

Sur l'identification du mouvement Brownien fractionnaire multivarié

Pierre-Olivier AMBLARD^{1,2}, Jean-François COEURJOLLY¹

¹GIPSA-lab, Dépt. Images et Signal (UMR CNRS 5083)
ENSE3-BP 46 38402 Saint Martin d'Hères Cedex

²The University of Melbourne, Dept. of Math&Stat
Parkville, VIC 3010, Australie

bidou.amblard@gipsa-lab.inpg.fr, jean-francois.coeurjolly@gipsa-lab.inpg.fr

Résumé – Le mouvement Brownien fractionnaire multivarié a été récemment développé, et nous proposons ici une stratégie pour l'identifier. Nous utilisons une technique de filtrage du type transformée en ondelette. Pour estimer les paramètres de Hurst, les corrélations, les variances et coefficients d'asymétrie, on réalise une régression sur les log-variances empiriques des signaux filtrés et les log-corrélations empiriques. Les estimateurs convergent presque-sûrement et satisfont un théorème central limite. Nous illustrons la convergence et appliquons l'algorithme à des données financières.

Abstract – We propose here an approach for the identification of the recently developed multivariate fractional Brownian motion. We use a wavelet-like filtering technique. The Hurst parameters, variances, correlation and asymmetry coefficients are estimating by regressing over the empirical log-variances and log-correlations coefficients. We show that the estimator converges almost surely and satisfies a central limit theorem. The convergence is illustrated on simulation, and we apply the estimation procedure to financial data.

1 Mouvement Brownien fractionnaire multivarié

Motivations. Avec le développement considérable ces dernières années de l'étude des graphes complexes (aussi appelés graphes de terrain dans la communauté francophone) le développement de modèles de signaux multivariés adéquats devient crucial pour l'étude des phénomènes (physiques, biologiques, économiques, ...) vivant sur ces graphes. A titre d'exemple, des données issues des réseaux informatiques ou issues de mesures de résonance magnétique nucléaire fonctionnelle sont de grande dimension, corrélées et présentent des caractéristiques de longue dépendance que peu de modèles capturent [1, 2]. Dans le but de prendre en compte ces caractéristiques, nous avons récemment travaillé à la suite de [8, 12] à l'extension multivariée du mouvement Brownien fractionnaire (mfBm). Ces études ont consisté en la définition et en l'étude de diverses représentations du mfBm, en l'analyse spectrale de ses incréments et l'analyse en ondelettes du processus [3, 7]. La suite logique de ce travail de caractérisation est un travail d'identification du processus. Pour ce faire nous proposons ici une méthodologie pour estimer les divers paramètres qui définissent le mfBm. La suite de ce paragraphe introductif est dédié à une rapide description du mfBm. Dans le paragraphe suivant, nous développerons la méthodologie adoptée et nous en étudierons le bien fondé dans le paragraphe 3 en développant l'analyse asymptotique des estimateurs. Enfin, nous illustrerons la procédure d'estimation dans le dernier paragraphe par des simulations Monte-Carlo et une application à des données financières.

mfBm. Un mfBm de dimension p est un processus gaussien centré, à accroissements stationnaires et présentant la propriété d'auto-similarité $X(\lambda t) \stackrel{d}{=} \lambda^H X(t)$, où l'égalité s'entend au sens des distributions de dimensions finies. En toute généralité, l'exposant H caractéristique est une matrice de dimension $p \times p$, et l'auto-similarité est dite opératorielle [10]. Des représentations intégrales du mfBm dans ce cadre général ont été étudiées dans [8]. Ici nous restreignons l'étude au cas des opérateurs diagonaux, et donc λ^H représente la matrice diagonale $(\lambda^{H_1}, \dots, \lambda^{H_p})$. Le processus est entièrement caractérisé par la matrice de covariance dont les éléments sont donnés par, pour tout couple $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$,

$$\begin{aligned} r_{ij}(s, t) &:= \mathbb{E}[x_i(s)x_j(t)] \\ &= \frac{\sigma_i \sigma_j}{2} \{w_{ij}(-s) + w_{ij}(t) - w_{ij}(t-s)\} \end{aligned}$$

où la fonction $w_{ij}(h)$ est définie par

$$w_{ij}(h) = \begin{cases} (\rho_{ij} - \eta_{ij} \text{sign}(h)) |h|^{H_i+H_j} & \text{if } H_i + H_j \neq 1, \\ \rho_{ij} |h| + \eta_{ij} h \log |h| & \text{if } H_i + H_j = 1. \end{cases}$$

