

Indexation d'images texturées couleur fondée sur la distance géodésique entre des variables elliptiquement distribuées.

Lionel BOMBRUN¹, Yannick BERTHOUMIEU¹, Nour-Eddine LASMAR¹, Geert VERDOOLAEGE²

¹Université de Bordeaux, Laboratoire IMS, UMR 5218
Groupe Signal et Image, 351 cours de la libération, 33402 Talence, France

²Department of Applied Physics - Ghent University, Belgique
lionel.bombrun@ims-bordeaux.fr, yannick.berthoumieu@ims-bordeaux.fr
nour-eddine.lasmar@ims-bordeaux.fr, geert.verdoolaege@ugent.be

Résumé – Dans ce papier, nous nous intéressons à l'indexation d'images texturées fondée sur la modélisation stochastique multivariée. Celle-ci permet par exemple de caractériser les dépendances spatiale et couleur des coefficients d'une décomposition en ondelettes. La problématique de ces travaux concerne le choix du modèle stochastique à utiliser pour modéliser tel ou tel type de dépendance. L'originalité de ces travaux réside dans l'utilisation de la distance géodésique pour mesurer la similarité entre des variables aléatoires elliptiquement distribuées. Dans ce contexte, nous donnons une expression analytique de la distance géodésique pour une distribution \mathcal{G}^0 lorsque les paramètres de forme et d'échelle sont fixés et lorsque l'on approxime les coordonnées des géodésiques par des lignes droites.

Par le biais d'une étude comparative sur la base de données VisTex, nous montrons que les distributions multivariées de Laplace et \mathcal{G}^0 sont les meilleurs modèles parmi ceux considérés pour prendre en compte respectivement les dépendances couleur et spatiale. A travers une approche multi-modèles, nous montrons également qu'il est préférable de modéliser séparément ces dépendances au lieu de travailler sur un vecteur joint qui les caractériserait simultanément.

Abstract – This paper presents a new texture retrieval algorithm based on elliptical distributions for the modeling of wavelet subbands. For measuring similarity between two texture images, the geodesic distance (GD) is considered. A closed form for fixed shape and scale parameters and an approximation when assuming the geodesic coordinate functions as straight lines are given. Taken into various elliptical choices, the multivariate Laplace and \mathcal{G}^0 distributions are introduced for modeling respectively the color cue and spatial dependencies of the wavelet coefficients. A multi-model classification approach is then proposed to combine the similarity measures.

A comparative study between some multivariate models on the VisTex image database is conducted and reveals that the combination of the multivariate Laplace modeling for the color dependency and the multivariate \mathcal{G}^0 modeling for spatial one achieves higher recognition rates than other approaches.

1 Introduction

Ces dernières années, les avancées significatives réalisées dans la mise au point de capteurs à résolutions spatiales, temporelles et multispectrales ont eu pour conséquence de générer des masses de données d'une complexité croissante au sens de leurs propriétés statistiques, texturales et dynamiques. De ce fait, la disponibilité de ces images hyper-résolues remet au premier plan la problématique texture dans le contexte du traitement de l'image, notamment pour l'indexation d'images texturées. Nous nous intéressons ici aux deux grandes étapes qui la compose : l'extraction de paramètres et la mesure de similarité.

En reconnaissance d'image, les décompositions en ondelettes sont classiquement utilisées pour représenter la texture. Afin de caractériser les coefficients de cette décomposition, de nombreux modèles univariés ont été proposés tels que la distribution Gaussienne généralisée [1] et loi de Weibull [2]. Cependant, ces approches ne permettent pas d'exploiter pleinement l'information présente dans les images, notamment les dépendances spatiales et les canaux couleur ne sont pas explicités.

Dans cet article, nous proposons d'utiliser des modèles multivariés tels que les distributions elliptiques afin de modéliser ces dépendances. Cette classe de distributions regroupe notamment les distributions Gaussienne, de Laplace [3] et \mathcal{G}^0 (ou Student-t). Pour la distribution \mathcal{G}^0 , nous établirons une forme analytique de la distance géodésique lorsque les paramètres de forme et d'échelle sont fixés et lorsque l'on approxime les coordonnées des géodésiques par des lignes droites. Une approche multi-modèles sera ensuite proposée pour la classification d'image. Puis, nous montrerons des résultats expérimentaux sur la base de données VisTex.

