Lie, cet opérateur quadratique est bien adapté pour la quantification de l'interaction instantanée entre deux signaux complexes [6]. L'opérateur Ψ_B est également lié à la fonction inter Corrélation Croisée (CC) instantanée, $R_{xy}(t, \tau)$, des signaux $x(t)$ et $y(t)$ comme suit [1]:

$$\Psi_B(x(t), y(t)) = -\frac{\partial^2 R_{xy}(t, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{\tau=0} - \frac{\partial^2 R_{xy}^*(t, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{\tau=0} \quad (1)$$

avec $R_{xy}(t, \tau)$ donnée par

$$R_{xy}(t, \tau) = x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \cdot y^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \quad (2)$$

On montre que l'opérateur Ψ_B est une forme bilinéaire symétrique et réelle,

$$\Psi_B(x(t), y(t)) = 0.5[\Psi_C(x(t), y(t)) + \Psi_C(y(t), x(t))] \quad (3)$$

et que $\Psi_C(x(t), x(t)) = \Psi_B(x(t), x(t))$ est sa forme quadra-

tique donnée par [1]:

$$\begin{aligned} \Psi_C(x(t), y(t)) &= 0.5[x^*(t)\dot{y}(t) + \dot{x}(t)y^*(t)] \\ &- 0.5[x(t)\dot{y}^*(t) + \dot{x}^*(t)y(t)] \end{aligned} \quad (4)$$

La relation (1) montre que l'opérateur Ψ_B mesure l'énergie croisée entre deux signaux. Ainsi toute Représentation Temps-Fréquence (RTF), telle que la fonction d'ambiguïté ou la Distribution de Wigner-Ville (DWV) croisée, basée sur la CC est également liée à cet opérateur [3]. Les relations établies entre l'opérateur Ψ_B et les RTF classiques, montrent l'intérêt de cet opérateur en particulier pour le calcul du moment d'ordre deux en fréquences [3], l'estimation des temps de retard [7], la détection de transitoires [6] ou l'analyse des séries temporelles [8]-[9].

Dans cet article nous présentons deux nouvelles propriétés de l'opérateur Ψ_B en utilisant le concept de signal analytique introduit par Poletti [4]. La première propriété est un lien entre l'opérateur Ψ_B et le signal dynamique. La seconde propriété est une relation directe avec la Fréquence Instantanée (FI) d'un signal FM. Nous illustrons cette propriété par le calcul de la FI d'un signal à phase polynomiale d'ordre 4 noyé dans un bruit

blanc Gaussien complexe de rapport signal à bruit variant de -6dB à 40dB. Les résultats d'estimation de la FI sont comparés à ceux obtenus par transformation de Hilbert et par distribution de Wigner-Ville.

Dans la suite du papier, pour $x(t) = y(t)$ nous utilisons la notation $\Psi_B(x(t), y(t)) \equiv \Psi_B(x(t))$.

2 Signal dynamique et Ψ_B

Le signal dynamique est similaire au concept de cepstre complexe dans le domaine fréquentiel et peut être vu comme une généralisation de la FI d'un signal [4].

Soit $x(t)$ un signal AM-FM:

$$x(t) = a(t)e^{j\phi(t)} \quad (5)$$

où $a(t)$ est l'amplitude instantanée et $\phi(t)$ est la phase. La FI est donnée par

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \dot{\phi}(t) \quad (6)$$

Le signal dynamique est donné par [4]:

$$\beta(t) = \frac{d}{dt} \log x(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} + j\dot{\phi}(t) \quad (7)$$

La largeur de bande instantanée de $x(t)$ s'écrit

$$\text{ib}(t) = \left| \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right| \quad (8)$$

Si on substitue $x(t)$ (Eq. 5) dans l'équation (3) et en utilisant la relation (7) il est facile de voir que l'opérateur Ψ_B s'écrit sous les formes suivantes:

$$\Psi_B(x(t)) = -\frac{|x(t)|^2}{2} \left[(\beta^*(t) - \beta(t))^2 + (\dot{\beta}^*(t) + \dot{\beta}(t)) \right] \quad (9)$$

$$\Psi_B(x(t)) = |x(t)|^2 \left[8\pi^2 f_i^2(t) + \text{ib}^2(t) - \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \right] \quad (10)$$

Les deux équations (9) et (10) montrent respectivement les liens entre l'opérateur Ψ_B , le signal dynamique et la largeur de bande instantanée. Ces liens montrent également que l'opérateur Ψ_B permet d'accès à des attributs instantanés pertinents tels que la fréquence ou l'amplitude instantanée pour décrire le comportement instantané du signal au cours du temps.

Calcul de la FI par Ψ_B

Supposons que $x(t)$ est un signal FM ($a(t) = A$). En utilisant l'équation (10) il est facile de voir que la FI de $x(t)$ est donnée par

$$f_i(t) = \frac{\sqrt{\Psi_B(x(t))}}{2\pi A\sqrt{2}} \quad (11)$$

où A est une constante. Un avantage de cette equation (Eq. 11) est qu'on a pas besoin de connaître la phase, $\phi(t)$, de $x(t)$ pour calculer sa FI, $f_i(t)$.