Le mfBm est donc caractérisé par les p exposants de Hurst $H_i \in (0, 1)$, les p variances $\sigma_i^2 = E[x_i(1)^2]$, les $p(p-1)/2$ corrélations $\rho_{ij} = \text{corr}(x_i(1), x_j(1)) \in [-1, 1]$ et les $p(p-1)/2$ paramètres η_{ij} qui gèrent l'asymétrie temporelle du processus. Rappelons qu'un processus est symétrique temporellement si $X(t) \stackrel{d}{=} X(-t)$, et que pour un processus gaussien la symétrie temporelle est équivalente à la symétrie $r_{ij}(s, t) = r_{ij}(t, s)$. On vérifie alors que le mfBm est à symétrie temporelle si et seulement si $\eta_{ij} = 0$ pour tout couple i, j . Le but du

papier est l'identification de ces $p + p^2$ paramètres à partir de l'observation d'une trace du processus.

Le mfBm est évidemment non stationnaire. Il est presque sûrement continu mais malheureusement presque sûrement nulle part dérivable. Toutefois il est à accroissements stationnaires. On peut donc s'intéresser au processus incrément. Si l'on se restreint aux incréments de taille 1, $\Delta x(t) = x(t+1) - x(t)$, la corrélation est aisée à calculer et est donnée par

$$\begin{aligned}\gamma_{ij}(h) &:= \mathbb{E}[\Delta x_i(t)\Delta x_j(t+h)] \\ &= \frac{\sigma_i\sigma_j}{2} \left(w_{ij}(h-1) - 2w_{ij}(h) + w_{ij}(h+1) \right).\end{aligned}$$

dont le comportement asymptotique est [3, 7] lorsque $|h| \rightarrow +\infty$

$$\gamma_{ij}(h) \sim \sigma_i\sigma_j |h|^{H_i+H_j-2} \kappa_{ij}(\text{sign}(h))$$

où $\kappa_{ij}(\text{sign}(h)) = (\rho_{ij} - \eta_{ij}\text{sign}(h))(H_i + H_j)(H_i + H_j - 1)$ si $H_i + H_j \neq 1$ et $\kappa_{ij}(\text{sign}(h)) = \eta_{ij}\text{sign}(h)$ si $H_i + H_j = 1$. On retrouve le comportement usuel du bruit brownien fractionnaire qui peut être à longue ou courte mémoire selon que le paramètre de Hurst est plus grand ou plus petit que 1/2. Ici toutefois, des propriétés nouvelles de longue dépendance interviennent dans les intercorrélations entre composantes. Trois situations peuvent conduire à de la longue interdépendance :

1. $H_i = 1/2 = H_j$,
2. $H_i < 1/2$ and $H_j > 1 - H_i$,
3. $H_i > 1/2$ and $H_j > 1/2$.

Dans ces situations, l'estimation peut être problématique, puisque la longue mémoire peut induire des convergences extrêmement lentes.

Pour remédier à ces difficultés, le recours à des transformées du type ondelette est en général mis en avant. Une transformée en ondelette agit en effet comme une dérivation régularisée qui donc stationnarise le mfBm. De plus, si l'ondelette est bien choisie, les coefficients sont en général à mémoire courte. Nous utilisons dans la suite une approche de ce type.

