Contrôle de puissance distribué efficace énergétiquement et jeux répétés

Mael LE TREUST[1], Samir M. PERLAZA[2], Samson LASAULCE[1],

[1]L2S - CNRS – SUPELEC – Paris 11. 91190 Gif-sur-Yvette, France

[2]France Telecom R&D, Orange Labs - Paris. 38, 40 rue du Général Leclerc. 92794, Issy, cedex 9. France

mael.letreust@lss.supelec.fr, samir.medinaperlaza@orange-ftgroup.com, lasaulce@lss.supelec.fr

Résumé – Nous considérons la liaison montante d'un réseau avec N transmetteurs mobiles et un seul récepteur (canal à accès multiple). Les terminaux contrôlent eux-mêmes leur puissance de transmission dans le but de maximiser l'efficacité énergétique de leurs communications (bits par seconde transmis sans erreur, sur unité de puissance). Ce problème est modélisable par un jeu non-coopératif. Les travaux existants permettent d'affirmer l'existence et l'unicité de l'équilibre de Nash de ce jeu. Malheuresement, cet équilibre peut être très inefficace (au sens de Pareto ou au sens du bien être social). Dans cette étude, nous proposons d'améliorer l'efficacité de l'équilibre de ce jeux en tenant compte du fait que l'interaction entre joueurs se fait généralement sur plusieurs coups. Nous nous plaçons dans le contexte des jeux répétés afin d'étaler la condition d'équilibre dans le temps. Pour une durée aléatoire et des gains de canaux stochastiques, nous proposons une stratégie d'équilibre parfaite en sous jeu, qui garantit aux joueurs des utilités Pareto-optimales.

Abstract – We consider a distributed wireless network represented by a multiple access channel including N mobile terminals and a fixe base station. Terminals choose themselves the way they control their power with the aim of maximizing the energy efficiency of their communications. This problem can be seen as a non-cooperative strategic game. The existing works allow to assert the existence and the uniqueness of the Nash equilibrium of this game. Unfortunately, this equilibrium can be very ineffective (in the sense of Pareto or in the sense of the social welfare). In this study, we suggest improving the efficiency of the equilibrium of this game by taking into account the fact that the interaction between players is generally made on several slots. We take place in the context of the repeated games to spread the equilibrium condition on the time. For unpredictable duration and stochastic channels gains, we propose a sub-game perfect equilibrium strategy, which guarantees to the players Pareto-optimales utilities.

1 Introduction

L'allocation optimale de puissance de transmission dans un canal à accès multiple est, en général, calculée de manière centralisée par le récepteur (station de base ou point d'accès au réseau) et transmise comme un message de contrôle à tous les utilisateurs du réseau. Dans un resaeu cellulaire par exemple, cette solution est réaliste lorsque la station de base est dotée d'une grande capacité de calcul et possède toutes les informations requises pour résoudre le problème d'optimisation global, e.g. réalisation des canaux, contraintes de puissance, etc. Cependant, dans le cas des réseaux auto-configurables, e.g., réseaux ad-hoc, il est possible de trouver des récepteurs avec des fortes limitations de calcul et donc, incapables de résoudre un problème d'allocation optimale de puissance. Pour dépasser cette contrainte, nous considérons un reseau décentralisé. Nous focalisons notre étude sur les différents concepts d'équilibre afin de garantir une solution suffisament robuste. Même si les mécanismes de communication, les émetteurs, les récépteur n'ont qu'une rationnalité limité, il est raisonnable de supposer que les ingénieurs qui les programment sont aussi intelligents que possible. Le concept d'équilibre en théorie des jeu propose une solution à ce problème, caractérise les comportements rationnels et discrédite les autres.