3 Résultats

Nous illustrons l'intérêt de l'opérateur Ψ_B par le calcul de la FI d'un Signal à Phase Polynomiale (SPP), $z(t)$, noyé dans un bruit blanc Gaussien complexe de Rapport Signal à Bruit (RSB) allant de -6dB à 40dB:

$$y(t) = z(t) + n(t) = Ae^{2j\pi\phi(t)} + n(t) \quad (12)$$

où la phase de $z(t)$ est donnée par

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^P a_k t^k \quad (13)$$

Nous présentons les résultats obtenus sur un SPP d'ordre 4 avec les paramètres $A = 2$ et ($a_0 = 1, a_1 = 10, a_2 = 10, a_3 = 2, a_4 = -5$). Chacune des estimations de la FI est effectuée sous la forme de simulations de type Monté Carlo. Pour le calcul des dérivées des relations (6) et (11), nous utilisons le filtre différentiateur de Savitzky-Golay (S-G) [10] qui est plus robuste au bruit que les schémas d'Euler classiques. Le filtre effectue une régression polynomiale de degré k avec une fenêtre glissante de taille N points (où $N > k+1$) qui conserve les moments d'ordre supérieurs du signal. Nous utilisons un filtre S-G d'ordre $k = 4$ et de taille de fenêtre $N = 33$. La FI est estimée pour chaque RSB et l'expérience répétée 500 fois. La figure 1 montre les résultats d'estimation de la FI par l'opérateur Ψ_B , la Transformée d'Hilbert (TH) et la DWV pour RSB=22dB. Les résultats sont obtenus sans aucun post-traitement. Comparée à la FI théorique, l'estimation de Ψ_B est meilleure par rapport à celles de la TH et de la DWV. Ces résultats montrent l'intérêt de l'aspect local de l'opérateur Ψ_B pour estimer les attributs instantanés (FI, ...).

La figure 3 est le tracé de l'Ecart Quadratique Moyen (EQM) des trois estimateurs. Pour les RSB analysés (-6db, 40dB), les performances de l'opérateur Ψ_B sont les meilleurs. La TH surpasse la DWV (fortes perturbations) du en particulier au problème d'interférences liées à la bilinéarité de la DWV et qui sont accentuées par le bruit pour les faibles RSB (Figs. 2 et 3). Par contre, pour RSB > 30dB l'effet des interférences est réduit et par conséquent les performances de la DWV sont meilleurs que celles de la TH. Pour RSB ≥ 36 dB, l'opérateur Ψ_B et la DWV ont les mêmes performances. Il est important de mentionner que l'opérateur Ψ_B , comme toute méthode locale basée sur le calcul des dérivées, est sensible au bruit. Pour des données pas trop bruitées, les schémas de discrétisations classiques sont assez robustes. Dans le cas de faibles RSB, l'utilisation des filtres différentiateurs tels que le filtre S-G est nécessaire pour bien exploiter l'aspect local de l'opérateur et avoir de bonnes performances. Les résultats sont pratiquement les mêmes pour les différents ordres du filtre S-G ($k \geq 3$) mais par contre la précision de l'estimation de la FI aussi bien pour l'opérateur Ψ_B que pour la TH est dépendante de la taille de la fenêtre d'analyse (N) utilisée.

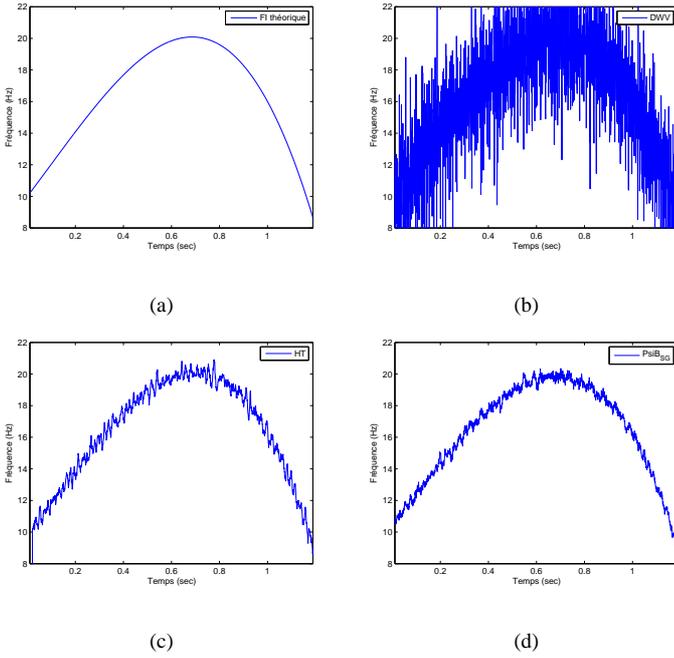


FIG. 1: Estimation de la FI du SPP d'ordre 4 (RSB=22dB). (a) Idéale. (b) DWV. (c) HT. (d) Opérateur Ψ_B .

