

# Représentation des Textures et des Signaux Aléatoires

## Critère de Stochasticité pour la Sélection d'une Base d'Ondelettes

Abdourrahmane ATTO, Yannick BERTHOUMIEU

Université de Bordeaux, UBI, IPB, ENSEIRB-MATMECA - IMS UMR 5218,  
351 cours de la libération, 33405 Talence Cedex, France  
abdou.atto@ims-bordeaux.fr,  
yannick.berthoumieu@ims-bordeaux.fr

**Résumé** – Cet article traite de la représentation des signaux de faible régularité. Il propose un attribut de stochasticité pour la caractérisation des textures et des signaux aléatoires selon les meilleures bases des décompositions en paquets d'ondelettes. Les meilleures bases de représentation au sens du critère de stochasticité permettent, entre autres, l'analyse et la classification des signaux et d'images texturées.

**Abstract** – The paper addresses the representation of low regular signals and images. It presents stochasticity as a feature for the characterization of textures and random signals through the framework of best wavelet packet basis. The results obtained make possible the analysis and classification of textures and random signals from their best bases under the stochasticity criterion.

## 1 Parcimonie et représentation des processus stochastiques

### 1.1 Problème

La littérature récente sur les représentations des signaux et des images décrit la *parcimonie* d'une transformation comme la capacité de la transformation à représenter le signal ou l'image avec un "petit nombre" de valeurs significatives. Dans cette définition, provenant d'un contexte de codage/compression (voir [1]), le petit nombre de valeurs significatives se rapporte au nombre total de valeurs contenues dans le signal ou l'image. Il s'agit donc de représentations compressibles, *i.e.* qui concentrent l'énergie d'un signal sur un petit nombre de valeurs de grande amplitude (*sparsity*).

Parmi les transformées parcimonieuses au sens ci-dessus, la famille des transformées en ondelettes est l'une des plus remarquables : les décompositions en ondelettes sont parcimonieuses pour la représentation des signaux réguliers. Dans la suite de ce document, les signaux réguliers seront confondus aux *signaux déterministes*. Le terme de régularité sera donc opposé au terme *stochasticité*, ce dernier servant à qualifier aussi bien les processus aléatoires que les *signaux déterministes non-réguliers* (ou de très faible régularité).

Le caractère stochastique est associé aux :

1. signaux constitués de mesures physiques quasi-aléatoires. Le caractère aléatoire étant lié au mode d'acquisition du signal (radar, ultrasons, infrarouge, *etc.*),
2. signaux de très faible régularité, la forte variabilité caractérisant les données pouvant être intrinsèque à la scène observée (cas de nombreuses classes de textures).

Lorsque l'on s'intéresse à la caractérisation des signaux sto-

chastiques à travers une modélisation de leurs distributions statistiques, la parcimonie est liée au nombre de paramètres du modèle. Cependant, il est difficile de construire un modèle qui soit à la fois simple et pertinent pour la description d'une grande classe de signaux.

Une solution consiste à chercher une représentation possédant les propriétés statistiques qui sont de nature à permettre la description d'un signal quelconque par un *nombre restreint de modèles-et-paramètres*, dans le domaine des coefficients de la représentation. Ces propriétés statistiques seront dites souhaitables dans la suite de ce document.

### 1.2 Représentation parcimonieuse pour un processus stochastique

Les propriétés statistiques souhaitables pour la représentation des signaux stochastiques sont la *stationnarisation*, la *réduction des dépendances statistiques*, ainsi que le fait de *ramener les distributions statistiques de ces signaux à des formes plus simples*. Les représentations satisfaisant à ces propriétés seront qualifiées de parcimonieuses dès que le nombre de processus simples décrivant l'observation, dans l'espace de la représentation, est petit.

Ces propriétés sont atteintes pour de nombreuses classes de signaux stochastiques lorsque les transformées utilisées sont les décompositions en ondelettes (sens large du terme). En effet, les propriétés statistiques des décompositions en ondelettes orthonormales montrent qu'aux grandes échelles d'une telle décomposition, on obtient une capacité de décorrélation (on se restreint à ce type de dépendance ici) :

- pour des processus stationnaires, voir [2],
- pour des processus non-stationnaires, voir [3, 4, 5].