2 Modèles

2.1 Modèle de canal

Nous considérons un canal à accès multiple, décentralisé au sens du contrôle de puissance, pour lequel N utilisateurs transmettent sur des intervalles de temps (durée d'un paquet), que nous appellerons étapes du jeu répété, sur lesquels les canaux sont supposés statiques. À chaque étape, les canaux sélectif en temps mais non sélectifs en fréquence, notés h_i, sont tirés de manière indépendante sur un ensemble admissible : $|h_i|^2 \in [\eta_i^{min}, \eta_i^{max}]$. Nous supposons vérifiée l'hypothèse de réciprocité des canaux montants et descendants. De plus, nous supposons que les terminaux sont capables d'estimer avec une erreur négligée leur canaux montants (via un mécanisme de séquences d'apprentissage, une boucle de retour, etc). Le signal reçu par la station de base peut s'écrire:

$$Y = \sum_{i=1}^{N} h_i X_i + Z \qquad (1)$$

avec $\mathrm{E}|X_i|^2 = p_i$ et $Z \sim \mathbb{C}\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Pour chaque utilisateur $i \in N$, le rapport signal sur interférence plus bruit (RSIB) est donné par:

$$\mathrm{RSIB}_i = \gamma_i = \frac{p_i |h_i|^2}{\sum_{j \neq i} p_j |h_j|^2 + \sigma^2} \qquad (2)$$

Par la suite, on notera $p_{-i} h_{-i} = \sum_{j \neq i} p_j |h_j|^2$. La stratégie du terminal i (joueur i) consiste à choisir, pour chaque paquet émis, le niveau de puissance d'émission $p_i \in P_i = [0, p_i^{max}]$ afin de maximiser sa fonction d'utilité définie par:

$$u_i(p_i, p_{-i}) = \frac{r_i f(\gamma_i)}{p_i} \; i \in \{1, \dots, N\} \qquad (3)$$

où r_i est le débit utile de transmission en bits par seconde et la fonction f est une fonction d'efficacité de la transmission; f

représente typiquement le taux de succès de transmission des paquets. Comme indiqué par [1], il est très réaliste de supposer les propriétés suivantes : f est croissante; $f : \mathbb{R}^+ \to [0,1]$ est sigmoidale (*i.e.* elle est strictement concave sur un intervalle $]0,\alpha[$ puis strictement convexe sur $]\alpha,+\infty[$.

Nous allons voir comment les terminaux peuvent utiliser le contexte d'un jeu de télécommunication pour répondre au problème de contrôle de puissance de transmission. Notre contribution sera l'étude de cette interaction dans le cadre d'un jeu qui se déroule sur plusieurs étapes et plus précisément, un jeu répété.

2.2 Modèle de jeu en un coup

Avant de préciser le modèle de jeu répété que nous proposons dans la section suivante, il nous faut rappeler le modèle de jeu en un coup qui constitue une des références à laquelle nous devons comparer notre approche. Le modèle de jeu non-coopératif en un coup (dit encore jeu statique) avec information complète a été introduit par [2]. Nous rappelons brièvement ici ce modèle ainsi que les résultats principaux correspondants.

Tout d'abord la continuité de chaque fonction d'utilité u_i en $\underline{p} = (p_1,\cdots,p_N)$ et la quasi-concavité de u_i en p_i sur des ensembles compacts et convexes assure, par le théorème de Debreu-Fan-Glicksberg (voir par exemple [3]), l'existence d'un équilibre de Nash en stratégie pure pour le jeu en un coup. L'unicité de l'équilibre est assurée car les correspondances de meilleure réponse sont standard au sens de [4].

Théorème 1 (Goodman, Mandayam, [2]) *Le vecteur des puissances à l'équilibre de Nash, noté $\underline{p}^* = (p_1^*,\cdots,p_N^*)$, correspond à l'unique solution du système d'équations suivant :*

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p_i}u_i(\underline{p}) = 0\right)_{i\in N} \Leftrightarrow \gamma_i = \gamma^*,\ i\in\{1,\ldots,N\}$$

avec γ^* unique solution de l'équation : $xf'(x) - f(x) = 0$.