2 Modélisation stochastique des textures

Pour modéliser les dépendances spatiale et couleur des coefficients en ondelettes, de nombreux modèles multivariés ont été proposés tels que les copules Gaussienne [4] et de Student-t [5].

Ici, nous nous intéressons à deux modèles de distributions elliptiques : les distributions de Laplace et \mathcal{G}^0 .

2.1 Distribution de Laplace

La densité de probabilité d'une distribution de Laplace est définie par :

$$p_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}|[M]) = \frac{1}{|[M]|^{\frac{1}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{p}{2})}{\pi^{\frac{p}{2}} \Gamma(p)} \frac{1}{2^{p+1}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{k}^T [M]^{-1} \mathbf{k})^{\frac{1}{2}}\right\}, \quad (1)$$

où $[M]$ est la matrice de covariance et p est la dimension du vecteur d'observation \mathbf{k} . Dans la suite, la matrice de covariance $[M]$ est estimée par la méthode des moments [3].

2.2 Distribution \mathcal{G}^0

La distribution \mathcal{G}^0 (ou Student-t) appartient à la famille des mélanges d'échelle de Gaussiennes. Pour cette famille, le vecteur d'observation se décompose comme $\mathbf{k} = \sqrt{\tau} \mathbf{z}$, où τ est une variable scalaire positive et \mathbf{z} est un processus, indépendant de τ , Gaussien circulaire, centré et de matrice de covariance $[M] = \mathbb{E}\{\mathbf{z}\mathbf{z}^T\}$. La distribution \mathcal{G}^0 est obtenue en considérant que le multiplicateur τ est distribué selon une loi Gamma Inverse. On obtient ainsi la densité de probabilité suivante [6] :

$$p_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}|[M], m, \mathcal{M}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |[M]|^{\frac{1}{2}}} \frac{(\mathcal{M}m)^{\mathcal{M}}}{\Gamma(\mathcal{M})} \Gamma\left(\frac{p}{2} + \mathcal{M}\right) \times \left(\frac{\mathbf{k}^T [M]^{-1} \mathbf{k}}{2} + \mathcal{M}m\right)^{-(\mathcal{M} + \frac{p}{2})}, \quad (2)$$

où m et \mathcal{M} sont respectivement des paramètres d'échelle et de forme.

Soient $(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N)$ N réalisations d'un vecteur \mathbf{k} distribué selon une loi \mathcal{G}^0 . Un estimateur approché du maximum de vraisemblance de la matrice de covariance normalisée est donné par :

$$[\hat{M}]_{\text{FP}} = f([\hat{M}]_{\text{FP}}) = \frac{p}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{z}_i \mathbf{z}_i^T}{\mathbf{z}_i^T [\hat{M}]_{\text{FP}}^{-1} \mathbf{z}_i}. \quad (3)$$

Cet estimateur du point fixe (FP) de la matrice de covariance normalisée existe et est unique à un facteur d'échelle près [7]. Ici, nous imposons que la trace de la matrice de covariance soit égale à p .

Pour une matrice de covariance donnée $[M]$, l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance du multiplicateur pour le pixel i est donné par :

$$\hat{\tau}_i = \frac{\mathbf{k}_i^T [M]^{-1} \mathbf{k}_i}{p}. \quad (4)$$

Une fois les N multiplicateurs $\hat{\tau}_i$ estimés, les paramètres d'échelle et de forme (m et \mathcal{M}) de la distribution Gamma Inverse sont estimés par la méthode du maximum de vraisemblance [8].

2.3 Distance géodésique de Rao

En indexation d'image, la version symétrisée de la divergence de Kullback-Leibler est couramment utilisée pour mesurer la similarité entre deux distributions paramétriques. Cependant, celle-ci n'admet pas d'expression analytique pour les distributions considérées. En revanche, des travaux se sont intéressés à l'étude de la distance géodésique dans le cadre des distributions elliptiques [9], et ont ensuite été appliqués au cas de la distribution Gaussienne généralisée [3]. Pour développer l'expression de cette distance géodésique pour la distribution \mathcal{G}^0 , deux cas peuvent être considérés : lorsque les paramètres de forme et d'échelle sont fixés et lorsqu'ils ne le sont pas.

