

Singularités oscillantes et coefficients d'ondelettes dominants

Stéphane JAFFARD¹, Patrice ABRYS², Stéphane G. ROUX²

¹Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées, UMR 8050 du CNRS, Université Paris Est,
61 Avenue du Général de Gaulle, 94010 Créteil Cedex, France.

²Laboratoire de Physique, CNRS UMR 5672, ENS Lyon,
46, allée d'Italie, F-69364 Lyon cedex, France

jaffard@univ-paris12.fr, patrice.abry@ens-lyon.fr stephane.roux@ens-lyon.fr

Résumé – Les coefficients d'ondelettes dominants sont récemment devenus un outil incontournable en analyse multifractale de signaux et d'images. Jusqu'à aujourd'hui, leur utilisation était restreinte à la détermination de spectres de singularités associés à l'exposant de Hölder. Nous introduisons ici une variante des coefficients dominants, qui joue le même rôle pour l'exposant d'oscillation et nous construisons le formalisme multifractal associé. Nous indiquons comment cette nouvelle procédure permet de détecter l'existence de singularités oscillantes.

Abstract – Wavelet leaders have recently been shown to provide practitioners with a robust and efficient tool for the multifractal analysis of signals and images. However, so far, their use remained restricted to the determination of spectra of singularities associated with Hölder exponents. We introduce a declination of wavelet Leaders that plays the same role for oscillation exponents and we devise the corresponding multifractal formalism. This procedure is shown to allow the actual detection of the existence of oscillating singularities in empirical data.

1 Introduction

Le but de l'analyse multifractale est d'obtenir des informations sur les ensembles de singularités hölderiennes présents dans un signal ou une image ; elles sont fournies par des *exposants d'échelle globaux*, c'est-à-dire que ceux-ci sont obtenus au moyen de régressions linéaires dans des diagrammes log-log : log de quantité globales (appelées *fonctions de structure*) vs. log de l'échelle d'analyse. Ces exposants sont appelés *fonctions d'échelle*. Le premier exemple de fonction de structure a été proposé par A. Kolmogorov en 1941, dans son article fondateur consacré à la turbulence cf. [14]:

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. La *fonction de structure d'accroissements* est définie par :

$$S(p, l) = l \sum |f((n+1)l) - f(nl)|^p$$

Lorsque

$$S(p, l) \sim |l|^{\zeta_f(p)} \quad \text{quand } l \rightarrow 0, \quad (1)$$

$\zeta_f(p)$ est la fonction d'échelle (de Kolmogorov) associée à f . G. Parisi and U. Frisch ont proposé une interprétation reliant cette fonction d'échelle aux exposants de Hölder de f , cf. [6].

Rappelons les notions liées à la régularité hölderienne.

Definition 1 Soit f une fonction localement bornée $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et soit $\alpha \geq 0$; $f \in C^\alpha(x_0)$ s'il existe $C > 0$ et un polynôme P tels que

$$|f(x) - P(x - x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha.$$

L'exposant de Hölder de f en x_0 est

$$h_f(x_0) = \sup\{\alpha : f \in C^\alpha(x_0)\}.$$

Si $\dim(A)$ désigne la dimension de Hausdorff de l'ensemble A , la fonction

$$d_f(H) = \dim(\{x_0 : h_f(x_0) = H\})$$

est le *spectre de singularités* (ou *spectre multifractal*) de f .

U. Frisch et G. Parisi ont proposé la relation suivante entre fonction d'échelle et spectre :

$$d_f(H) = \inf_{p \in \mathbb{R}} (d + Hp - \zeta_f(p)). \quad (2)$$

Cette formule, souvent désignée par le terme de *formalisme multifractal*, est obtenue par un argument heuristique dérivé de la thermodynamique statistique, mais n'est pas vérifiée en toute généralité. Ainsi, même le mouvement brownien ne la vérifie que partiellement : la partie "décroissante" de son spectre (pour $H > 1/2$) n'est pas fournie correctement, cf [10]. Aussi, une direction active de recherche a résidé dans la construction de nouvelles fonctions d'échelle pour lesquelles le domaine de validité du formalisme (2) serait plus étendu. Cette direction a été initiée par A. Arneodo et ses collaborateurs, qui ont introduit des fonctions d'échelle définies à partir de coefficients d'ondelette. Ils ont notamment proposé un formalisme multifractal construit sur le squelette de la transformée continue en ondelettes (cf. [3]). Expérimentalement, ce formalisme s'est avéré exact pour une grande palette de signaux synthétiques (mouvements browniens fractionnaires, cascades multiplicatives utilisées comme modèles en turbulence [15],...). Plus récemment, un nouveau formalisme, dits des *coefficients d'ondelettes dominants* ou *wavelet Leaders* a été construit à partir de la transformée discrète en ondelettes. Il a été montré