2 Filtrage et identification du mfBm

On considère l'ensemble de filtres $\mathcal{A}_{\ell,q}$ à support compact de longueur ℓ et ayant leur moment nuls jusqu'à l'ordre q , tels que $\delta_{l,0} - \delta_{l,1}$ et ses compositions ou encore les filtres de Daubechies. Pour $a \in \mathcal{A}_{\ell,q}$ et un entier $m \geq 1$, on définit la m -ième version dilatée de a par

$$a_k^m = \begin{cases} a_{k/m} & \text{if } k \in m\mathbb{Z} \\ 0 & \text{if } k \notin m\mathbb{Z} \end{cases}$$

Ce filtre est utilisé pour tous les m dans un ensemble donné \mathcal{M} . Le mfBm est filtré et transformé en $|\mathcal{M}|$ signaux

$$x_i^m(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^m x_i(t-k),$$

On montre que la corrélation $\gamma_{ij}^{m_1, m_2}(h) = \mathbb{E}x_i^{m_1}(t)x_j^{m_2}(t+h)$ ne dépend que du retard h , confirmant la stationnarisation de la procédure, et se comporte asymptotiquement comme

$$\gamma_{ij}^{m_1, m_2}(h) \propto |h|^{H_i+H_j-2q}$$

Ainsi, dès que $q \geq 2$, la décroissance est plus rapide que $1/|h|^2$ et la sommabilité de l'intercorrélacion est assurée pour toute valeur de H_i et H_j . En ce sens, la technique de filtrage adoptée stationnarise et décorrèle (même interprétation que pour une transformée en ondelette).

En égalant m_1 et m_2 , on obtient les relations suivantes, $\forall i = 1, \dots, p, j > i$

$$\begin{aligned}\gamma_{ii}^m(0) &= m^{2H_i} \sigma_i^2 \pi_{ii}^a(0) \\ \gamma_{ij}^m(0) &= m^{H_i+H_j} \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \pi_{ij}^a(0) \\ \gamma_{ij}^m(m\ell) - \gamma_{ji}^m(m\ell) &= 2m^{H_i+H_j} \eta_{ij} \sigma_i \sigma_j \pi_{ij}^a(\ell)\end{aligned}$$

où $\pi_{ij}^a(h) := -\frac{1}{2} \sum_{k,l \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} a_k a_l |h+k-l|^{H_i+H_j}$. Ces relations montrent la dépendance en loi de puissance de la corrélation au retard 0, et de la différence $\gamma_{ij}^m(m\ell) - \gamma_{ji}^m(m\ell)$. L'utilisation de cette expression est suggérée par le fait que les paramètres η traduisent l'asymétrie temporelle du processus.

La dépendance en loi de puissance suggère d'estimer les paramètres en effectuant une régression linéaire en variables logarithmiques. Ici toutefois, on remarque que nous avons à faire à une surdétermination en ce qui concerne les paramètres H_i si l'on considère comme régresseurs les corrélations et les intercorrélations. Cette surdétermination pose la question de l'utilité de prendre en compte l'aspect multivarié pour l'estimation des paramètres de Hurst. Pour étudier ce problème, nous allons considérer l'ensemble des corrélations $\gamma_{ii}^m(0)$, $\gamma_{ij}^m(0)$ et $\gamma_{ij}^m(m\ell) - \gamma_{ji}^m(m\ell)$ comme données sur lesquelles régresser l'ensemble des paramètres. Pour ce faire, on considère un estimateur empirique $C_{ij}^m(h)$ de la corrélation, et on introduit des résidus dans les approximations linéaires

$$\begin{aligned}\log C_{ii}^m(0) &= 2H_i \log m + \alpha_i + \varepsilon_{v_i}^m \\ \log |C_{ij}^m(0)| &= (H_i + H_j) \log m + \mu_i + \varepsilon_{c_{ij}}^m \\ \log \frac{|C_{ij}^m(m\ell) - C_{ji}^m(m\ell)|}{2} &= (H_i + H_j) \log m + \nu_i + \varepsilon_{d_{ij}}^m\end{aligned}$$

