

# Estimation locale de fréquence à l'aide du rapport de filtres de Gabor

Rémy BLANCHARD, Elisabeth BRUSSEAU, Olivier BASSET, Denis GRENIER

Université de Lyon, CREATIS-LRMN ; CNRS UMR5220 ; INSERM U1044 ; INSA-Lyon ; Université Lyon 1  
Lyon, France

remy.blanchard@creatis.insa-lyon.fr, elisabeth.brusseau@creatis.insa-lyon.fr  
olivier.basset@creatis.insa-lyon.fr, denis.grenier@creatis.insa-lyon.fr

**Résumé** – L'estimation locale de fréquence basée sur le rapport de filtres est une méthode simple introduite par Knutsson et al. en 1994. Ce papier présente une méthode similaire utilisant un autre type de filtre. Il en résulte une estimation plus précise (supérieure à 10%) et une meilleure maîtrise des paramètres de reconstruction.

**Abstract** – Local frequency estimation based on filter ratio is a simple method presented by Knutsson et al. in 1994. This paper presents a similar method based on a other type of filter. It yields a more accurate estimation (higher than 10%) and a better control of the reconstruction parameters.

## 1 Introduction

Pour des signaux non stationnaires, il peut être intéressant d'étudier la variation temporelle du contenu fréquentiel de ces signaux. Le but de ce travail est de proposer une nouvelle méthode d'estimation locale de fréquence pour des signaux non-stationnaires où  $\mathcal{H}$  représente la transformée de Hilbert. basée sur le rapport de la sortie de filtres de Gabor.

## 2 État de l'art

La transformée de Fourier est l'approche la plus classique pour obtenir une représentation fréquentielle d'un signal temporel. Mais une telle transformation s'effectue sur l'ensemble du signal et ne permet donc pas une analyse locale.

Plusieurs autres solutions ont été proposées pour estimer les fréquences locales notamment basées sur les distributions de Wigner [1] ou encore basées sur l'analyse de transformées en ondelettes comme par exemple la transformée de Gabor utilisant des filtres du même nom [4].

Cependant peu de méthodes se basent sur la sortie de filtres pour effectuer une analyse de la fréquence locale. La suite de ce paragraphe présente différentes méthodes pouvant se ramener à un rapport de sortie de filtres.

### 2.1 Signal analytique

Dans la plupart des applications les signaux traités sont des signaux réels. Fréquentiellement, cela se traduit par l'apparition de fréquences positives et négatives symétriques par rapport à la fréquence nulle.

Dans la suite de cet article, nous considérerons que le signal  $s$  est un signal analytique ne comportant que des fréquences positives et dont l'enveloppe est identiquement égale à 1. Une

solution pour obtenir un tel signal à partir d'un signal réel  $s_{\mathbb{R}}$  est donné par l'équation 1.

$$s(t) = \frac{s_{\mathbb{R}}(t) + i\mathcal{H}\{s_{\mathbb{R}}\}(t)}{|s_{\mathbb{R}}(t) + i\mathcal{H}\{s_{\mathbb{R}}\}(t)|} \quad (1)$$

### 2.2 Dérivation de phase (PD)

Cette méthode d'estimation locale de fréquence est basée sur le fait que la vitesse de variation de la phase d'un signal analytique correspond à sa pulsation locale (équation 2).

$$\omega_s(t) = \frac{\partial}{\partial t} \arg(s(t)) \quad (2)$$

où  $s$  est le signal analytique à analyser. L'équation 2 peut se réécrire sous la forme [2].

$$\omega_s(t) = \Im\left\{\frac{\frac{\partial}{\partial t}s(t)}{s(t)}\right\} \quad (3)$$

où  $\Im$  représente l'opérateur de partie imaginaire.

Cependant la méthode de dérivation de phase n'est applicable que pour des signaux à faible bande passante.

### 2.3 Rapport de Filtres Lognormaux Multiéchelle (MLFR)

En 1994, Knutsson et al. [2] ont proposé une méthode originale pour estimer les fréquences locales. Cette méthode est basée sur l'utilisation du rapport des résultats de deux filtrages appliqués au signal traité.