théoriquement et validé numériquement que ce formalisme permet d'obtenir précisément le spectre de singularités pour une grande variété de fonctions et processus aléatoires [8, 10, 16]; il présente de multiples avantages : il a un faible coût de calcul ; il se définit, s'étudie et s'implante aisément en dimension supérieure à 1 (cf. [17]) et bénéficie de résultats mathématiques généraux concernant son domaine de validité (majorations de spectres,...). De plus, la mise en oeuvre de méthodes statistiques (bootstrap) permet de l'utiliser en classification ou pour l'estimation de paramètres de modèles [16].

Outre la réalisation d'une mesure précise et complète du spectre multifractal, il existe d'autres motivations présidant à la construction de nouvelles fonctions d'échelle. Nous souhaitons utiliser une description plus fine des singularités hölderiennes présentes dans un signal en établissant une distinction entre fonctions ayant le même exposant de Hölder. Un exemple typique est celui des "chirps" :

$$F_{\alpha,\beta}(x) = |x - x_0|^\alpha \sin\left(\frac{1}{|x - x_0|^\beta}\right), \quad (3)$$

possédant le même exposant de Hölder α donné, mais caractérisés par différents exposants d'oscillation β . Ce dernier permet de mesurer la vitesse de divergence de la phase au voisinage de x_0 . Différents exemples sont illustrés sur la figure 1, le cas $\beta = 0$, c'ad $F_{\alpha,0}(x) = |x - x_0|^\alpha$ est appelé un "cusp".

L'existence de singularités de ce type est conjecturée dans certaines descriptions phénoménologiques de la turbulence hydrodynamique (cf. e.g., [5]) ou dans les mécanismes produisant des ondes gravitationnelles, cf. [4].

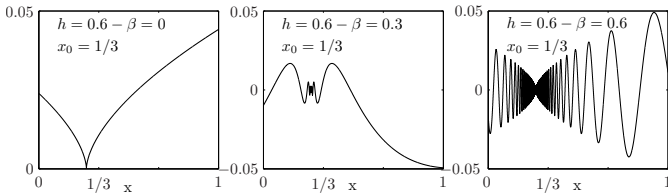


FIG. 1: **Singularités.** Représentations de trois singularités avec le même exposant de Hölder ($H = 0.6$), mais trois exposants d'oscillation différents ($\beta = 0, 0.3, 0.6$ de gauche à droite).

Dans la partie 2, nous motivons la définition des exposants d'oscillation; dans la partie 3, nous examinons comment les spectres de singularités de primitives de f sont reliés entre eux en présence de singularités oscillantes, et dans la partie 4, nous construisons les formalismes multifractals correspondants.

2 Singularités oscillantes

2.1 Définition

L'exposant d'oscillation va permettre de mesurer des oscillations locales qui présentent qualitativement le même comportement que (3), sans en reproduire la forme exacte: en effet, suivant l'esprit de l'analyse multifractale, on souhaite prendre en compte des superpositions de tels comportements et la présence de bruit. Il faut donc identifier une propriété caractéristique de

β que l'on utilisera comme définition dans le cas général. Une intégration par parties montre que β peut être mis en évidence dans (3) de la façon suivante : sa primitive d'ordre n a pour exposant de Hölder en x_0 : $\alpha + n(\beta + 1)$. Pour définir l'exposant d'oscillation de façon satisfaisante, il faut alors introduire la notion d'intégrée fractionnaire locale.

Définition 2 Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$; l'intégrée fractionnaire d'ordre s de f est définie par l'opérateur de convolution $(Id - \Delta)^{-s/2}$, qui revient à multiplier la transformée de Fourier de f par $(1 + |\xi|^2)^{-s/2}$.