Cependant, par utilisation d'une décomposition en ondelettes, les coefficients situés aux petites échelles sont très souvent fortement corrélés. Or une base d'ondelettes contient nécessairement les coefficients aux plus petites échelles.

Les décompositions par paquets d'ondelettes permettent de compenser cette insuffisance en autorisant de décomposer à nouveau, les petites échelles pour lesquelles la décorrélation n'est pas atteinte. Cette capacité de décorrélation dépend de la forme de la fonction d'autocorrélation du processus considéré et est obtenue lorsque le *niveau de décomposition* (confondu avec l'échelle dans ce manuscrit) et l'*ordre des filtres d'ondelettes* sont suffisamment grands [6], [7], [8].

En pratique, on doit se limiter à des niveaux de décompositions finis et utiliser des filtres d'ordres finis. D'autre part, on cherche la représentation la plus économique dans le sens où une sous-bande dont les coefficients satisfont aux « bonnes propriétés statistiques » citées plus haut ne doit pas être davantage décomposée. Ce qui nous conduit naturellement à l'élaboration de critères de recherche de la meilleure base au sens de ces propriétés statistiques souhaitables.

### 1.3 Meilleure base stochastique

Le concept de meilleure base fonctionnelle est donné pour différents critères tels que la *sparsity* (amplitude au delà d'un seuil), l'*énergie* ou encore l'*entropie* des coefficients de la représentation, dans [9]. Ces critères sont pertinents pour le choix de la meilleure base de représentation pour un signal régulier, compte tenu de la nature parcimonieuse (au sens *sparsity*) induite par les bases considérées [10].

Lorsqu'on s'intéresse aux signaux stochastiques, le concept de meilleure base peut être associé à la parcimonie au sens de la représentation des processus aléatoires, relativement aux propriétés statistiques souhaitables énumérées plus haut. Cette parcimonie concerne ainsi une décomposition en somme de processus aléatoires (associés à la représentation), la somme contenant un petit nombre de termes et chaque terme étant un processus formé de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

C'est en ce sens que nous proposons dans cet article, la sélection de la meilleure représentation stochastique à partir de la mesure de stochasticité de Kolmogorov. Cette mesure est en adéquation avec la nature stochastique des données et permet de surcroît de valider la pertinence d'un modèle paramétrique, étant donné la distribution statistique des coefficients. Le principe de l'approche consiste à appliquer récursivement le lemme de décomposition des paquets d'ondelettes jusqu'à obtenir la plus petite base (au sens du nombre de sous-bandes) constituée de sous bandes ayant atteint un degré de stochasticité  $\eta$  fixé (voir [11]).

La Figure 1 présente les meilleures bases de représentation d'images texturées obtenue selon l'*attribut* de stochasticité. Chaque meilleure base a été obtenue en divisant récursivement les nœuds de l'arbre des paquets d'ondelettes jusqu'à ce que chaque sous-bande ait atteint un degré de stochasticité minimum fixé. Le niveau de décomposition maximum

est ici fixé à 3. On observe que la rugosité et la granularité de la surface observée sont des éléments qui permettent de différencier les textures à travers leurs meilleures représentations stochastiques. Chaque texture a ainsi une signature spécifique selon ses attributs de stochasticité aux différentes sous-bandes de la décomposition. En particulier, dans la Section 2 suivante, nous montrerons comment exploiter ces signatures pour faire de la classification des textures. D'autre part nous montrerons, dans la Section 3, que cette approche permet, entre autres, d'exploiter le caractère indépendant et identiquement distribué de la représentation stochastique obtenue pour structurer des bases de données et faire de la recherche de contenu avec une mesure de similarité cumulative basée sur l'hypothèse d'indépendance.