Considérons un filtre  $R_{\omega_i}$  dont l'expression dans le domaine fréquentiel est donnée par l'équation 4.

$$R_{\omega_i}(\omega) = e^{-C_B \ln^2(\omega/\omega_i)} \quad (4)$$

où  $\omega_i$  est la fréquence centrale du filtre et  $C_B = \frac{4}{B^2 \ln(2)}$  avec  $B$  la bande passante à -6dB du filtre.

Le rapport de deux filtres  $R_{\omega_i}$  et  $R_{\omega_j}$  (avec  $\omega_i \neq \omega_j$ ) donne dans le domaine fréquentiel la relation 5.

$$\frac{R_{\omega_j}(\omega)}{R_{\omega_i}(\omega)} = \left( \frac{\omega}{\sqrt{\omega_i \omega_j}} \right)^{2C_B \ln(\omega_j/\omega_i)} \quad (5)$$

L'équation 5 prend une forme plus simple si on pose  $2C_B \ln(\frac{\omega_j}{\omega_i}) = 1$ . Cette équation permet de relier les fréquences centrales des deux filtres :  $\omega_j = \omega_i e^{\frac{1}{2C_B}}$ . Sous cette condition, l'équation 5 permet de déduire l'équation 6.

$$\omega = \sqrt{\omega_i \omega_j} \frac{R_{\omega_j}(\omega)}{R_{\omega_i}(\omega)} \quad (6)$$

On utilisera l'équation 7 pour estimer la fréquence locale

$$\omega_s(t) = \sqrt{\omega_j \omega_i} \frac{(s * r_{\omega_j})(t)}{(s * r_{\omega_i})(t)} \quad (7)$$

où  $*$  représente l'opération de convolution et  $r_{\omega_j}$  et  $r_{\omega_i}$  les filtres dans le domaine temporel.

## 2.4 Rapport de Filtres Gaussiens Multivariance (MGFR)

Braun et al. [3] ont proposé une méthode analogue pour estimer la fréquence locale à partir d'un autre jeu de filtres. Ces deux filtres  $R_{\sigma_j}$  et  $R_{\sigma_i}$  sont des filtres Gaussiens avec des variances différentes (respectivement  $\sigma_i$  et  $\sigma_j$  - équations 8 et 9).

$$R_{\sigma_j}(\omega) = e^{-\omega^2/2\sigma_j^2} \quad (8)$$

$$R_{\sigma_i}(\omega) = e^{-\omega^2/2\sigma_i^2} \quad (9)$$

L'équation 10 donne une solution pour la reconstruction de la fréquence locale en utilisant les filtres précédents.

$$\omega_s(t) = \sqrt{-2\sigma_\delta^2 \log\left(\frac{(r_{\sigma_j} * s)(t)}{(r_{\sigma_i} * s)(t)}\right)} \quad (10)$$

$$\frac{1}{\sigma_\delta^2} = \frac{1}{\sigma_j^2} - \frac{1}{\sigma_i^2} \quad (11)$$

où  $\log$  représente le logarithme népérien complexe.

En utilisant un développement limité à l'ordre 1, l'équation 10 prend la forme donnée par l'équation 12. Cependant cette simplification n'est valable que si  $\max(\omega_s)/\sigma_\delta \rightarrow 0$ .

$$\omega_s(t) = \sqrt{2\sigma_\delta^2 \left(1 - \frac{(r_{\sigma_j} * s)(t)}{(r_{\sigma_i} * s)(t)}\right)} \quad (12)$$

## 2.5 Généralisation

Les méthodes d'estimation locale de fréquence présentées ci dessus peuvent être généralisées sous la forme de l'équation 13.

$$g_{x_j, x_i} \left( \frac{R_{x_j}(\omega)}{R_{x_i}(\omega)} \right) = \omega \quad (13)$$

TAB. 1 – Résumé des méthodes d'estimation locale de fréquence par rapport de filtres.

Méthode	$R_{x_j}$	$R_{x_i}$	$g_{x_j, x_i}(X)$
PD	$\omega$	1	$\Im\{X\}$
MLFR	$e^{-C_B \ln^2(\omega/x_j)}$	$e^{-C_B \ln^2(\omega/x_i)}$	$\sqrt{x_i \cdot x_j \cdot X}$
MGFR	$e^{-\omega^2/2 \cdot x_j^2}$	$e^{-\omega^2/2 \cdot x_i^2}$	$\sqrt{-2\sigma_\delta^2 \log(X)}$

où  $g_{x_j, x_i}$  est une fonction surjective et  $R_{x_j}, R_{x_i}$  sont des filtres exprimés dans le domaine fréquentiel.