Soit ϕ une fonction C^∞ à support compact, et telle que $\phi(x_0) = 1$. Si f est localement bornée, son d'intégrée fractionnaire locale d'ordre s est

$$f^{(-s)} = (Id - \Delta)^{-s/2}(\phi f). \quad (4)$$

L'exposant de Hölder de $f^{(-s)}$ est noté

$$h_f^s(x_0) \equiv h_{f^{(-s)}}(x_0).$$

Cette définition ne dépend pas de la fonction ϕ utilisée. De plus, si s est un entier, l'exposant de Hölder de $f^{(-s)}$ et de sa primitive d'ordre s coïncident, cf. [9]; pour (3), on obtient :

$$\forall s \geq 0, \quad h_{F_{\alpha,\beta}}^s(x_0) = \alpha + (1 + \beta)s.$$

Une définition naturelle de l'exposant d'oscillation d'une fonction arbitraire est donc d'utiliser la pente de la fonction

$$s \rightarrow h_f^s(x_0). \quad (5)$$

Pour $F_{\alpha,\beta}$, (5) est affine, et la définition est sans ambiguïté. Ce n'est cependant pas toujours le cas et, en toute généralité, (5) est seulement concave, de pente ≥ 1 , cf. [2]. On définit alors l'exposant d'oscillation par

$$\beta_f(x_0) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial s} (h_f^s(x_0)) - 1 \quad (6)$$

(cf. [2] pour les propriétés des exposants d'oscillation, et [11] pour d'autres définitions possibles). On dit que f a une singularité de type cusp en x_0 si $\beta_f(x_0) = 0$.

2.2 Ondelettes et régularité ponctuelle

On peut déduire les exposants de Hölder et d'oscillation de quantités discrètes, qui sont soit les coefficients d'une transformée discrète en ondelettes, soit des quantités dérivées : les coefficients dominants.

En dimension d , les bases d'ondelettes sont construites à partir de $2^d - 1$ fonctions $\psi^{(i)}$ telles que les $2^{dj/2} \psi^{(i)}(2^j x - k)$ ($k \in \mathbb{Z}^d$, $j \in \mathbb{Z}$) forment une bases orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^d)$. La base est r -régulière si les $\psi^{(i)}$ sont C^r et si les $\partial^\alpha \psi^{(i)}$, pour $|\alpha| \leq r$, sont à décroissance rapide.

Nous indexons les ondelettes par les cubes dyadiques : un cube dyadique d'échelle j est de la forme

$$\lambda (= \lambda(j, k)) = \left[\frac{k_1}{2^j}, \frac{k_1 + 1}{2^j} \right) \times \dots \times \left[\frac{k_d}{2^j}, \frac{k_d + 1}{2^j} \right),$$

avec $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$. Toute fonction f s'écrit donc

$$f(x) = \sum_{\lambda} c_{\lambda} \psi_{\lambda}(x); \quad (7)$$

où les coefficients d'ondelettes sont définis par :

$$c_{\lambda} = 2^{dj} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \psi^{(i)}(2^j x - k) dx. \quad (8)$$

Tout point $x_0 \in \mathbb{R}^d$ appartient à un unique cube dyadique d'échelle j , noté $\lambda_j(x_0)$. Le cube $3\lambda_j(x_0)$ est le cube de même centre et trois fois plus large. Les *coefficients dominants* sont

$$d_{\lambda} = \sup_{\lambda' \subset 3\lambda} |c_{\lambda'}|. \quad (9)$$

La caractérisation par ondelettes de la régularité ponctuelle nécessite l'hypothèse suivante.

Definition 3 Une fonction f est uniformément hölderienne s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $f \in C^{\epsilon}(\mathbb{R}^d)$.

Si f est uniformément hölderienne, son exposant de Hölder est alors donné par (cf. [8])

$$h_f(x_0) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \left(\frac{\log(d_{\lambda_j(x_0)})}{\log(2^{-j})} \right). \quad (10)$$

La définition (6) montre que, pour calculer l'exposant d'oscillation, il faut estimer les exposants de Hölder d'intégrées fractionnaires de f . Le calcul explicite de l'intégrée fractionnaire s'avère, en fait, inutile en pratique, puisqu'on peut le remplacer par celui d'une *pseudo-intégration fractionnaire* $I^s(f)$ définie, pour une base d'ondelettes (suffisamment régulière), par ses coefficients d'ondelettes : $c_{\lambda}^s = 2^{-sj} c_{\lambda}$. Si f est uniformément hölderienne, on montre alors que (cf. [9]) :

$$\forall s > 0, \quad \forall x_0, \quad h_{I^s(f)}(x_0) = h_{f(-s)}(x_0).$$

Les coefficients dominants associés à la pseudo-intégrée fractionnaire sont notés :

$$d_{\lambda}^s = \sup_{\lambda' \subset 3\lambda} 2^{-sj'} |c_{\lambda'}|. \quad (11)$$

On déduit de (6) et (10) que

$$h_f^s(x_0) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \left(\frac{\log(d_{\lambda_j(x_0)}^s)}{\log(2^{-j})} \right). \quad (12)$$

2.3 Cusps

Le but principal de cet article est de fournir de nouveaux outils pour déterminer si une fonction possède ou non des singularités oscillantes, c'est-à-dire des points où $\beta_f(x_0) \neq 0$. Il est donc naturel de commencer par analyser les fonctions qui ne présentent que des cusps, c'est-à-dire pour lesquelles : $\forall x_0, \beta_f(x_0) = 0$. Nous commençons par fournir une caractérisation d'un cusp en x_0 , qui porte sur les coefficients d'ondelette de f , et qui est une conséquence directe des caractérisations de $h_f(x_0)$ et $h_f^s(x_0)$ ci-dessus, cf. [9].