2.3.1 Distance géodésique pour des paramètres de forme et d'échelle fixés

Lorsque l'on fixe les paramètres de forme et d'échelle d'une distribution elliptique, l'expression de la distance géodésique est donnée par [9] :

$$\text{GD}(\Theta, [M]_1 || \Theta, [M]_2) = \left[\left(3b_h - \frac{1}{4}\right) \sum_{i=1}^p (r_i)^2 + 2 \left(b_h - \frac{1}{4}\right) \sum_{i<j}^p r_i r_j \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5)$$

où les r_i ($i = 1, \dots, p$) sont les valeurs propres de $\ln([M]_1^{-1} [M]_2)$. De plus, $b_h = \mathbb{E}\{u^2 w^2\} / (p(p+2))$ et $w = (\partial \ln h_p) / (\partial u)$. La densité de probabilité de $U = \mathbf{k}^T [M]^{-1} \mathbf{k}$ est obtenue par [9] :

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma(p/2)} u^{p/2-1} h_p(u) & \text{if } u > 0. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6)$$

où $h_p(\cdot)$ est le générateur de densité :

$$p_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{|[M]|^{\frac{1}{2}}} h_p(\mathbf{k}^T [M]^{-1} \mathbf{k}). \quad (7)$$

Pour une distribution de Laplace multivariée, il a été prouvé dans [3] que $b_h = \frac{1}{4} \frac{p+1}{p+2}$. Comme cette distribution ne fait pas intervenir de paramètre de forme, nous obtenons une expression analytique de la distance géodésique entre deux distributions de Laplace multivariées.

Pour la distribution multivariée \mathcal{G}^0 , nous pouvons montrer que $b_h = \frac{1}{4} \frac{\mathcal{M} + \frac{p}{2}}{\mathcal{M} + \frac{p}{2} + 1}$. Par conséquent, à paramètres de forme et d'échelle fixés, nous obtenons une expression analytique de la distance géodésique entre deux distributions \mathcal{G}^0 grâce à (5). On peut constater que lorsque \mathcal{M} tend vers l'infini, la distribution \mathcal{G}^0 converge vers la distribution Gaussienne et on retrouve le coefficient $b_h = 1/4$ [9].

2.3.2 Distance géodésique pour des paramètres de forme et d'échelle variables

La distance géodésique entre deux distributions multivariées \mathcal{G}^0 de paramètres $(m_1, \mathcal{M}_1, [M]_1)$ et $(m_2, \mathcal{M}_2, [M]_2)$ est ob-

tenue en calculant :

$$\begin{aligned} \text{GD}(m_1, \mathcal{M}_1, [M]_1 || m_2, \mathcal{M}_2, [M]_2) &= \int_{(m_1, \mathcal{M}_1, [M]_1)}^{(m_2, \mathcal{M}_2, [M]_2)} ds \\ &= \int_0^1 \sqrt{\sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} \dot{\theta}^\mu \dot{\theta}^\nu} dt, \end{aligned} \quad (8)$$

où $\theta = (m, \mathcal{M}, r^1, \dots, r^p)$ est un vecteur contenant les hyperparamètres de la distribution \mathcal{G}^0 , et $g_{\mu\nu}$ est l'élément en position (μ, ν) de la matrice d'information de Fisher de taille $(p+2) \times (p+2)$ définie par :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{mm} & g_{m\mathcal{M}} & g_{mi} & \cdots & \cdots & g_{mi} \\ g_{m\mathcal{M}} & g_{\mathcal{M}\mathcal{M}} & g_{\mathcal{M}i} & \cdots & \cdots & g_{\mathcal{M}i} \\ g_{mi} & g_{\mathcal{M}i} & g_{ii} & g_{ij} & \cdots & g_{ij} \\ \vdots & \vdots & g_{ij} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & g_{ij} \\ g_{mi} & g_{\mathcal{M}i} & g_{ij} & \cdots & g_{ij} & g_{ii} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Après calcul, nous pouvons montrer que cette matrice d'information de Fisher dépend uniquement des deux paramètres de forme et d'échelle (\mathcal{M} et m) par :