Pour chaque joueur $i \in \{1,\ldots,N\}$, nous caractérisons la puissance et l'utilité d'équilibre grâce aux les formules suivantes :

$$p_i^* = \frac{\sigma^2}{|h_i|^2}\frac{\gamma^*}{1-(N-1)\gamma^*}\ ;\quad u_i^* = \frac{|h_i|^2}{\sigma^2}\frac{f(\gamma^*)}{\gamma^*}(1-(N-1)\gamma^*).$$

Pour des raisons de place, nous ne nous étendrons pas sur le cas $\gamma^* \geq \frac{1}{N-1}$ ainsi que le problème des contraintes de puissance (voir la référence [5] où ce problème est bien traité).

Il est important de remarquer que les joueurs n'ont pas besoin d'une connaissance complète de l'état du jeu pour jouer la stratégie d'équilibre. Nous pouvons donc prédire le comportement non-coopératif des joueurs dès qu'ils connaissent le bruit σ^2 et le gain de leur propre canal $|h_i|^2$. Contrairement au cas du mécanisme de tarification [6], cette propriété nous permet de formuler une solution décentralisé autant au niveau du calcul qu'au niveau stratégique. Cependant, les conditions d'équilibre imposées à chaque étapes par ces protocoles se traduisent en perte d'utilité pour les joueurs. Notre alternative consiste à étaler la condition d'équilibre dans le temps tout en conservant cette propriété d'information minimale. Nous présentons une stratégie d'allocation de puissance décentralisée qui vérifie la condition d'équilibre du jeu répété et nous permet de garantir aux joueurs une utilité Paret-optimale.

2.3 Modèle de jeu répété

Nous divisons la durée de l'interaction en intervalles de transmission que l'on appelera les étapes du jeu répété. À chaque étape, il existe une probabilité non nulle qu'un joueur arrête sa transmission ou qu'un nouveau joueur commence à transmettre. Cependant les puissances des joueurs à l'équilibre dépendent du nombre de joueur N. Nous supposerons donc que pour chaque variation du nombre de joueurs, un jeu répété se termine et un nouveau jeu débute. C'est donc la station de base qui informe les utilisateurs de toute entrée ou sortie d'un des joueurs du jeu. Cette variation du nombre de joueur étant aléatoire, la station de base estime empiriquement une probabilité d'arrêt du jeu λ valable à chaque étape.

Finalement à chaque début de jeu la station de base envoie à tous les joueurs la probabilité d'arrêt estimée ainsi que le nombre précis de joueurs. Nous allons définir une utilité des joueurs qui prenne en compte la durée aléatoire de l'interaction.

Supposons qu'à chaque étape le jeu s'arrête avec une probabilité λ. La probabilité que le jeu s'arrête à l'étape t sera donc $\lambda(1-\lambda)^{t-1}$. Nous définissons l'histoire du jeu jusqu'à l'étape t comme la suite des vecteurs de puissances $\underline{p}^s = (p_1^s,\cdots,p_N^s)$ jouées aux étapes précédentes : $\underline{h}^t = \{(\underline{p}^1,\ldots,\underline{p}^{t-1})\} \in \mathcal{H}^t$ avec $\mathcal{H}^t$ l'ensemble des histoires jusqu'à l'étape t. Une stratégie pure pour le joueur i est une suite de fonctions $(\tau_i^t)_{t\geq 1}$ avec $\forall t\quad \tau_i^t : \mathcal{H}^t \to [0,p_i^{\max}]$, $p_i^{\max}$ étant la puissance maximale d'émission du joueur i. Pour chaque joueur et chaque étape, on a donc : $\tau_i^t(\underline{h}^t) = p_i^t$. Le vecteur de stratégie $\underline{\tau} = (\tau_i)_{i\in N}$ induit une suite d'action conjointe $(\underline{p}^1,\ldots,\underline{p}^t,\ldots)$ et une suite de paiements d'étapes $(\underline{u}^1,\ldots,\underline{u}^t,\ldots)$. L'espérance des paiements du joueur i dans le jeu répété, avec à chaque étape la probabilité d'arrêt λ, est donnée par la moyenne escomptée :

$$\vartheta_i(\underline{\tau}) = \sum_{t\geq 1}\lambda(1-\lambda)^{t-1}u_i(\underline{p}^t). \tag{4}$$