La table 1 résume les différentes méthodes présentés dans le formalisme de l'équation 13.

L'estimation locale de fréquence s'effectue en appliquant la formule 14.

$$\omega_s(t) = g_{x_j, x_i} \left( \frac{(s * r_{x_j})(t)}{(s * r_{x_i})(t)} \right) \quad (14)$$

## 3 Méthode

### 3.1 Choix de filtre

Une autre paire de filtres pour l'équation 13 est explorée dans ce papier. La paire de filtres proposée ressemble aux filtres proposés par Braun mais le paramètre à régler n'est plus la variance du filtre mais sa fréquence centrale. Cette nouvelle paire de filtres nécessite cependant une fonction de reconstruction  $g_{\omega_j, \omega_i}$  plus complexe.

$$R_{\omega_j}(\omega) = e^{-\frac{(\omega - \omega_j)^2}{2\sigma^2}} \quad (15)$$

$$R_{\omega_i}(\omega) = e^{-\frac{(\omega - \omega_i)^2}{2\sigma^2}} \quad (16)$$

$$g_{\omega_j, \omega_i}(X) = \frac{\sigma^2}{\omega_j - \omega_i} \log(X) + \frac{\omega_j + \omega_i}{2} \quad (17)$$

où  $\sigma$  est l'écart type des deux filtres Gaussiens.

Les filtres  $R_{\omega_j}$  et  $R_{\omega_i}$  sont des Gaussiennes dans le domaine fréquentiel, l'équivalent dans le domaine temporel est donné par les équations 18 et 19. Il s'agit de fonctions de Gabor.

$$r_{\omega_j}(t) = \mathcal{F}^{-1}(R_{\omega_j})(t) = e^{i2\pi\omega_j t} \cdot h_\sigma(t) \quad (18)$$

$$r_{\omega_i}(t) = \mathcal{F}^{-1}(R_{\omega_i})(t) = e^{i2\pi\omega_i t} \cdot h_\sigma(t) \quad (19)$$

$$h_\sigma(t) = \sigma \sqrt{2\pi} e^{-2\pi^2 \sigma^2 t^2} \quad (20)$$

### 3.2 Approche multi-filtres

Pour améliorer la qualité de l'estimation, il est possible d'utiliser plusieurs paires de filtres. Le principal problème est de trouver une méthode permettant de combiner la sortie de chaque paire de filtres. Une solution simple consiste à utiliser une moyenne pondérée (équation 21). Afin de simplifier les expressions suivantes, les fréquences centrales des  $M$  filtres utilisés sont données par une suite arithmétique (avec un pas  $\Delta\omega = |\omega_M - \omega_1|/M$ ).

$$\omega_s = \left( \sum_{i=1}^{M-1} c_i g_{\omega_{i+1}, \omega_i} \left( \frac{r_{\omega_{i+1}} * s}{r_{\omega_i} * s} \right) \right) / \left( \sum_{i=1}^{M-1} c_i \right) \quad (21)$$

$$g_{\omega_{i+1}, \omega_i}(X) = \frac{\sigma^2}{\Delta\omega} \log(X) + \omega_i + \frac{\Delta\omega}{2} \quad (22)$$

Plusieurs solutions sont possibles pour  $c_i(t)$ , la première serait de le prendre constant mais dans ce cas chaque paire de filtres a le même poids dans l'estimation finale. Une autre pourrait être de choisir un poids proportionnel à la puissance de sortie du filtre (par exemple  $c_i = r_{\omega_i} * s$ ).

L'équation 21 peut être considérée comme une moyenne des fréquences localement présentes. L'utilisation de plusieurs filtres permet aussi l'estimation d'une variance locale ( $\sigma_s^2$ ).

$$\sigma_s^2 = \left( \sum_{i=1}^{M-1} c_i^2 \left[ g_{\omega_{i+1}, \omega_i} \left( \frac{r_{\omega_{i+1}} * s}{r_{\omega_i} * s} \right) - \omega_s \right]^2 \right) / \left( \sum_{i=1}^{M-1} c_i^2 \right) \quad (23)$$

Cette mesure peut être interprétée comme une bande passante instantanée [5].