Proposition 1 Soit f une fonction uniformément hölderienne; f a un cusp en x_0 si et seulement si ses coefficients d'ondelette vérifient: $\exists j_n \rightarrow +\infty, \exists \lambda' \subset \lambda_{j_n}(x_0)$ tels que

$$j' = j_n + o(j_n) \text{ et } |c_{\lambda'}| \geq 2^{-h_f(x_0)(j_n + o(j_n))} \quad (13)$$

Cette condition locale exprime essentiellement le fait que le sup intervenant dans le calcul du coefficient dominant d_{λ} est "presque" atteint à une échelle j' "proche" de l'échelle j associée au cube λ . Il est alors naturel de considérer la condition "uniforme" correspondant à (13).

Definition 4 Soit f une fonction uniformément hölderienne; f est uniformément de type cusp si ses coefficients d'ondelettes vérifient: il existe deux fonctions $g(j)$ et $h(j)$ telles que $g(j) = o(j)$, $h(j) = o(j)$ et

$$\forall \lambda, \quad \exists \lambda' \subset 3\lambda : \begin{cases} j' \leq g(j) \\ |c_{\lambda'}| \geq d_{\lambda} \cdot 2^{-h(j)} \end{cases} \quad (14)$$

Une conséquence de la proposition 1 est qu'une fonction uniformément de type cusp ne présente que des cusps. Des exemples sont fournis par les mouvements browniens fractionnaires, les cascades aléatoires multiplicatives d'ondelettes, cf. figure 2 ; cependant, des contre-exemples typiques sont produits par les *Séries d'Ondelettes Lacunaires*, cf. [9].

3 Spectres et intégration fractionnaire

3.1 Autres notions de spectres : spectre intégré fractionnairement et spectre de Legendre

Une première méthode pour déterminer s'il existe des singularités oscillantes dans un signal est d'étudier comment les spectres multifractals se transforment par intégration fractionnaire.

Soit f une fonction localement bornée. Ses *spectres de singularités intégrés* sont les fonctions

$$d_f^s(H) := d_{f(-s)}(H) = d_{\mathcal{I}^s f}(H)$$

Si f ne contient que des cusps, les spectres de singularités intégrés se déduisent les uns des autres par une simple translation :

$$d_f^s(H) = d_f(H - s). \quad (15)$$

En pratique, on ne peut avoir accès au spectre d'un signal que par l'intermédiaire d'un formalisme multifractal. Rappelons la variante construite sur les coefficients dominants, qui repose sur (10), réécrite comme :

$$d_{\lambda_j(x_0)} \sim 2^{-h_f(x_0)j}.$$

On notera Λ_j l'ensemble des cubes dyadiques de côté 2^{-j} .

Definition 5 Soit f une fonction uniformément hölderienne; sa Fonction de Structure Dominante est

$$T_{p,j} = 2^{-dj} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} |d_{\lambda}|^p;$$