Le temps est divisé en étapes sur lesquelles les gains des canaux sont supposés statiques puis tirés de manière aléatoire d'étape en étape. Ainsi avant de jouer l'étape t, chaque joueur i apprend le gain de son propre canal h_i^t ainsi que le bruit σ^2. De plus après chaque étape, les joueurs reçoivent leur RSIB duquel ils peuvent déduire la donnée $\sum_{i=1}^N |h_i^t|^2\underline{p}_i^t$. Nous expliquerons plus tard, le rôle de cette dernière hypothèse ainsi qu'un moyen de la relaxer. Dans un premier temps, nous supposerons que les joueurs ont une mémoire parfaite et infinie puis nous monterons que cette hypothèse peut être largement relaxée.

Une stratégie $\underline{\tau}$ du jeu répété soutient un équilibre si $\forall\tau_i',\ i\in N\ ;\ \vartheta_i(\tau) \geq \vartheta_i(\tau_i',\tau_{-i})$. Dans le contexte des jeux répétés, la notion d'équilibre parfait en sous-jeux à été introduite par Selten [7] [8]: une stratégie τ du jeu répété soutient un équilibre parfait en sous-jeu si après toutes les histoires $\underline{h}$ possibles, la stratégie $\tau(\underline{h})$ est toujours une stratégie d'équilibre. Cette propriété permet d'envisager des stratégies d'équilibre plus réalistes et plus robustes aux déviations du jeu répété.

3 Procédures centralisées

Le jeu répété permet de garantir une condition d'équilibre pour les utilités qui dominent l'équilibre de Nash au sens de Pareto. Nous nous intéressons aux procédures centralisées suivantes : celle qui maximise l'optimum social et celle qui satisfait une propriété d'équité et de Pareto-optimalité : l'optimum équitable.

3.1 Optimum Social

Nous cherchons le vecteur d'allocation de puissance $\underline{p}$ qui maximise la somme des utilités des joueurs : $W(\underline{p}) = \sum_{i\in N} u_i(\underline{p})$.

Tout d'abord, pour certaines configurations de canaux, des joueurs ne doivent pas transmettre. Nous supposerons ici, que l'optimum est atteint pour un vecteur de puissance avec des coordonnées strictement positives. La somme des utilités est donc une fonction continues sur un ensemble compact qui atteint son maximum à l'intérieur. Donc nécessairement cet optimum annule les dérivées partielles. On note $\gamma_i = \frac{|h_i|^2 p_i}{|h_{-i}|^2 p_{-i} + \sigma^2}$, pour chaque joueur i, on a :

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}p_i}(\underline{p}) = 0 \quad \Leftrightarrow \gamma_i f'(\gamma_i) - f(\gamma_i) = \sum_{j \neq i} \left[\frac{h_j |h_i|^2 p_i^2}{h_{-j} p_{-j} + \sigma^2} f'(\gamma_j) \right]$$

$$\Leftrightarrow \gamma_i f'(\gamma_i) - f(\gamma_i) = \sum_{j \neq i} \frac{h_j}{|h_i|^2} \left[\frac{\gamma_i^2 (|h_{-i}|^2 p_{-i} + \sigma^2)^2}{\gamma_i (|h_{-i}|^2 p_{-i} + \sigma^2) + |h_{-i-j}|^2 p_{-i-j} + \sigma^2} \right] \cdot f' \left(\frac{h_j p_j}{\gamma_i (|h_{-i}|^2 p_{-i} + \sigma^2) + |h_{-i-j}|^2 p_{-i-j} + \sigma^2} \right)$$

Remarquons que pour calculer sa puissance à l'optimum social, le joueur i doit à priori, avoir une connaissance complète de tous les canaux. Cette information parfaite requiert une signalisation importante. En outre, pour certaines configurations, on montre que l'optimum social n'est pas unique.