## 2 Application à la classification de textures par contenu sémantique

Cette section traite de l'exploitation de la stochasticité en classification des bases de textures, dans une approche de type *Recherche d'Image par le Contenu*, RIC. Le but de la RIC est d'identifier les images (cibles) présentant une forte ressemblance avec le contenu recherché (spécification, requête).

On distingue 2 types d'approches en RIC : l'approche dite de bas niveau sémantique pour laquelle la spécification porte sur les pixels de l'image ou sur des attributs bas niveau tels que les distributions statistiques des intensités des pixels. L'exploitation de ces attributs en RIC nécessite la comparaison des attributs de la requête à ceux des éléments de la base de données, tous considérés comme cibles potentielles.

A l'opposé, l'approche dite de haut niveau sémantique ne requiert pas nécessairement de comparaison directe en ce sens qu'elle repose sur des attributs génériques, qualifiés de *concepts*, qui sont des *agrégats d'attributs bas niveau*. L'élaboration de ces concepts se fait généralement par :

- utilisation de l'ontologie orientée objet,
- apprentissage automatique à partir d'observations,
- introduction d'un retour sur la pertinence de l'information, dans une boucle d'apprentissage continu,
- génération de classes sémantiques à partir de modèles.

Nous utiliserons dans cette section, un certain nombre de ces éléments pour effectuer une RIC de haut niveau sémantique au sens de la stochasticité (RICS).

Considérons un ensemble de  $M$  classes de textures indexé par un entier naturel  $m$ ,  $1 \leq m \leq M$ . Pour une classe  $m$  donnée, nous supposons que  $(m_k)_{k=1,2,\dots,K_m}$  échantillons sont disponibles (base d'apprentissage). Soit  $B_{\text{Best}}[m_k]$ , la meilleure base de représentation de l'échantillon  $m_k$ , pour un degré de stochasticité  $\eta$  fixé. Soient

$$B^{\text{inf}}[m] = \inf \{B_{\text{Best}}[m_1], B_{\text{Best}}[m_2], \dots, B_{\text{Best}}[m_{K_m}]\},$$

$$B^{\text{sup}}[m] = \sup \{B_{\text{Best}}[m_1], B_{\text{Best}}[m_2], \dots, B_{\text{Best}}[m_{K_m}]\},$$