$$g_{mm} = \frac{\mathcal{M}}{m^2} \frac{\frac{p}{2}}{\frac{p}{2} + \mathcal{M} + 1} \quad (10)$$

$$g_{m\mathcal{M}} = -\frac{1}{m} + \frac{(2\mathcal{M} + \frac{p}{2})}{m(\frac{p}{2} + \mathcal{M})} - \frac{(\mathcal{M} + 1)}{m(\frac{p}{2} + \mathcal{M} + 1)} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} g_{\mathcal{M}\mathcal{M}} &= -\frac{1}{\mathcal{M}} + \Psi(1, \mathcal{M}) - \Psi\left(1, \frac{p}{2} + \mathcal{M}\right) \\ &+ \frac{2}{(\frac{p}{2} + \mathcal{M})} - \frac{(\mathcal{M} + 1)}{\mathcal{M}(\frac{p}{2} + \mathcal{M} + 1)} \end{aligned} \quad (12)$$

$$g_{mi} = -\frac{(\mathcal{M} + 2)(\mathcal{M} + 1)\mathcal{M}^2}{4p(\mathcal{M}m)^3(\frac{p}{2} + \mathcal{M} + 1)(\frac{p}{2} - 1)} \quad (13)$$

$$g_{\mathcal{M}i} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(\mathcal{M} + \frac{p}{2})} + \frac{(\mathcal{M} + 2)(\mathcal{M} + 1)}{4p(\mathcal{M}m)^2(\frac{p}{2} + \mathcal{M} + 1)(\frac{p}{2} - 1)} \quad (14)$$

$$g_{ii} = \frac{1}{4} \left(3 \frac{\mathcal{M} + \frac{p}{2}}{\mathcal{M} + \frac{p}{2} + 1} - 1 \right) \quad (15)$$

$$g_{ij} = \frac{1}{4} \left(\frac{\mathcal{M} + \frac{p}{2}}{\mathcal{M} + \frac{p}{2} + 1} - 1 \right) = -\frac{1}{4} \frac{1}{\mathcal{M} + \frac{p}{2} + 1}, \quad i \neq j \quad (16)$$

où $\Psi(1, \cdot)$ est la fonction trigamma. L'expression de la distance géodésique est finalement obtenue en utilisant (8) et en approximant les coordonnées des géodésiques par des lignes droites, *i.e.*

$$\begin{cases} m(t) &= m_1(1-t) + m_2t. \\ \mathcal{M}(t) &= \mathcal{M}_1(1-t) + \mathcal{M}_2t. \\ r^i(t) &= r_i t. \end{cases} \quad (17)$$

2.4 Approche multi-modèles

Lorsque plusieurs modèles sont disponibles pour caractériser les différents types de dépendances présentes dans les images texturées, une approche multi-modèles peut être mise en place. Soit x_t une image à classifier. Cette image se verra affecter l'étiquette $\hat{\omega}$ qui maximise la probabilité $p(x_t|\omega)$:

$$\hat{\omega} = \underset{\omega \in \Omega}{\text{Argmax}} p(x_t|\omega), \quad (18)$$

où $\Omega = (1, \dots, F)$, F est le nombre de classes. Si K modèles sont disponibles, alors on peut définir :

$$p(x_t|\omega) = \sum_{i=1}^M \lambda_i \text{GD}_{M_i}(x_t, \omega), \quad (19)$$

où $\text{GD}_{M_i}(x_t, \omega)$ est la distance géodésique pour le $i^{\text{ème}}$ modèle entre l'image requête x_t et la classe ω , *i.e.* :

$$\text{GD}_{M_i}(x_t, \omega) = \max_{x_u \in \omega} \exp \left\{ -\text{GD}_{M_i}(x_t, x_u) \right\} \quad (20)$$

Dans (19), les poids λ_i mesurent la pertinence du modèle i pour discriminer les différentes classes. En pratique, le vecteur $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_F]^T$ est estimé de la façon suivante. Tout d'abord, les poids λ_i sont initialisés à 0. Puis, on tire aléatoirement dans la base d'apprentissage une image I_S qui appartient à la classe S . Nous cherchons alors l'image I_M , qui est l'image la plus proche de I_S qui appartient à la classe M avec $M \neq S$:

$$M = \underset{w \in \Omega, w \neq S}{\text{Argmax}} \sum_{i=1}^F \lambda_i \text{GD}_{M_i}(I_S, \omega). \quad (21)$$