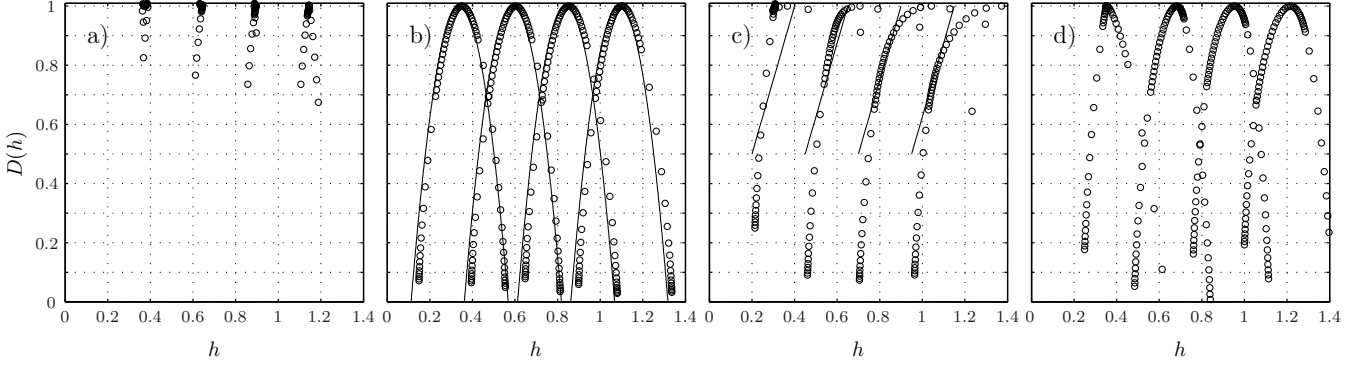


FIG. 2: **Spectres d'intégrés fractionnaires.** Spectres multifractals théoriques et estimés (moyenne sur 500 réalisations) d'intégrés fractionnaires avec $s = 0, 0.25, 0.50, 0.75$, pour a) un mouvement brownien fractionnaire; b) une cascade aléatoire multiplicative d'ondelettes; c) une série d'ondelettes lacunaire et d) une série d'ondelettes lacunaire superposée à un mouvement brownien fractionnaire. Les deux premiers processus sont uniformément de type cusp (tous les spectres sont translatés de s sans déformation) tandis que les deux derniers contiennent des singularités oscillantes (pourtant les spectres d'intégrés fractionnaires du dernier sont translatés de s sans déformation).

sa Fonction d'Echelle Dominante est

$$\forall p \in \mathbb{R}, \quad \eta_f(p) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log(T_{p,j})}{\log 2^{-j}},$$

et son spectre de Legendre est

$$L_f(H) = \inf_{p \in \mathbb{R}} (d + Hp - \eta_f(p)).$$

Le formalisme multifractal construit sur les coefficients dominants est vérifié si $d_f(H) = L_f(H)$. L'obtention de cette formule s'appuie sur la même heuristique que celle utilisée dans le formalisme initial développé par G. Parisi et U. Frisch, cependant réécrite dans le cadre des coefficients dominants.

Les Fonctions d'Echelle Dominantes d'intégrés fractionnaires et de pseudo-intégrés fractionnaires de même ordre coïncident, cf. [9], d'où la définition suivante :

Definition 6 La Fonction d'Echelle Intégrée est : $\forall p \in \mathbb{R}$,

$$\eta_f^s(p) = \eta_{f^{(-s)}}(p) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \left(2^{-dj} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} |d_\lambda^s|^p \right)}{\log 2^{-j}}.$$

Le Spectre de Legendre Intégré de f est

$$L_f^s(H) = \inf_{p \in \mathbb{R}} (d + Hp - \eta_f^s(p))$$

L'heuristique fournie par le formalisme multifractal laisse prévoir que, si f ne présente que des cusps, ses spectres de Legendre intégrés vérifient (15).

Proposition 2 Soit f une fonction uniformément hölderienne; si f est une fonction uniformément de type cusp, alors ses spectres de Legendre intégrés vérifient

$$\forall s \geq 0, \quad L_f^s(H) = L_f(H - s). \quad (16)$$

Cette proposition est démontrée dans [9] et illustrée sur la figure 2, pour des processus aléatoires dont les trajectoires sont uniformément de type cusp et d'autres qui, au contraire, contiennent des chirps.

3.2 Détection de la présence de chirps

Si l'hypothèse de cusp uniforme n'est pas vérifiée, $L_f^s(H)$ peut varier en fonction de s d'une façon qui révèle la présence de singularités oscillantes. Cependant, la proposition 2 ne permet pas de conclure que, si les spectres de Legendre intégrés satisfont (16), le signal ne présente que des cusps, et des contre-exemples élémentaires peuvent être construits par perturbation de Séries d'Ondelettes Lacunaires. Ces séries aléatoires $X_{\alpha,\gamma}$ (pour $\alpha > 0$ et $\gamma < d$) sont obtenues en tirant au hasard (et uniformément) $2^{\gamma j}$ cubes dyadiques λ parmi les 2^{dj} cubes dyadiques de largeur 2^{-j} inclus dans $[0, 1]^d$. Les coefficients d'ondelette correspondants ont la valeur $2^{-\alpha j}$ et les autres sont nuls (cf. [7] pour leur analyse multifractale). De tels processus ont des singularités oscillantes, ce qui se reflète dans l'évolution de leurs spectres de Legendre intégrés, qui ne se déduisent pas de $L_f(H)$ par translation de s , cf. [9]:

Proposition 3 Les spectres de Legendre intégrés et spectres de singularité intégrés de $X_{\alpha,\gamma}$ coïncident et vérifient

$$\begin{aligned} d_{\alpha,\gamma}^s(H) = L_{\alpha,\gamma}^s(H) &= \frac{\gamma H}{\alpha + s} \quad \text{si } H \in \left[\alpha + s, \frac{d(\alpha + s)}{\gamma} \right] \\ &= -\infty \quad \text{sinon.} \end{aligned} \quad (17)$$

Soit $a > 0$ tel que $a \notin \mathbb{N}$; on note B_a le mouvement brownien fractionnaire d'ordre a (si $a > 1$, B_a est, par définition, la primitive de B_{a-1} qui s'annule en 0, calculée trajectoire par trajectoire). Considérons

$$Y_{a,\alpha,\gamma} = X_{\alpha,\gamma} + B_a \quad (18)$$

(avec $X_{\alpha,\gamma}$ et B_a indépendants). Le spectre de ce processus se déduit de celui de $X_{\alpha,\gamma}$ en utilisant des résultats généraux sur la régularité de la somme d'un mouvement brownien fractionnaire et d'un autre processus, cf [13] : si $a \in [\alpha, d\alpha/\gamma]$, le spectre de

$Y_{a,\alpha,\gamma}$ est

$$\begin{aligned} d_{Y_{a,\alpha,\gamma}}(H) &= \gamma H / \alpha & \text{si } H \in [\alpha, a] \\ &= d & \text{si } H = a \\ &= -\infty & \text{sinon.} \end{aligned} \quad (19)$$

Le spectre de Legendre de $Y_{a,\alpha,\gamma}$ est un segment de droite reliant les points (α, γ) et (a, d) . Pour $H \in [\alpha, a]$, les singularités correspondantes ont un exposant d'oscillation strictement positif. Cependant, par construction, les spectres de Legendre intégrés vérifient (16) (cf. figure 2). On ne peut donc détecter la présence de singularités oscillantes sur $Y_{a,\alpha,\gamma}$ en examinant ces derniers. Cette observation motive la méthode que nous allons maintenant décrire, dont le but est de détecter d'éventuelles singularités oscillantes dans les situations où les spectres de Legendre intégrés ne permettent pas de les mettre en évidence. Cette situation est illustrée sur la figure 3.

4 Le β -Spectre

Le but de cette partie est d'introduire un nouveau formalisme multifractal, construit sur l'exposant d'oscillation.

Definition 7 Soit f une fonction localement bornée; son β -spectre est

$$\mathcal{D}_f(\beta) = \dim(\{x_0 : \beta_f(x_0) = \beta\}).$$

Une fonction f n'a que des cusps si et seulement si son spectre est dégénéré, c'est-à-dire porté uniquement par le point $\{0\}$. Un formalisme multifractal associé à ce spectre devrait donc mettre en évidence la présence de singularités oscillantes, sans rencontrer les obstructions que nous venons de décrire.

4.1 Le β -Formalisme

L'obtention du formalisme multifractal suit l'heuristique suivante: soit $s > 0$ fixé assez petit; si f a une singularité oscillante d'exposants (H, β) en x_0 ,

$$d_{\lambda_j(x_0)}(f)(x_0) \sim 2^{-Hj} \quad \text{et} \quad d_{\lambda_j(x_0)}^s(f) \sim 2^{-(H+s(1+\beta))j}.$$

Par élimination on obtient que les β -leaders

$$B_\lambda = 2^j (d_\lambda^s / d_\lambda)^{1/s}$$

vérifient

$$B_{\lambda_j(x_0)} \sim 2^{-\beta_f(x_0)j}. \quad (20)$$

Dès qu'on dispose de quantités locales, définies sur les cubes dyadiques, et qui satisfont (20), le procédé abstrait d'obtention du formalisme multifractal décrit dans [13] s'applique et fournit le β -formalisme suivant: la β -fonction d'échelle s'écrit

$$\omega_f(p) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \left(2^{-dj} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} B_\lambda^p \right)}{\log(2^{-j})};$$

le β -spectre de Legendre de f est

$$\mathcal{L}_f(\beta) = \inf_{p \in \mathbb{R}} (d + \beta p - \omega_f(p)).$$

Le formalisme multifractal pour les singularités oscillantes est vérifié si

$$\mathcal{D}_f(\beta) = \inf_{p \in \mathbb{R}} (d + \beta p - \omega_f(p)).$$

On remarquera que $\mathcal{L}_f(\beta)$ dépend du paramètre s choisi. Mathématiquement, il est nécessaire faire tendre s vers 0 pour avoir accès à l'information sur les singularités oscillantes, car celles-ci sont définies dans cette limite. En pratique, on choisit une valeur de s suffisamment petite, mais ne conduisant cependant pas à des instabilités numériques.