Le problème de régression peut alors être vu comme un problème d'optimisation dans lequel on cherche à minimiser la puissance des résidus. Comme nous avons à faire à divers types de données et que nous souhaitons étudier la pertinence de la prise en compte de chacune, on construit une fonction objectif qui pondère les résidus, et on considère le risque quadratique suivant

$$\begin{aligned}f(H, \sigma^2, \rho, \eta) &= \sum_{m \in \mathcal{M}} \left(w_v \sum_{i=1}^p (\varepsilon_{v_i}^m)^2 + w_c \sum_{i=1, j>i}^p (\varepsilon_{c_{ij}}^m)^2 \right. \\ &\quad \left. + w_d \sum_{i=1, j>i}^p (\varepsilon_{d_{ij}}^m)^2 \right)\end{aligned}$$

Dans ce papier, on ne cherche pas à optimiser les poids $w_{v,c,d}$. Ils sont présents pour modéliser la prise en compte de certaines données, et donc prennent les valeurs 0 ou 1. Le problème à résoudre est donc

$$(\hat{H}, \hat{\sigma}^2, \hat{\rho}, \hat{\eta}) = \arg \min f(H, \sigma^2, \rho, \eta)$$

Considérons le vecteur $L := (\log m_1, \dots, \log m_{|\mathcal{M}|})^t$. On note v_i, c_{ij}, d_{ij} les vecteurs de $\mathbb{R}^{|\mathcal{M}|}$ qui contiennent respectivement $\log C_{ii}^m(0), \log |C_{ij}^m(0)|$ et $\log \frac{|C_{ij}^m(m\ell) - C_{ji}^m(m\ell)|}{2}$ pour $m = m_1, \dots, m_{|\mathcal{M}|}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^{|\mathcal{M}|}$, la valeur moyenne est $\bar{x} := |\mathcal{M}|^{-1} \sum_{m \in \mathcal{M}} x_m$ et le vecteur centré $\check{x} = x - \bar{x}$. On montre alors que la solution du problème d'optimisation est

$$\hat{H}_k = \frac{(\check{L}^t \check{L})^{-1} \check{L}^t}{\lambda} \left\{ 2v_k + \sum_{j \neq k} (w_c c_{kj} + w_d d_{kj}) - \frac{(w_c + w_d)}{(\lambda + p(w_c + w_d))} \sum_{i=1}^p \left(2v_i + \sum_{j \neq i} (w_c c_{ij} + w_d d_{ij}) \right) \right\}$$

où $\lambda := 4w_v + (p-2)(w_c + w_d)$. Pour $w_c = w_d = 0$ and $w_v = 1$, on obtient

$$\hat{H}_k = \frac{\check{L}^t v_k}{2\check{L}^t \check{L}},$$

qui est l'estimateur pour un fBm scalaire [6]. Dans le cas simple $p = 2, w_v = w_c = 1, w_d = 0$, on obtient la forme

$$\hat{H}_k = \frac{\check{L}^t \{10v_k - 2v_j + 4c_{kj}\}}{24 \check{L}^t \check{L}}, \quad j \neq k.$$

Les autres paramètres sont estimés par

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_i^2 &= \frac{e^{-2\hat{H}_i \bar{L}}}{\hat{\pi}_{ii}^a(0)} \prod_m (C_{ii}^m(0))^{1/|\mathcal{M}|} \\ |\hat{\rho}_{ij}| &= \prod_m \left(\frac{|C_{ij}^m(0)|}{\sqrt{C_{ii}^m(0)C_{jj}^m(0)}} \right)^{1/|\mathcal{M}|} \times \frac{\sqrt{\hat{\pi}_{ii}^a(0)\hat{\pi}_{jj}^a(0)}}{\hat{\pi}_{ij}^a(0)} \\ |\hat{\eta}_{ij}| &= \frac{1}{2} \prod_m \left(\frac{|C_{ij}^m(m\ell) - C_{ji}^m(m\ell)|}{\sqrt{C_{ii}^m(0)C_{jj}^m(0)}} \right)^{1/|\mathcal{M}|} \times \frac{\sqrt{\hat{\pi}_{ii}^a(0)\hat{\pi}_{jj}^a(0)}}{|\hat{\pi}_{ij}^a(\ell)|} \end{aligned}$$

où $\hat{\pi}_{ij}^a(h)$ correspond à $\pi_{ij}^a(h)$ dans lequel les H_i sont remplacés par leurs estimés. De plus, le signe des estimés peut être obtenu à partir du signe des données, conduisant par exemple pour le coefficient de corrélation à $|\hat{\rho}_{ij}| \times \text{Sign}(C_{ij}^m(0))$.