De la même façon, on cherche l'image I_H dans S la plus proche de I_S . On met à jour le vecteur de poids λ par :

$$\lambda \leftarrow \lambda - \Delta_H + \Delta_M, \quad (22)$$

où $\Delta_H(i)$ (respectivement $\Delta_M(i)$) est la distance géodésique pour le $i^{\text{ème}}$ modèle entre les images I_S et I_H (respectivement I_M) :

$$\Delta_H(i) = \exp \left\{ -\text{GD}_{M_i}(I_S, I_H) \right\} \quad (23)$$

$$\Delta_M(i) = \exp \left\{ -\text{GD}_{M_i}(I_S, I_M) \right\} \quad (24)$$

On itère ces étapes jusqu'à convergence de l'algorithme. En pratique, 50 itérations sont nécessaires. Puis, on normalise les poids λ_i de sorte que $\sum_{i=1}^F \lambda_i = 1$.

3 Résultats d'indexation

Pour évaluer les performances d'indexation, nous considérons la base de données VisTex (MIT Vision Texture). Celle-ci est composée de 40 classes d'images texturées de taille 512×512 pixels. Pour chaque classe, 16 sous-images de taille 128×128 sont extraites créant ainsi un jeu de données composé de 640 images [1] [2].

Dans cette étude, nous nous intéressons à la caractérisation de trois types de dépendance (spatiale, couleur et spatiale/couleur).

TAB. 1 – Taux de reconnaissance moyen (en %) sur la base de données VisTex.

	Copule Gaussienne Gamma	Distance géodésique				
		Gaussienne SCM	Gaussienne FP	\mathcal{G}^0 fixés	\mathcal{G}^0 linéaire	Laplace
spatiale	76.82	71.51	76.99	77.44	79.38	73.56
couleur	85.02	86.10	86.96	87.78	86.69	87.55
spatiale & couleur	85.83	86.12	88.23	89.26	89.65	88.09

Dans le cas de la dépendance spatiale, le vecteur d'observation $\mathbf{k}^{spatiale}$ correspond à la concaténation des coefficients de la décomposition en ondelettes situé dans un voisinage autour de la position courante. Nous considérons ici un voisinage 3×3 . Pour la dépendance couleur, le vecteur $\mathbf{k}^{couleur}$ contient les réalisations des coefficients d'ondelettes pour les canaux rouge, vert et bleu de l'image. Enfin, lorsque l'on modélise simultanément les dépendances spatiale et couleur, le vecteur d'observation est $\mathbf{k}^{spatiale/couleur} = [\mathbf{k}_R^{spatiale}; \mathbf{k}_V^{spatiale}; \mathbf{k}_B^{spatiale}]^T$.

Le tableau 1 montre le taux de reconnaissance moyen pour différents types de modèles stochastiques (copule, Gaussienne, \mathcal{G}^0 et Laplace) et pour les trois types de dépendances considérés. Dans cette étude, la décomposition en ondelettes de Daubechies db4 est utilisée. Pour la copule Gaussienne avec des marginales distribuées selon des lois Gamma [4], nous utilisons la version symétrisée de la divergence de Kullback-Leibler. Tandis que pour toutes les autres distributions elliptiques, nous considérons la distance géodésique. Dans le cas de la distribution Gaussienne multivariée, nous évaluons les performances d'indexation avec les estimateurs empiriques (SCM) et du point fixe (FP) de la matrice de covariance. Pour la distribution \mathcal{G}^0 , nous distinguons le cas où les paramètres de forme et d'échelle sont fixés (\mathcal{G}^0 fixés) et le cas où nous approximations les coordonnées des géodésiques par des lignes droites (\mathcal{G}^0 linéaire).