4 Conclusions

Dans cet article, deux nouvelles propriétés de l'opérateur Ψ_B sont présentées. La première propriété est un lien avec le signal dynamique et la seconde est une relation directe avec la fréquence instantanée d'un signal FM. Ainsi, la fréquence instantanée est calculée sans aucun a priori ou connaissance sur la phase. Le potentiel de l'opérateur Ψ_B est illustré sur l'estimation de la fréquence instantanée d'un signal à phase polynomiale pour plusieurs valeurs du rapport signal à bruit. Les performances de cet estimateur sont meilleurs par rapport à ceux basés sur la transformée d'Hilbert et la distribution de Wigner-Ville et montrent l'intérêt d'un tel opérateur. Les travaux futurs visent à explorer d'autres propriétés de cet opérateur et à l'appliquer à une large classe de signaux et comparer les résultats à des approches telle que la distribution de Wigner-Ville polynomiale.

References

[1] J.C. Cexus and A.O. Boudraa, "Link between cross-Wigner distribution and cross-Teager energy operator," *Elec. Lett.*, vol. 40, no. 12, pp. 778-780, 2004.

[2] J.F. Kaiser, "Some useful properties of Teager's energy operators," *Proc. ICASSP*, vol. 3, pp. 149-152, 1993.

[3] A.O. Boudraa, "Relationships between Ψ_B -energy operator and some time-frequency representations," *IEEE Sig. Proc. Lett.*, vol. 17, no. 6, pp. 527-530, 2010.

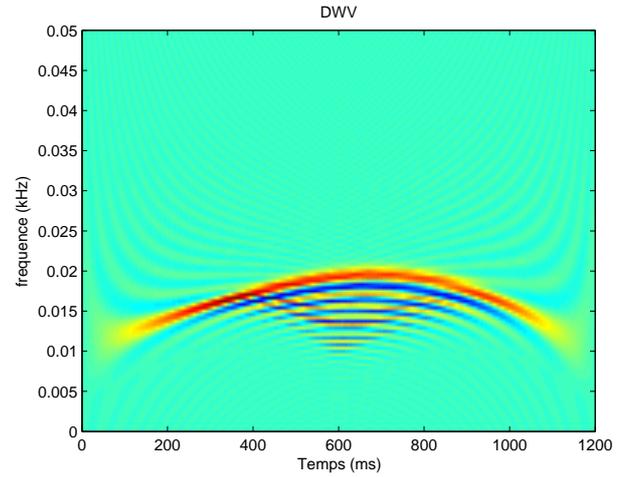


FIG. 2: DWV du signal PPS d'ordre 4 bruité (RSB=22dB).

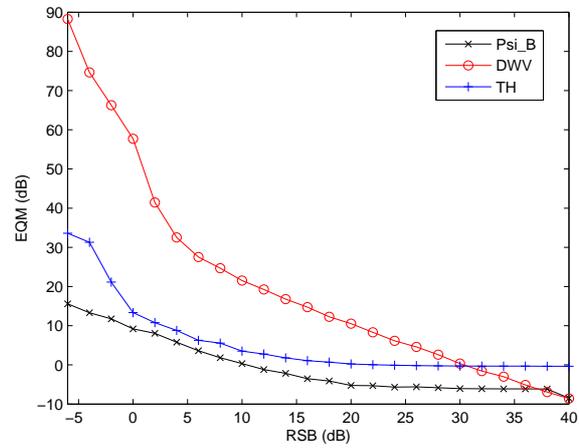


FIG. 3: EQM des estimateurs de la FI: HT, WVD et Opérateur Ψ_B .

[4] M.A. Poletti, "Instantaneous frequency and conditional moments in the time-frequency plane," *IEEE Trans. Sig. Proc.*, vol. 39, no. 3, pp. 755-756, 1991.

[5] P. Maragos, J.F. Kaiser and T.F. Quatieri, "On amplitude and frequency demodulation using energy operators," *IEEE Trans. Sig. Process.*, vol. 41, pp. 1532-1550, 1993.

[6] A.O. Boudraa, S. Benramdane, J.C. Cexus and T. Chonavel, "Some useful properties of cross- Ψ_B -energy operator," *Int. J. Electron. Comm.*, vol. 63, issue 9, pp. 728-735, 2009.

[7] A.O. Boudraa, J.C. Cexus and K. Abed-Meraim, "Cross- Ψ_B -energy operator-based signal detection," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 123, no. 6, pp. 4283-4289, 2008.

[8] A.O. Boudraa, J.C. Cexus and H. Zaidi, "Functional segmentation of dynamic nuclear medicine images by cross-

- Ψ_B -energy operator," *Comput. Meth. Prog. BioMed.*, vol. 84, no 2-3, pp 146-152, 2006.
- [9] W.F. Zhang, C.C. Liu and H. Yan, "Clustering of temporal gene expression data by regularized spline regression an energy based similarity measure," *Patt. Recong.*, vol. 43, pp. 3969-3976, 2010.
- [10] A. Savitzky and M.J.E. Golay, "Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures," *Analytical Chemistry*, vol. 36, no. 8, pp. 1627-1639, 1964.