Le β -formalisme est conforté par plusieurs résultats mathématiques qui seront développés dans [9] : il est vérifié pour les fonctions de type cusp uniforme, auquel cas on retrouve bien que le spectre est porté par le seul point $\beta = 0$. Il est aussi valide pour les Séries d'Ondelettes Lacunaires, ainsi que pour les processus $Y_{a,\alpha,\gamma}$, définis en (18) (en particulier, pour ces derniers, le β -spectre ne se réduit pas à un point). Ce dernier résultat montre l'avantage du β -formalisme par rapport à l'étude des spectres d'intégrées fractionnaires. La figure 3 montre que cette non dégénérescence des β -spectres des Séries d'Ondelettes Lacunaires et des processus $Y_{a,\alpha,\gamma}$ peut effectivement être observée numériquement. Le β -spectre fournit donc une procédure pratique permettant la détection pratique de la présence de singularité oscillante.

4.2 Un formalisme grandcanonique

Il est naturel d'introduire un *formalisme multifractal grandcanonique* dont le but est d'accéder aux *spectre de singularités oscillantes*:

$$\mathbb{D}_f(H, \beta) = \dim(\{x_0 : h_f(x_0) = H \quad \text{et} \quad \beta_f(x_0) = \beta\})$$

Son obtention suit celle des formalismes multifractals à un seul paramètre : Si f a une singularité oscillante d'exposants (H, β) en x_0 , alors

$$d_{\lambda_j(x_0)} \sim 2^{-Hj} \quad \text{et} \quad B_{\lambda_j(x_0)} \sim 2^{-\beta j}.$$

On peut donc construire une *fonction de structure grandcanonique* à partir de ces quantités :

$$G_{p,q,j} = 2^{-dj} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} d_\lambda^p B_\lambda^q$$

La *fonction d'échelle grandcanonique* est

$$\forall p, q \in \mathbb{R}, \quad \Omega_f(p, q) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log(G_{p,q,j})}{\log(2^{-j})}$$

Le *spectre de Legendre grandcanonique* de f est

$$\mathbb{L}_f(H, \beta) = \inf_{p, q \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}} (d + Hp + \beta q - \Omega_f(p, q));$$

et le *formalisme multifractal grandcanonique* est valide si

$$\mathbb{D}_f(H, \beta) = \inf_{p, q \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}} (d + Hp + \beta q - \Omega_f(p, q));$$

Comme dans les cas précédents, ce formalisme est vérifié par les fonctions de type cusp uniforme, et les Séries d'Ondelettes Lacunaires, cf. [9]. Dans [1], une première formulation du

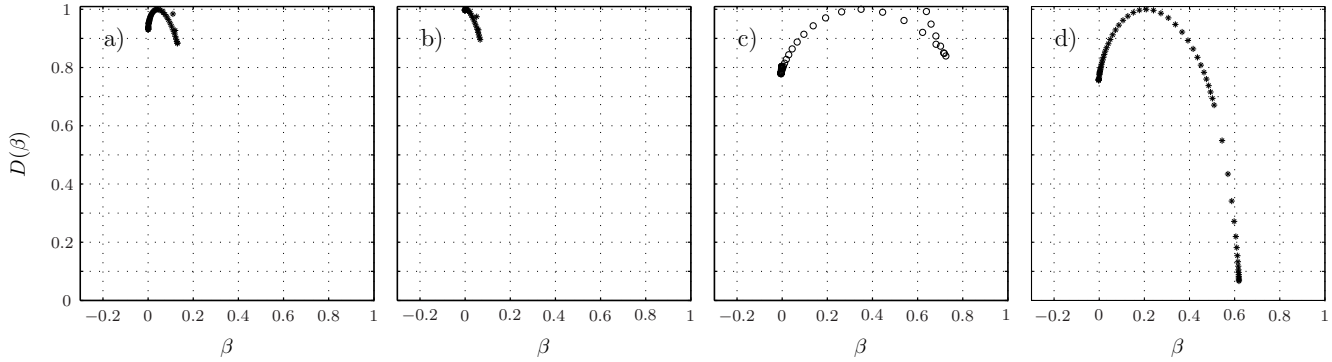


FIG. 3: **Spectres d'oscillation.** Spectres d'oscillation théoriques et estimés (moyenne sur 500 réalisations) pour $s = 0.50$, a) un mouvement brownien fractionnaire; b) une cascade aléatoire multiplicative d'ondelettes; c) une série d'ondelettes lacunaire et d) une série d'ondelettes lacunaire superposée à un mouvement brownien fractionnaire. Les deux premiers processus sont uniformément cusp (et leurs spectres d'oscillation sont dégénérés, concentrés en $\beta = 0$) tandis que les deux derniers contiennent des singularités oscillantes (et leurs spectres d'oscillation sont larges). Cette figure est à mettre en regard de la figure 2