Dans le cas de la dépendance spatiale, la meilleure performance d'indexation est obtenue avec la distribution \mathcal{G}^0 lorsque l'on approxime les coordonnées des géodésiques par des lignes droites (79.38%). Pour la dépendance couleur, les meilleurs résultats sont obtenus pour les distributions \mathcal{G}^0 et de Laplace ($\approx 87.7\%$). Nous observons un gain d'environ 10% pour les modèles couleur par rapport à ceux représentant la dépendance spatiale. En revanche, lorsque l'on travaille sur le vecteur joint $\mathbf{k}^{spatiale/couleur}$, on améliore les performances d'indexation d'environ 1% seulement par rapport aux modèles couleur alors que la dimension de l'espace d'observation a été multipliée par 9 (voisinage 3×3 pour la dépendance spatiale).

La figure 1 montre le taux de classification moyen en fonction du nombre d'images par classe servant à l'apprentissage. Pour 4 images apprises (soit 1/4 de la base de données), un gain est observé pour la combinaison des deux modèles (en rouge, 98.97%) qui caractérise le mieux les dépendances spatiales (\mathcal{G}^0 linéaire) et couleur (Laplace) par rapport au modèle joint (en rose, 98.43%) caractérisant simultanément les dépendances couleur et spatiales.

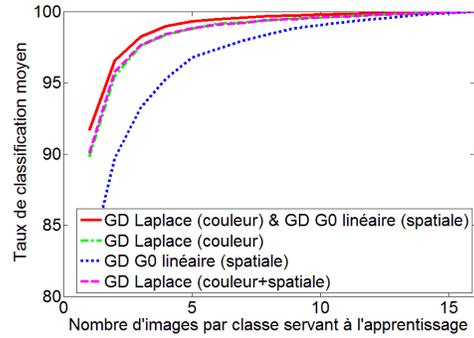


FIG. 1 – Taux de classification moyen en fonction du nombre d'images par classe servant à l'apprentissage.

4 Conclusion

Dans ce papier, les distributions \mathcal{G}^0 et de Laplace ont été proposées pour modéliser les dépendances spatiale et couleur des coefficients en ondelettes. Nous avons donné une forme analytique de la distance géodésique pour une distribution \mathcal{G}^0 lorsque les paramètres de forme et d'échelle sont fixés et lorsque l'on approxime les coordonnées des géodésiques par des lignes droites. Des résultats d'indexation sur la base VisTex ont montré qu'il est préférable de modéliser séparément les dépendances couleur et spatiale au lieu de travailler sur un vecteur joint qui les caractériserait simultanément.

Références

- [1] M. N. Do and M. Vetterli, "Wavelet-Based Texture Retrieval Using Generalized Gaussian Density and Kullback Leibler Distance," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 11, pp. 146–158, 2002.
- [2] R. Kwitt and A. Uhl, "Lightweight Probabilistic Texture Retrieval," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 19, no. 1, pp. 241–253, 2010.
- [3] G. Verdoolaege, S. De Backer, and P. Scheunders, "Multiscale Colour Texture Retrieval using the Geodesic Distance between Multivariate Generalized Gaussian Models," in *IEEE International Conference on Image Processing*, 2008, pp. 169–172.
- [4] Y. Stitou, N. Lasmar, and Y. Berthoumieu, "Copulas based Multivariate Gamma Modeling for Texture Classification," in *IEEE International Conference on Acoustic Speech and Signal Processing*, 2009, pp. 1045–1048.
- [5] R. Kwitt and A. Uhl, "A Joint Model of Complex Wavelet Coefficients for Texture Retrieval," in *IEEE International Conference on Image Processing*, 2009, pp. 1877–1880.
- [6] C.C. Freitas, A.C. Frery, and A.H. Correia, "The Polarimetric G Distribution for SAR Data Analysis," *Environmetrics*, vol. 16, pp. 13–31, 2005.
- [7] F. Pascal, Y. Chitour, J. P. Ovarlez, P. Forster, and P. Larzabal, "Covariance Structure Maximum-Likelihood Estimates in Compound Gaussian Noise : Existence and Algorithm Analysis," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, no. 1, pp. 34–48, 2008.
- [8] N.L. Johnson, S. Kotz, and N. Balakrishnan, *Continuous Univariate Distributions*, John Wiley & Sons, 1994.
- [9] M. Berkane, K. Oden, and P.M. Bentler, "Geodesic Estimation in Elliptical Distributions," *Journal of Multivariate Analysis*, vol. 63, no. MV971690, pp. 35–46, 1997.