L'optimum social n'est pas la procédure centralisée la plus intéressante pour notre modèle car nous souhaitons privilégier un scénario où tous les joueurs doivent transmettre pour une circulation de l'information qui soit minimale.

3.2 Optimum équitable

Afin d'optimiser les utilités des joueurs sans augmenter la signalisation, nous cherchons à maximiser l'utilité du joueur i sous la contrainte que les RSIB des joueurs soient égaux. Nous résolvons l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p_i} u_i(\underline{p}) = 0 \ \text{ s.c. } p_i |h_i|^2 = p_j |h_j|^2, \ \forall i, j \in \{1, \dots, N\} \Leftrightarrow \gamma_i = \tilde{\gamma},$$

$$\text{avec } \tilde{\gamma} \text{ solution de l'équation : } x(1-x)f'(x) - f(x) = 0.$$

Nous supposerons que la fonction $x(1-x)f'(x) - f(x)$ est strictement positive sur $]0, \tilde{\gamma}[$ puis strictement négative sur $]\tilde{\gamma}, +\infty[$, donc possède une unique solution (vérifiée pour la fonction d'efficacité classique $f(x) = (1 - e^{-x})^M$. Remarquons de plus que cette équation est indépendante du joueur i et puisque les RSIB sont égaux la solution du problème de maximisation du joueur i est aussi solution du problème du joueur $-i$. Les deux équations sont compatibles et nous permettent d'obtenir une même formulation pour des puissances qui vérifient le système d'équations $\gamma_i = \tilde{\gamma}, \ \forall i \in \{1, \dots, N\}$.

Théorème 2 *Pour chaque joueur $i \in \{1, \dots, N\}$, nous caractérisons la puissance et l'utilité équitable et optimale grâce aux les formules suivantes :*

$$\tilde{p_i} = \frac{\sigma^2}{|h_i|^2} \frac{\tilde{\gamma}}{1 - (N-1)\tilde{\gamma}} \ ; \quad \tilde{u_i} = \frac{|h_i|^2}{\sigma^2} \frac{f(\tilde{\gamma})}{\tilde{\gamma}} (1 - (N-1)\tilde{\gamma}).$$

Remarque : La solution équitable optimale est unique. La condition $\gamma^* < 1/(N-1)$ et les inégalités $\gamma^* > \beta^* > \tilde{\gamma}$ implique que la puissance $\tilde{p_i}$ est positive.

Nous avons montré que pour jouer l'optimum équitable, les joueurs n'ont besoin de connaître que le gain de leur propre canal, le bruit et le nombre de joueurs. Nous utiliserons ces propriétés essentielles pour proposer une stratégie d'équilibre décentralisée du jeu répété qui garantit à tous les joueurs une utilité optimale et équitable. Cependant la multiplicité des optimaux centralisés impose qu'un standard décide à quelle optimalité les joueurs doivent se conformer.

4 Résultats principaux

Nous avons présenté différentes notion d'équilibre et d'optimalité. Remarquons aussi que le vecteur de puissances $\underline{\tilde{p}} = (\tilde{p_i})_{i \in N}$ n'est pas un point fixe de la correspondance de meilleures réponses et chaque joueur peut dévier unilatéralement de façon profitable. C'est ici que le jeu répété autorise des stratégies qui nous permettent d'étaler de manière temporelle la condition d'équilibre. Nous allons construire une stratégie du jeu répété qui nous permette d'atteindre les utilités optimales et équitables. La stabilité du système est garantie et les utilités d'équilibres s'améliorent. Nous avons démontré les résultats suivant :

Proposition 3 *Les joueurs ont une meilleure utilité à l'optimum équitable qu'à l'équilibre de Nash :*

$$\forall i \in N, u_i(\underline{\tilde{p}}) > u_i(\underline{p}^*). \tag{5}$$

démonstration :

$$\forall i \in N, \frac{u_i(\underline{\tilde{p}})}{u_i(\underline{p}^*)} = \frac{\frac{f(\tilde{\gamma})}{\tilde{\gamma}}[1 - (N-1)\tilde{\gamma}]}{\frac{f(\gamma^*)}{\gamma^*}[1 - (N-1)\gamma^*]} \tag{6}$$