3 Convergence

L'étude de la convergence se résume en deux propositions. On note $\theta = (H^t, (\sigma^2)^t, \rho^t, \eta^t)^t$ le vecteur contenant tous les paramètres à estimer, et $\hat{\theta}_n$ le vecteur des estimées à partir d'un échantillon de taille n . Alors

Proposition 1 : $\forall a \in \mathcal{A}_{\ell, q}$ et $\forall \mathcal{M}, \forall w_v, w_c$ et w_d , le vecteur $\hat{\theta}_n$ converge presque sûrement vers θ quand $n \rightarrow +\infty$.

On remarque que le résultat est vrai quelque soit le nombre de moments $q \geq 1$ nuls du filtre a . La preuve de l'assertion repose essentiellement sur la convergence presque sûre de $C_{ij}^m(h)$ vers $\gamma_{ij}^m(h)$. Ceci est établi rigoureusement dans [4]. L'importance du nombre de moment nul apparaît lorsque

l'on étudie la vitesse de convergence des estimateurs. Pour présenter le deuxième résultat, on note au préalable C_n le vecteur contenant l'ensemble des données de la régression et γ sont l'espérance mathématique. Ce vecteur est de taille $D_{\mathcal{M}, p} := |\mathcal{M}|p(3p-1)/2$. La forme des estimateurs définit de manière non ambiguë une fonction $g : \mathbb{R}^{D_{\mathcal{M}, p}} \rightarrow \mathbb{R}^{p(p+1)}$ qui envoie le vecteur C_n sur l'estimateur $\hat{\theta}_n$. Alors

Proposition 2 : Avec les mêmes hypothèses que dans la Proposition 1 et si $q > \max H_i + 1/4$ on a

$$\sqrt{n}(C_n - \gamma) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma),$$

où Σ est une matrice de covariance $D_{\mathcal{M}, p} \times D_{\mathcal{M}, p}$ explicitée dans [4]

(ii) θ satisfait $\theta = g(\gamma)$, g est dérivable en γ et

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \nabla g(\gamma) \Sigma \nabla g(\gamma)^t),$$

où $\nabla g(\gamma)$ est la matrice $p(p+1) \times D_{\mathcal{M}, p}$ des gradients de g évaluée en γ . La preuve du premier point repose sur l'existence de théorèmes de la limite centrale pour des fonctionnelles non-linéaires de suites de vecteurs gaussiens [5]. Le deuxième point est plus facile et repose essentiellement sur l'utilisation de la "delta-method" [13]. L'ensemble des démonstrations est disponible dans [4].

4 Illustrations

Convergence. Le comportement de l'algorithme est étudié expérimentalement dans [4]. La principale conclusion est que la prise en compte des corrélations empiriques dans l'estimation des paramètres de Hurst n'apporte rien. La meilleure stratégie est d'estimer les paramètres séparément en considérant chaque composante du mfBm comme un mouvement Brownien fractionnaire scalaire, et en appliquant en parallèle l'algorithme scalaire. On peut ensuite utiliser les résultats pour obtenir une estimation des corrélations et des coefficients d'asymétrie. La seconde conclusion qui corrobore la première est que l'estimation des exposants de Hurst et des variances ne dépendent pas de la corrélation.