Un indice de confiance de la mesure peut être déduit de la variance calculée précédemment (équation 23) [2].

$$c_s = \frac{1}{1 + \sigma_s^2} \quad (24)$$

### 3.3 Réglage des paramètres

Les fréquences minimum ( $\omega_1$ ) et maximum ( $\omega_M$ ) du banc de filtres doivent englober les fréquences utiles minimum et maximum du signal à analyser. Si ces fréquences sont inconnues, il est possible de faire une première passe en prenant zéro comme fréquence minimale et  $0,5 \text{ cyc./ech.}$  (limite de Shannon) comme fréquence maximum.

Afin d'obtenir une puissance de sortie de filtre permettant une analyse pertinente, il faut que les puissances de sorties de deux filtres consécutifs soient suffisantes. Il est donc pertinent que le gabarit de deux filtres consécutifs se croisent avec une amplitude supérieure à 0.5 (condition modélisée par l'équation 25).

$$|\omega_M - \omega_1| < 2\sigma M \sqrt{2\log(2)} \quad (25)$$

Le choix de  $\sigma$  doit aussi se faire en fonction du signal à analyser. L'équation 20 montre que le signal à analyser est convolué avec un filtre Gaussien. Ainsi plus le signal sera bruité, plus le lissage devra être important mais plus l'algorithme aura du mal à détecter les transitions rapides.

## 4 Résultats

Pour les simulations suivantes, les tests seront effectués avec les paramètres donnés dans la table 2. Les paramètres de la reconstruction pour les différents algorithmes sont donnés par la table 3. Ces paramètres seront utilisés pour toutes les simulations suivantes.

### 4.1 Échelon de fréquence

Le signal de test est composé de la concaténation de deux sinusoides à deux fréquences différentes. La première est à une

TAB. 2 – Résumé des paramètres du signal.

Paramètre	Valeur
SNR	0 dB
Échantillons	1024
Fréquence d'échantillonnage	1024 Hz

TAB. 3 – Résumé des paramètres des algorithmes de reconstruction. Les fréquences sont données en cycles par échantillon. Toutes les reconstructions se font avec un nombre de filtres de  $M = 10$

	Filtres de Gabor
Fréquence Min.	0,005
Fréquence Max.	0,025
Écart type	0,005
	MLFR
Fréquence Min.	0,005
Fréquence Max.	0,025
	MGFR
Écart type Min.	0,015
Écart type Max.	0,016

fréquence de  $0,01 \text{ cyc./ech.}$  et la seconde à  $0,02 \text{ cyc./ech.}$ . La figure 1 représente un exemple de signal ainsi que la fréquence locale estimée par la méthode MLFR et par les filtres de Gabor. Le tableau 4 résume les erreurs qui découlent des différentes méthodes.

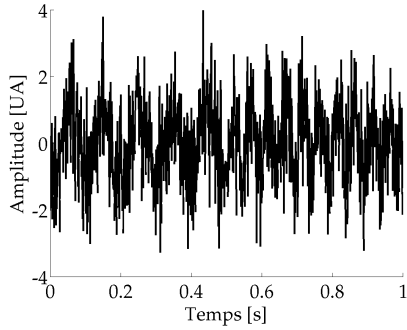
### 4.2 Sinus glissant

Le signal de test est composé d'un sinus glissant entre les fréquences de  $0.01 \text{ cyc./ech.}$  et de  $0.02 \text{ cyc./ech.}$ . La figure 2 représente un exemple de signal ainsi que la fréquence locale estimée par la méthode MLFR et par les filtres de Gabor. Le tableau 5 résume les erreurs qui découlent des différentes méthodes.

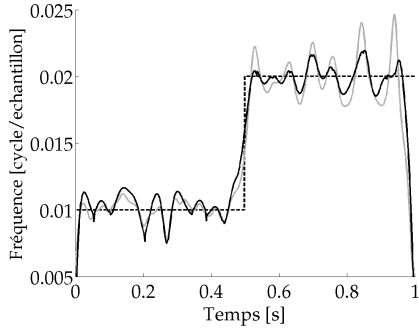
## 5 Conclusion

La méthode présentée dans ce papier permet d'estimer la fréquence locale d'un signal en utilisant le rapport de la sortie de deux filtres. L'estimation peut être faite uniquement pour un intervalle de fréquence (entre  $\omega_1$  et  $\omega_M$ ). Elle permet aussi de régler la largeur du noyau ( $\sigma$ ) du filtre et donc sa sélectivité fréquentielle. Cette maîtrise des paramètres des filtres permet une meilleure qualité d'estimation.