Or la fonction $\phi(x) = \frac{f(x)}{x}(1 - (N-1)x)$ a pour dérivée $\phi'(x) = \frac{x(1-(N-1)x)f'(x) - f(x)}{x^2}$ et s'annule en $\tilde{\gamma}$. D'après le paragraphe précédent, la fonction ϕ est strictement croissante sur $]0, \tilde{\gamma}[$ puis strictement décroissante sur $]\tilde{\gamma}, +\infty[$ et donc atteint son maximum en $\tilde{\gamma}$.

Le jeu répété que nous considérons se déroule de la manière suivante. Une station de base envoie à tous les joueurs une probabilité d'arrêt ainsi que le nombre de joueurs. Le jeu débute et à chaque étape les canaux sont tirés selon un processus stochastique. Juste avant de jouer, les joueurs apprennent le gain de leur propre canal et la variance du bruit grâce à une séquence d'apprentissage. Ensuite les joueurs choisissent simultanément une puissance de transmission. Après avoir transmis, la station de base envoi un signal commun qui permet aux joueurs de reconstituer leur RSIB. Nous utilisons le Folk Théorème [9] [10] [11], résultat central de la théorie des jeux répétés, pour montrer le résultat suivant :

Théorème 4 *Soit $\eta_i^{\min} = \min |h_i|^2$ et $\eta_i^{\max} = \max |h_i|^2$. Soit la condition suivante sur la probabilité d'arrêt du jeu:*

$$\lambda < \frac{\eta_i^{\min}[\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}} f(\tilde{\gamma}) - \frac{1-\gamma^*}{\gamma^*} f(\gamma^*)]}{\eta_i^{\max}[\frac{f(\gamma^*)}{\gamma^*} - \frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}} f(\tilde{\gamma})] + \eta_i^{\min}[\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}} f(\tilde{\gamma}) - \frac{1-\gamma^*}{\gamma^*} f(\gamma^*)]}. \tag{7}$$

Soit la stratégie suivante:

$$\tilde{\tau}_i = \begin{cases} \tilde{p_i} & \textit{tant que les autres joueurs jouent } \tilde{p}_{-i} \\ p_i^* & \textit{sinon} \end{cases}$$

.

Si la condition (7) est vérifiée alors la stratégie proposée est une stratégie d'équilibre parfait en sous-jeu du jeu répété pour tous processus stochastiques de tirage des canaux.

Remarque : Si tous les joueurs suivent cette stratégie, alors les utilités atteintes sont optimales et équitables. De plus si l'un des joueurs dévie, il ne pourra jamais profiter de sa déviation. La menace de l'équilibre de Nash nous garantit ici que les terminaux et les programmateurs sont fortement incités à mettre en place une stratégie de coopération. On remarque que pour utiliser cette stratégie, les terminaux n'ont besoin que d'une unité de mémoire afin de savoir si quelqu'un a dévié précédemment.

Démonstration : Rappelons qu'après avoir joué, les joueurs reçoivent leur RSIB duquel ils déduisent $\sum_{i=1}^{N} |h_i^t|^2 p_i^t$ en fonction des puissances choisies à l'étape t. Si un joueur dévie de l'optimum équitable, il est immédiatement détecté car cette valeur ne sera plus dans un voisinage de $\frac{2\sigma^2\tilde{\gamma}}{(1-\tilde{\gamma})}$. Les autres joueurs peuvent donc le punir dès la prochaine étape. Si les joueurs ne peuvent pas connaître leur RSIB après chaque étape, c'est la station de base qui informe les joueurs d'une éventuelle déviation.