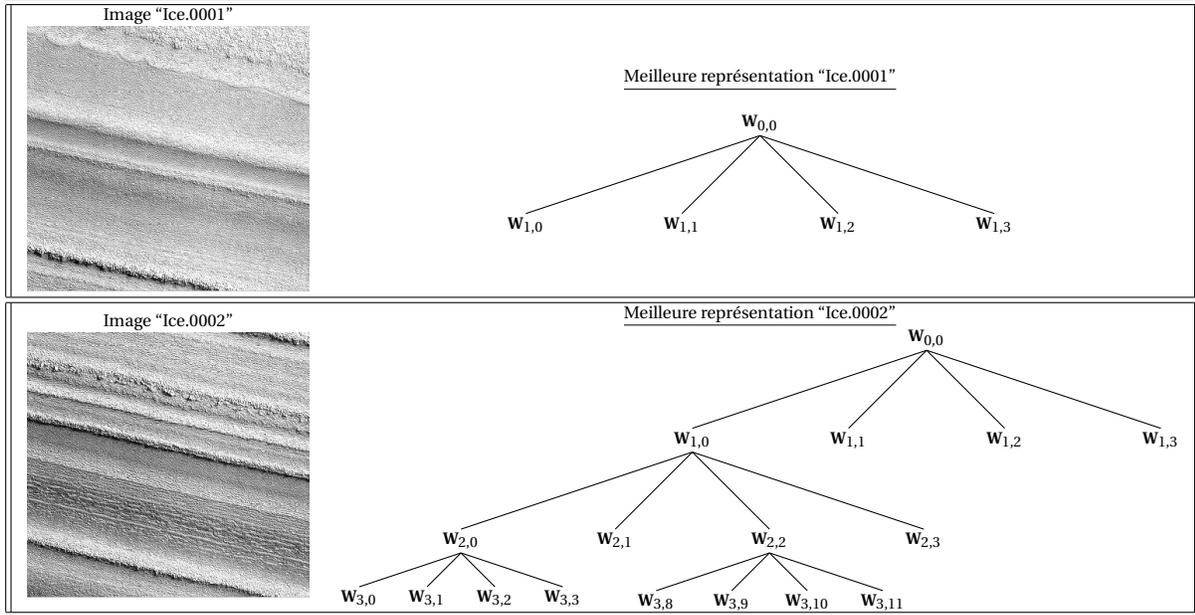


FIG. 1: Meilleures bases au sens stochastique d'images texturées de dépôts de glace. L'attribut de stochasticité permet de mesurer la cohérence intrinsèque des couches de glace observées. Cette cohérence se traduit ici en termes de gel d'eau à la surface ou de différence des contenus poussiéreux dans les couches.

les bases infimum et supremum des différentes meilleures bases de stochasticité associées aux échantillons  $(m_k)_{k=1, \dots, K_m}$ . Le principe de RICS proposé dans ce travail est le suivant :

- La classe  $m$  est représentée par une structure algébrique (intervalle) admettant  $B^{\text{inf}}[m]$  pour borne inférieure et  $B^{\text{sup}}[m]$  pour borne supérieure.
- Une texture donnée (requête) sera supposée appartenir à la classe  $m$  si sa meilleure base de stochasticité au degré  $\eta$ , notée  $B$ , est telle que  $B^{\text{inf}}[m] \leq B \leq B^{\text{sup}}[m]$ .

A titre illustratif, considérons la RICS sur les échantillons de textures de la base VisTeX<sup>1</sup> de type "Fabric.0007" et "Fabric.0018" (voir Figure 2). Nous avons  $m = 2$  et nous disposons de 16 échantillons de chacune de ces textures :  $K_1 = K_2 = 8$  échantillons sont utilisés pour calculer la structure représentant chaque classe (délimitée par  $B^{\text{inf}}$  et  $B^{\text{sup}}$ ) et les 8 autres échantillons sont inclus dans la base de tests. Nous utilisons alors les 16 images de la base de tests comme requêtes et la meilleure base de chaque requête est comparée aux structures représentant les classes pour une éventuelle inclusion.

A partir des résultats expérimentaux obtenus sur la base d'apprentissage, nous avons :

- La structure admissible pour une meilleure base d'une texture de la classe "Fabric.0007" est toute base  $B$ ,

$$\bigcup_{n=0,1,2,3} \mathbf{W}_{1,n} \leq B \leq \mathbf{W}_{2,0} \cup \left( \bigcup_{n=4,5, \dots, 4^3-1} \mathbf{W}_{3,n} \right).$$

- La structure admissible pour une meilleure base d'une texture de la classe "Fabric.0018" est toute base  $B$ ,

$$\mathbf{W}_{2,0} \cup \left( \bigcup_{j=1,2} \bigcup_{n=1,2,3} \mathbf{W}_{j,n} \right) \leq B \leq \mathbf{W}_{3,0} \cup \left( \bigcup_{j=1,2,3} \bigcup_{n=1,2,3} \mathbf{W}_{j,n} \right).$$

Les taux de reconnaissance résultant des tests RICS sont :

- Une requête de type "Fabric.0007", associée au contenu aléatoire le plus faible des 2 classes, réduit la base de recherche de 16 à 8 dont 7 bonnes reconnaissances sur les 8 échantillons de la classe (une fausse alarme).
- Une requête de type "Fabric.0018" réduit la base de recherche de 16 à 7, tous les 7 échantillons appartenant à la bonne classe (pas de fausse alarme).

Ces résultats montrent qu'on peut partir d'un attribut de bas niveau tel que le modèle paramétrique décrivant la distribution statistique des pixels d'une image et remonter à un concept de haut niveau sémantique qui indique le caractère stochastique de l'observation sans faire explicitement référence au modèle statistique sous-jacent.