Pour illustrer la convergence, 1000 réalisations d'un mfBm $H_1 = 0.3, H_2 = 0.8, \sigma_1 = 2, \sigma_2 = 1, \rho = 0.7, \eta = 0$ sont utilisées pour évaluer les statistiques des estimateurs. On montre sur la figure (1) à gauche les variances d'estimation des estimateurs en fonction du nombre N de points utilisé. Le comportement en $1/N$ est clairement apparent (la droite pointillée représente ce comportement). La représentation de droite montre les densités de probabilité estimées pour l'estimateur de ρ . On superpose aux histogrammes la gaussienne de même variance et de même moyenne. L'accord est bon pour des longueurs d'échantillons assez grands, au delà de 4096 points. En deçà, l'hypothèse gaussienne (pour des tests par exemple) serait franchement audacieuse.

Taux de change. Pour illustrer sur des données réelles, nous appliquons l'algorithme d'identification sur des données financières. On traite les 10 dernières années de l'euro contre le dollar américain et la livre sterling contre le franc Suisse.

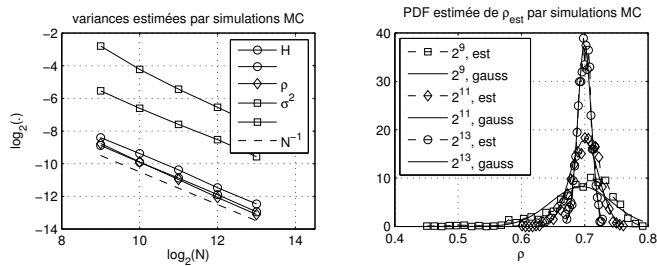


FIGURE 1 – G : Comportement de la variance des estimateurs en fonction du nombre d'échantillon. D : estimation de la densité de probabilité de l'estimateur de ρ .

Les données représentées sont les taux de change journaliers pris en clôture du marché. Si l'on considère ces taux de change comme réalisation d'un mfBm, on obtient comme paramètres estimés $H_1 = 0.49, H_2 = 0.50, \rho = 0.845$ et $\sigma_1^2 = 0.4 \cdot 10^{-3}, \sigma_2^2 = 3 \cdot 10^{-3}$. L'analyse a été également effectuée sur une fenêtre glissante de 512 et 1024 échantillons, et montre que l'estimation de H est stable autour de 0.5 pour les deux séries (malgré une légère augmentation au cours du temps). Par contre cette analyse montre que la corrélation chute autour de l'échantillon 1500. Les variances sont également très instables. On représente sur la figure 2 les traces de ces taux de change (haut-gauche) et une trace typique du mfBm obtenu par simulation en utilisant les paramètres estimés. On note que pour la première composante, la dynamique n'est pas rendue. Ceci correspond à une valeur de la variance estimée trop élevée et d'une inadéquation au modèle. Il suffit de représenter les incréments des données et des données simulées pour se convaincre de cela. Les incréments des données réelles présentent les bouffées intermittentes caractéristiques de signaux financiers qui suggèrent la non gaussianité des signaux ou peut être la non stationnarité des incréments.

Discussion. Malgré la corrélation entre les composantes, l'estimation des paramètres de Hurst ne gagne rien dans une approche multivariée. L'estimation de ces paramètres (et des variances bien sûr) doit se faire composante par composante. Si la matrice de corrélation est correctement estimée par l'approche proposée, les paramètres d'asymétrie ne le sont pas, et du travail reste à développer en ce qui les concerne. Si la méthode est développée dans un cadre paramétrique très étroit, elle devrait s'adapter assez facilement à des modèles moins contraints de signaux multivariés présentant de la longue dépendance. Les études théoriques seront toutefois probablement plus difficiles. Enfin, pour pouvoir travailler sur des échantillons de petites tailles une version de notre approche prenant en compte les contraintes sur les paramètres doit être développée.

Remerciements. P.-O. Amblard est supporté par une bourse ExploraPro de la Région Rhône-Alpes (France), et par une bourse Marie Curie (International Outgoing Fellowship) de la Communauté Européenne. J.-F. Coeurjolly est en partie supporté par le projet ANR InfoNetComaBrain.