Pour que cette stratégie soutienne un équilibre, le paiement de déviation suivi d'une punition à l'équilibre de Nash du jeu en un coup doit rapporter moins dans le jeu escompté que le paiement équitable. Les canaux futurs n'étant pas encore connu, on calcule la condition d'équilibre à partir de l'espérance sur les canaux futurs. Celle-ci est reliée à processus stochastique. On note $\bar{u}_i = max_{\underline{p}} u_i(\underline{p}) = \frac{|h_i|^2 f(\gamma^*)}{\sigma^2 \gamma^*}$. Pour chaque étape t et donc pour tout h_i^t :

$$
\begin{aligned}
& \lambda \bar{u}_i(\underline{p}^t) + \sum_{s \geq t+1} \lambda(1 - \lambda)^{s-t} \mathrm{E}_{\mathbf{h}}[u_i^*(\underline{p}^s)] \\
& \qquad < \lambda \tilde{u}_i(\underline{p}^t) + \sum_{s \geq t+1} \lambda(1-\lambda)^{s-t} \mathrm{E}_{\mathbf{h}}[\tilde{u}_i(\underline{p}^s)] \\
\Leftrightarrow \quad & \lambda |h_i^t|^2 \frac{f(\gamma^*)}{\gamma^*} + \sum_{s \geq t+1} \lambda(1-\lambda)^{s-t} \mathrm{E}_{\mathbf{h^s}}[|h_i|^2] \frac{f(\gamma^*)(1-\gamma^*)}{\gamma^*} \\
< \quad & \lambda |h_i^t|^2 \frac{f(\tilde{\gamma})(1-\tilde{\gamma})}{\tilde{\gamma}} + \sum_{s \geq t+1} \lambda(1-\lambda)^{s-t} \mathrm{E}_{\mathbf{h^s}}[|h_i|^2] \frac{f(\tilde{\gamma})(1-\tilde{\gamma})}{\tilde{\gamma}} \\
\Leftrightarrow \quad & \lambda |h_i^t|^2 [\frac{f(\gamma^*)}{\gamma^*} - \frac{f(\tilde{\gamma})(1-\tilde{\gamma})}{\tilde{\gamma}}] \\
< \quad & \sum_{s \geq t+1} \lambda(1-\lambda)^{s-t} \mathrm{E}_{\mathbf{h^s}}[|h_i|^2] [\frac{f(\tilde{\gamma})(1-\tilde{\gamma})}{\tilde{\gamma}} - \frac{f(\gamma^*)(1-\gamma^*)}{\gamma^*}]
\end{aligned}
$$

Les gains du canaux varient à chaque étape et notre condition d'équilibre doit rester vrai pour tout processus de tirage des canaux. Nous devons pour cela considérer le pire des cas, c'est à dire lorsque à l'étape t, on a : $|h_i^t|^2 = \eta_i^{\max}$ et pour tout $s \geq t+1$ on a $|h_i^s|^2 = \eta_i^{\min}$. L'équation devient :

$$
\begin{aligned}
& \lambda \eta_i^{\max} [\frac{f(\gamma^*)}{\gamma^*} - \frac{f(\tilde{\gamma})(1-\tilde{\gamma})}{\tilde{\gamma}}] < \\
& \qquad \sum_{s \geq t+1} \lambda(1-\lambda)^{s-t} \eta_i^{\min} \quad [\tfrac{f(\tilde{\gamma})(1-\tilde{\gamma})}{\tilde{\gamma}} - \tfrac{f(\gamma^*)(1-\gamma^*)}{\gamma^*}] \\
\Leftrightarrow \quad & \lambda \eta_i^{\max} [\frac{f(\gamma^*)}{\gamma^*} - \tfrac{f(\tilde{\gamma})(1-\tilde{\gamma})}{\tilde{\gamma}}] \\
& \qquad < (1-\lambda) \eta_i^{\min} [\tfrac{f(\tilde{\gamma})(1-\tilde{\gamma})}{\tilde{\gamma}} - \tfrac{f(\gamma^*)(1-\gamma^*)}{\gamma^*}] \\
\Leftrightarrow \quad & \lambda < \frac{\eta_i^{\min}[\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}} f(\tilde{\gamma}) - \frac{1-\gamma^*}{\gamma^*} f(\gamma^*)]}{\eta_i^{\max}[\frac{f(\gamma^*)}{\gamma^*} - \frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}} f(\tilde{\gamma})] + \eta_i^{\min}[\frac{1-\tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}} f(\tilde{\gamma}) - \frac{1-\gamma^*}{\gamma^*} f(\gamma^*)]}
\end{aligned}
$$