formalisme grandcanonique avait été proposée, mais elle était adaptée à une famille paramétrique, et le formalisme était défini directement sur les paramètres et non sur la fonction elle-même ; il n'était donc pas adaptable à une situation générale. Un autre formalisme grandcanonique est proposé dans [12] ; mais construit sur la fonction d'échelle intégrée, il est de fait soumis aux limitations mentionnées dans la partie 3.2.

References

- [1] A. Arneodo, E. Bacry, S. Jaffard, and J.-F. Muzy, *Oscillating singularities on Cantor sets: A grand-canonical multifractal formalism*, J. Stat. Phys. **87** (1997), no. 1-2, 179–209.
- [2] ———, *Singularity spectrum of multifractal functions involving oscillating singularities*, J. of Fourier Anal. & Appl. **4** (1998), no. 2, 159–174.
- [3] A. Arneodo, E. Bacry, and J.-F. Muzy, *The thermodynamics of fractals revisited with wavelet*, Physica A **213** (1995), no. 1-2, 232–275, 3rd European Days of Thermodynamics on Inhomogeneous Phases and Pattern Formation, Brussels, Belgium, Dec. 13-15, 1993.
- [4] N. Delprat, B. Escudié, P. Guillemain, R. Kronland-Martinet, P. Tchamitchian, and B. Torrèsani, *Asymptotic wavelet and gabor analysis: extraction of instantaneous frequencies*, IEEE Trans. Inf. Th. **38** (1992), 644–664, Special issue on Wavelet and Multiresolution Analysis.
- [5] U. Frisch, *Turbulence*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [6] U. Frisch and G. Parisi, *Fully developed turbulence and intermittency*, Proc. Int. Summer School on Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics (1985), 84–88.
- [7] S. Jaffard, *On lacunary wavelet series*, Ann. Appl. Proba **10**(1) (2000), 313–329.
- [8] S. Jaffard, *Wavelet techniques in multifractal analysis*, Fractal Geometry and Applications: A Jubilee of Benoît Mandelbrot, M. Lapidus et M. van Frankenhuijsen Eds., Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 72(2), AMS, 2004, pp. 91–152.
- [9] S. Jaffard, P. Abry, and S. Roux, *Oscillating singularities and wavelet leaders*, preprint (2009).
- [10] S. Jaffard, B. Lashermes, and P. Abry, *Wavelet leaders in multifractal analysis*, Wavelet Analysis and Applications, T. Qian, M.I. Vai, X. Yuesheng, Eds. (Basel, Switzerland), Birkhäuser Verlag, 2006, pp. 219–264.
- [11] S. Jaffard and Y. Meyer, *Wavelets methods for pointwise regularity and local oscillations of functions*, Memoirs of the AMS. **123** (1996), 587.
- [12] Stéphane Jaffard, *Oscillation spaces: Properties and applications to fractal and multifractal functions*, J. Math. Phys. **39** (1998), no. 2, 4129–4141.
- [13] Stéphane Jaffard, Patrice Abry, Stéphane G. Roux, Béatrice Vedel, and Herwig Wendt, *The contribution of wavelets in multifractal analysis*, Higher education press and World scientific publishing, 2009.
- [14] A Kolmogoroff, *The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers*, Comptes rendus de l'académie des sciences de l'URSS **30** (1941), 301–305.
- [15] B.B. Mandelbrot, *Intermittent turbulence in self-similar cascades; divergence of high moments and dimension of the carrier*, J. Fluid Mech. **62** (1974), 331–358.
- [16] H. Wendt, P. Abry, and S. Jaffard, *Bootstrap for empirical multifractal analysis*, IEEE Signal Processing Mag. **24** (2007), no. 4, 38–48.
- [17] H. Wendt, S. Roux, and P. Abry, *Wavelet leaders and bootstrap for multifractal analysis of images*, Signal Processing **89** (2009), 1100–1114.