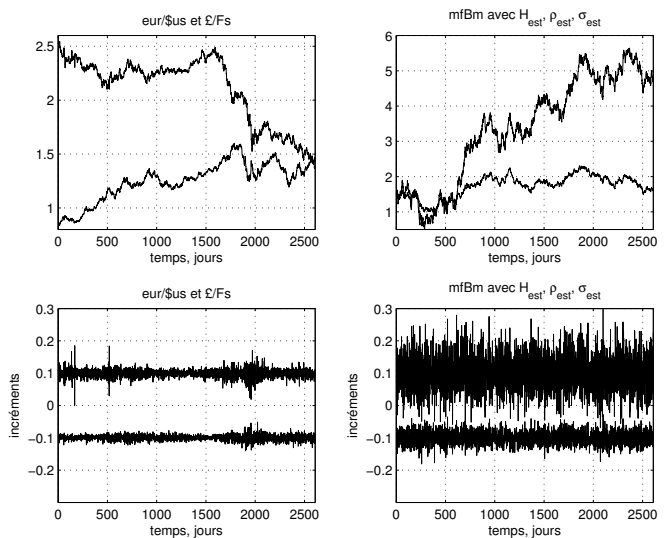


FIGURE 2 – Hg : Taux de change $\text{€}/\text{\$}$ et $\text{£}/\text{Fr}$. 10 années des taux journaliers en clôture. Hd : mfBm généré avec les paramètres estimés sur les données réelles. Bg et Bd : incréments respectifs, translétés arbitrairement en ordonnée.

Références

- [1] P. Abry, R. Baraniuk, P. Flandrin, R. Riedi and D. Veitch. Multiscale nature of network traffic. *IEEE Signal. Proc. Mag.*, 19(3), pp 28–46, 2008.
- [2] S. Achard, D. S. Bassett, A. Meyer-Lindenberg, and E. Bullmore. Fractal connectivity of long-memory networks. *Phys. Rev. E*, 77 :036104, 2008.
- [3] P. O. Amblard, J. F. Coeurjolly, F. Lavancier and A. Philippe. Basic Properties of the Multivariate Fractional Brownian Motion ArXiv1007.0828, to appear in *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 2011.
- [4] P. O. Amblard, J. F. Coeurjolly. Identification of the Multivariate Fractional Brownian Motion ArXiv1102.2872, submitted, 2011.
- [5] M. A. Arcones. Limit theorems for nonlinear functionals of a stationary gaussian sequence of vectors *The Annals of Probability*, 22 :2242–2274, 1994
- [6] J. F. Coeurjolly. Estimating the parameters of a fractional Brownian motion by discrete variations of its sample paths. *Statistical Inference for stochastic processes*, 4(2) :199–227, 2001.
- [7] J. F. Coeurjolly, P. O. Amblard and S. Achard. Normalized causal and well-balanced multivariate fractional Brownian motion ArXiv1007.2109, submitted 2011.
- [8] G. Didier and V. Pipiras. Integral representations of operator fractional Brownian motion. *Bernoulli*, 17(1) :1–33, 2011
- [9] P. Flandrin. Wavelet analysis and synthesis of fractional Brownian motion. *IEEE Transactions on Information Theory*, 38(2) :910–917, 1992.
- [10] W. Hudson and J. Mason. Operator-self-similar processes in a finite-dimensional space. *Trans. Amer. Math. Soc.* 273, 281–297, 1982
- [11] F. Lavancier, A. Philippe and D. Surgailis. A two-sample test for comparison of long memory parameters. *Journal of Multivariate Analysis*, 101(9) :2010, 2118–2136, 2010.
- [12] F. Lavancier, A. Philippe and D. Surgailis. Covariance function of vector self-similar process. *Statistics and Probability Letters*. 79, 2415–2421, 2009.
- [13] E.L. Lehmann and G. Casella, Theory of point estimation, 2nd ed., Springer, New-York, 1998.
- [14] B. Mandelbrot and J. Van Ness. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Rev.*, 10(4) :422–437, 1968.