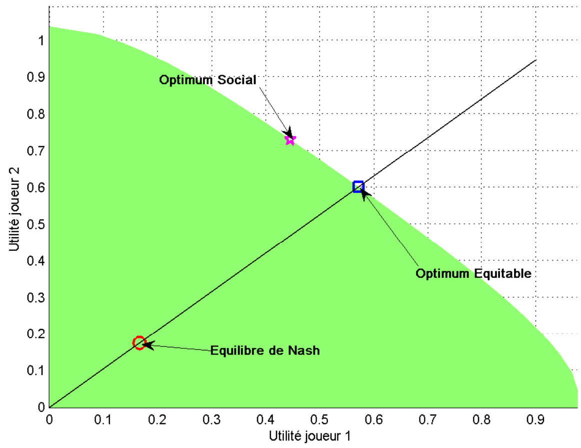

FIG. 1: Région des utilités réalisables pour deux joueurs.

Nous avons montré que sous la condition précédente, une déviation de la stratégie $\tilde{\tau}$ n'est jamais profitable même pour la pire configuration des canaux. La propriété d'équilibre en sous-jeux parfait vient directement du fait que la punition imposée aux autres joueurs est l'équilibre de Nash du jeu en un coup.

5 Conclusion

La répétition du jeu de contrôle de puissance efficace énergétiquement permet d'introduire une forme de coopération entre les joueurs pourtant égoïstes. Cette coopération est stimulée par le signal public émis par la station de base. Il en résulte un équilibre efficace au sens de Pareto et qui a la propriété remarquable de n'exiger que la connaissance des canaux individuel au niveau des terminaux.

References

[1] V. Rodriguez, "An Analytical Foundation for Resource Management in Wireless Communication", *IEEE Proc. of Globecom*, 2003.

[2] D. J. Goodman and N. B. Mandayam, "Power Control for Wireless Data", *IEEE Personal Commun.*, Vol. 7, pp. 48–54, 2000.

[3] D. Fudenberg and J. Tirole, "Game Theory", *MIT Press*, 1991.

[4] R. D. Yates, "A framework for uplink control in cellular radio systems", *IEEE Journal on Selec. Areas in Comm.*, Vol. 13, No. 7, pp. 1341–1347, Sep. 1995.

[5] S. Lasaulce, Y. Hayel, R. El Azouzi and M. Debbah, "Introducing hierarchy in energy games", *IEEE Transactions on Wireless Communications, Juin 2009, Vol. 8, No. 6.*.

[6] C. U. Saraydar, N. B. Mandayam and D. J. Goodman, "Efficient power control via pricing in wireless data networks", *IEEE Trans. on Communications*, Vol. 50, No. 2, pp. 291–303, Feb. 2002.

[7] R. Selten, "Spieltheoretische behandlung eines oligopolmodells mit nachfragetragheit" *Zeitschrift fur die gesamte Staatswissenschaft, 1965.*

[8] R. Selten, "Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games" *International journal of game theory, 1975 - Springer.*

[9] S. Sorin, "Repeated Games with Complete Information", In: R. Aumann, S. Hart (eds.) *Handbook of game theory with economic applications, vol 1*, 1992.

[10] D Fudenberg, E Maskin, "The folk theorem in repeated games with discounting or with incomplete information" *Econometrica: Journal of the Econometric Society, 1986.*

[11] J.W. Friedman, "A Non-cooperative Equilibrium for Supergames" *Cournot Oligopoly: Characterization and Applications, 1988.*

[12] JF Mertens, S Sorin, S Zamir, "Repeated Games, Part A,B,C" *CORE Discussion Papers, 1994.*