Dans le cas de signaux à n dimensions, l'analyse fréquentielle étant séparable, il est possible d'analyser indépendamment chacune des composantes du signal.



(a) Partie réelle du signal à analyser



(b) Estimation locale de fréquence.

FIG. 1 – Exemple de réalisation d’un signal bruité avec échelon de fréquence (a) ainsi que l’estimation locale de la fréquence correspondante (b) : en noir la fréquence estimée à l’aide de notre méthode, en gris, la fréquence estimée à l’aide de la méthode MLFR et en pointillé la fréquence réelle.

## Références

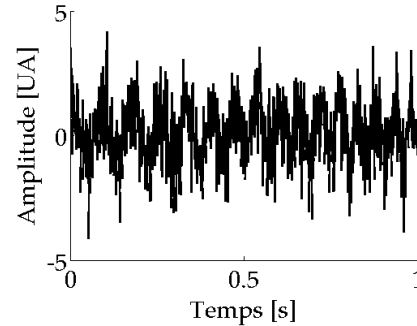
- [1] V. Katkovnik et L. Stanković. Instantaneous frequency estimation using the Wigner distribution with varying and data-driven window length. IEEE Trans. Sig. Proc., 1998.
- [2] H. Knutsson, C.-F. Westin et G.H. Granlund. Local Multiscale Frequency and Bandwidth Estimation. ICIP, 1994.
- [3] J. Braun, G. Buntkowsky, J. Bernarding, T. Tolxdorff et I. Sack. Simulation and analysis of magnetic resonance elastography wave images using coupled harmonic oscillators and Gaussian local frequency estimation. Mag. Res. Imag., 2001.
- [4] D. Gabor Theory of communication. Journal of the Institution of Electrical Engineers, 1946.
- [5] B. Boashash Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal. I. Fundamentals. IEEE Proceedings, 1992.

TAB. 4 – Moyenne de la valeur absolue de l’erreur (MAE) constatée pour les différentes méthodes ainsi que les gains en qualité par rapport aux valeurs réelles apportés par notre méthode pour la concaténation des deux sinusoides. L’erreur est mesurée en dehors des zones où l’effet de bord est prononcé (entre  $t = 0,1$  et  $t = 0,9$ ).

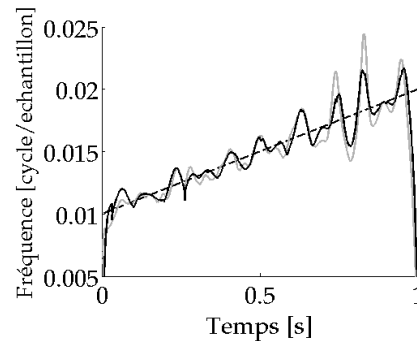
	MAE	Amélioration
Filtres de Gabor	$1,01 \cdot 10^{-3}$	0%
MLFR	$1,20 \cdot 10^{-3}$	15,7%
MGFR	$1,52 \cdot 10^{-3}$	33,3%

TAB. 5 – Moyenne de la valeur absolue de l’erreur (MAE) constatée pour les différentes méthodes ainsi que les gains en qualité par rapport aux valeurs réelles apportés par notre méthode pour le sinus glissant. L’erreur est mesurée en dehors des zones où l’effet de bord est prononcé (entre  $t = 0,1$  et  $t = 0,9$ ).

	MAE	Amélioration
Filtres de Gabor	$0,66 \cdot 10^{-3}$	0%
MLFR	$0,74 \cdot 10^{-3}$	11,15%
MGFR	$1,1 \cdot 10^{-3}$	41,02%



(a) Partie réelle du signal à analyser



(b) Estimation locale de fréquence.

FIG. 2 – Exemple de réalisation d’un signal bruité avec un sinus glissant (a) ainsi que l’estimation locale de la fréquence correspondante (b) : en noir la fréquence estimée à l’aide de notre méthode, en gris, la fréquence estimée à l’aide de la méthode MLFR et en pointillé la fréquence réelle.