### 3 Application à la structuration d'une base d'images texturées

Cette section traite de la structuration de bases de textures à travers le critère de stochasticité. Nous montrons comment utiliser l'attribut de stochasticité pour construire des grandes classes de textures (méta-classes), en fonction de leur nature plutôt stochastique ou plutôt régulière. L'objectif est de structurer une base de donnée hétérogène en sous-bases cohérentes, *i.e.* sous-bases dont les propriétés statistiques des éléments ne sont pas significativement différentes. Pour simplifier la présentation, nous supposons que la base de représentation est fixée. Par la suite, cette base sera une décomposition en ondelettes de type SWT (*Stationary Wavelet Transform*, [12]) obtenue avec une ondelette symlet d'ordre 8 (voir [13] pour les raisons de ce choix).

<sup>1</sup>Base VisTeX, voir <http://vismod.www.media.mit.edu>.

Nous considérons comme base à structurer, une base d'images VisTeX, notée  $\mathcal{T}$ , comportant 40 classes de textures (pour les détails sur les 40 textures concernées, voir [13]). La structuration consiste, si l'on se limite à 2 classes sémantiques, à séparer les *textures stochastiques* (qui admettent une représentation stochastique à un degré  $\eta$  fixé) de celles qui ne le sont pas (*textures régulières*). Cela est obtenu par un choix convenable du degré de stochasticité  $\eta$  (voir [11]) et conduit, sur les 40 classes de la base VisTeX, à une métaclasse stochastique constituée de 22 classes et une métaclasse dite régulière et formée de 18 classes de textures (voir les exemples de la Figure 2, voir aussi [11] pour plus de détails).

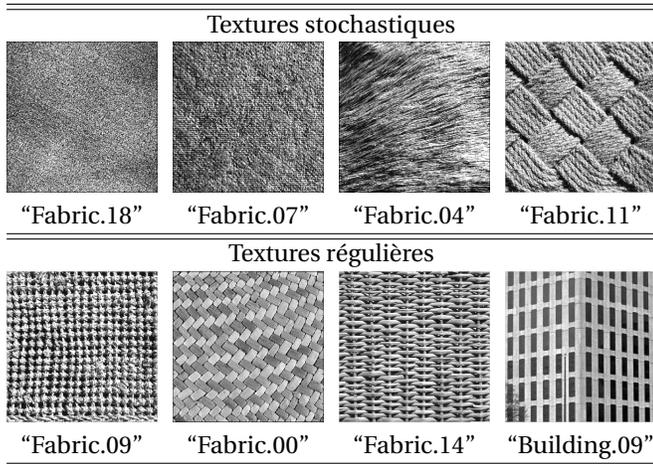


FIG. 2: Structuration en textures stochastiques *versus* régulières.

Nous procédons alors à une phase de RIC sur ces 2 méta-classes, au sens de la modélisation paramétrique dans l'espace des coefficients en ondelettes de la texture : il s'agit de la comparaison des échantillons de textures à travers des mesures de similarité (divergence de Kullback-Leibler ici) sur les modèles paramétriques décrivant les distributions statistiques des coefficients des échantillons. A noter que pour ces tests, chaque classe de textures (Exemple : "Buildings.09") est constituée 16 échantillons. En résumé, nous avons une base complète  $\mathcal{T}$  de 640 échantillons, dont 352 échantillons formant la métaclasse stochastique  $\mathcal{T}_1$  et les 288 restantes constituant la métaclasse régulière  $\mathcal{T}_2$ , avec  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ .

Les résultats expérimentaux suivant concernent la RIC selon l'approche décrite dans [13]. Les tests sont effectués indépendamment sur chacune des bases de textures  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}$ . Les résultats expérimentaux sont donnés à la Table 1, sous la forme de taux de reconnaissance moyens par classe.

TAB. 1: Taux de reconnaissance des textures sur la base complète  $\mathcal{T}$ , la base composée des *classes de textures stochastiques*  $\mathcal{T}_1$  et la base  $\mathcal{T}_2$  composée des *classes de textures régulières*, avec  $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}$ .

Stochastiques ( $\mathcal{T}_1$ )			Régulières ( $\mathcal{T}_2$ )			Base complète ( $\mathcal{T}$ )		
GG	WBL	PRT	GG	WBL	PRT	GG	WBL	PRT
90.5	90.0	66.7	81.1	81.8	83.5	86.2	86.3	74.3

À partir de ces résultats, on peut conclure la RIC est plus

performante lorsqu'on se concentre sur une métaclasse plutôt que sur toute la base complète  $\mathcal{T}$ , car il est plus facile de trouver une famille pertinente de modèles paramétriques sur une métaclasse cohérente plutôt que sur une base de données hétérogène. Puisque  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$  sont de tailles réduites, en comparaison avec  $\mathcal{T}$ , la recherche de contenu est également moins coûteuse en temps de calcul. On obtient les résultats suivants par famille de modèles paramétriques :

- la famille GG est très performante pour la modélisation des textures stochastiques,
- la famille PRT est la plus performante des familles utilisées pour la modélisation des textures régulières,
- la famille WBL est le meilleur compromis lorsque l'on considère toute la base.

Ces remarques confirment l'intérêt de la structuration des classes de textures en méta-classes : dans une base hétérogène, les modèles les plus adaptés à la caractérisation des textures régulières sont très sensiblement différents des modèles pertinents pour l'analyse des textures stochastiques.

## Références

- [1] S. Mallat, *A wavelet tour of signal processing*. Academic Press, 1999.
- [2] J. J. Benedetto and M. W. Frasier, *Wavelets : Mathematics and applications*. CRC Press, 1994, ch. 9 : Wavelets, probability, and statistics : Some bridges, by Christian Houdré, pp. 365–398.
- [3] P. Flandrin, "Wavelet analysis and synthesis of fractional brownian motion," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 38, no. 2, Mar. 1992.
- [4] T. Kato and E. Masry, "On the spectral density of the wavelet transform of fractional brownian motion," *Journal of Time Series Analysis*, vol. 20, no. 50, pp. 559–563, 1999.
- [5] P. F. Craigmile and D. B. Percival, "Asymptotic decorrelation of between-scale wavelet coefficients," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 51, no. 3, pp. 1039 – 1048, Mar. 2005.
- [6] A. M. Atto, D. Pastor, and A. Isar, "On the statistical decorrelation of the wavelet packet coefficients of a band-limited wide-sense stationary random process," *Signal Processing*, vol. 87, no. 10, Oct. 2007.
- [7] A. M. Atto and D. Pastor, "Central limit theorems for wavelet packet decompositions of stationary random processes," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 58, no. 2, pp. 896 – 901, Feb. 2010.
- [8] A. M. Atto, D. Pastor, and G. Mercier, "Wavelet packets of fractional brownian motion: Asymptotic analysis and spectrum estimation," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 56, no. 9, Sep. 2010.
- [9] M. V. Wickerhauser, "Inria lectures on wavelet packet algorithms," in *Problèmes Non-Linéaires Appliqués, Ondelettes et Paquets D'Ondes*, P.-L. Lions, Ed., INRIA, Roquencourt, France, pp. 31 – 99, June 1991.
- [10] G. Peyré, "Best basis compressed sensing," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 58, no. 5, pp. 2613 – 2622, May. 2010.
- [11] A. M. Atto and Y. Berthoumieu, "Structuring of large and heterogeneous texture databases," *IEEE Workshop on Statistical Signal Processing, SSP*, Nice, France, June 28-30, 2011.
- [12] R. R. Coifman and D. L. Donoho, *Translation invariant de-noising*. Lecture Notes in Statistics, 1995, no. 103, pp. 125–150.
- [13] A. M. Atto and Y. Berthoumieu, "How to perform texture recognition from stochastic modeling in the wavelet domain," *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP*, Prague, Czech Republic, May 22-27, 2011.