

Une méthode optimale pour l'estimation des directions d'arrivées basée sur des connaissances a priori

Guillaume BOULEUX¹, Petre STOICA², Rémy BOYER³

¹Laboratoire d'Analyse des Signaux et des Processus Industriels (LASPI), Université Jean Monnet, IUT de Roanne
20 Av. de Paris, 42334 Roanne Cedex, France

²Systems and Control Division
Université d'Uppsala, Uppsala, Suède

³Laboratoire des Signaux et Systèmes (L2S), Université Paris-Sud XI, CNRS, SUPELEC,
3 rue Joliot Curie, Gif-Sur-Yvette, France

guillaume.bouleux@univ-st-etienne.fr, peter.stoica@it.uu.se
remy.boyer@lss.supelec.fr

Résumé – Dans diverses applications comme l'estimation des Directions D'Arrivées (DDA) ou encore dans l'estimation de raies spectrales, nous pouvons disposer d'informations a priori. Cela peut être par exemple des DDA connues dans un contexte RADAR urbain ou des fréquences liées à la cinématique des machines tournantes. Nous proposons dans cet article une méthode optimale pour l'estimation des DDA qui exploite la connaissance de certaine DDA pour estimer aussi précisément que possible les directions inconnues. Cette nouvelle méthode nommée PLEDGE (Prior-knowLEDGE) est basée sur l'algorithme MODE. Pour illustrer les avantages d'une telle approche, nous proposons la Borne de Cramér-Rao (BCR) stochastique associée. Enfin, nous utilisons PLEDGE pour réaliser le diagnostic d'un défaut de barre rotorique d'une machine asynchrone.

Abstract – In some applications involving line spectra or direction of arrival (DOA) estimation, we may have a priori information which could consist of known frequencies in Magnetoencephalography (MEG) or mechanical signals, or of known DOA's in a RADAR urban scenario. With this fact in mind we propose an optimal method for array processing that exploits the information of the known DOA's for estimating the unknown DOA's as accurately as possible. This new **Prior-knowLEDGE (PLEDGE)** technique is based on the method of direction estimation (MODE) approach. To show the benefits of incorporating prior-knowledge we also present the corresponding stochastic Cramér-Rao Bound (CRB). Finally, we use PLEDGE for estimating frequencies in the current spectrum of an induction motor to perform the diagnosis on rotor bars.

1 Introduction

Dans diverses applications comme l'estimation des Directions D'Arrivées (DDA) ou encore dans l'estimation de raies spectrales, nous pouvons disposer d'informations a priori. Prenons tout d'abord l'exemple du RADAR en milieu urbain. Dans ce contexte, les sources stationnaires représentées par les immeubles dévient les ondes de manière systématique vers une direction privilégiée. Lorsque les ondes frappent ensuite le réseau de capteur, ces dernières arrivent avec une direction connue. Notons que dans ce contexte multi-trajet, les sources sont bien souvent fortement corrélées voir même cohérente. Nous pouvons citer d'autres applications relatives à l'analyse spectrale. Par exemple, en Magnétoencéphalographie (MEG), certaines activités neuronales du cerveau constituent une information connue et matérialisée par des fréquences liées au aux décharges de spike dans le courant synaptique. Une autre application, plus industrielle mais toujours dans le même contexte est le diagnostic de machines tournantes. La cinématique de ces systèmes étant connue, certaines fréquences sont bien identifiées, cela

peut être la fréquence d'alimentation des machines ou encore les fréquences liées aux engrenages. On constate néanmoins que ces informations peuvent ne pas porter d'information ou même empêcher l'estimation des données d'intérêt. Il devient alors crucial de tirer bénéfice de ces informations a priori pour estimer les paramètres d'intérêts aussi précisément que possible. Dans cette optique, des travaux récents ont été proposés dans le contexte de la spectroscopie de signaux à Résonance Magnétique Nucléaire (RMN), (référence [5] dans [1]) ou dans le traitement d'antenne, référence [11] dans [1]. Chacune de ces méthodes utilisent le concept de réduction de sous-espace par déflation de la matrice de covariance estimée. La Borne de Cramér-Rao (BCR) associée à ce modèle a été proposée et analysée dans [1]. Cette borne, nommée Prior-CRB (P-CRB), montre que ce type d'approche est limitée et est contrainte par des hypothèses astreignantes. La transformation non-bijective due à la déflation peut être une des causes de cette limitation. L'objectif de cet article est de proposer une méthode optimale dans lequel nous pourrions aisément intégrer les paramètres connus. Nous avons basé notre méthode sur l'algorithme MODE

(Method Of Direction Estimation) [6] à partir duquel nous avons déduit l'algorithme optimale pour le traitement d'antenne : PLEDGE. Nous présentons et développons cet algorithme pour une Antenne Linéaire et Uniforme (ALU) nous permettant ainsi de transposer aisément la méthode pour l'analyse spectrale.

2 Formulation du modèle

Considérons n ondes planes bande-étroites suffisamment éloignées de l'émetteur frappant une antenne composée de L capteurs espacés chacun d'une demi-longueur d'onde. Soit t un échantillon ("observation") et supposons que le nombre total d'échantillons disponibles soit égal à N , de ce fait $t = 1, \dots, N$. La réponse de l'antenne à un instant t donné se paramétrise de la manière suivante

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{x}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

où $\mathbf{A}(\boldsymbol{\omega}) = [\mathbf{a}(\omega_1) \dots \mathbf{a}(\omega_n)]$ et où $\mathbf{a}(\omega_i)$ est le i^{e} vecteur d'antenne défini par

$$\mathbf{a}(\omega_k) = [1 \ e^{j\omega_k} \dots e^{j(L-1)\omega_k}]^T \quad (2)$$

avec $\omega_k = -\pi \sin(\theta_k)$, $k = 1, \dots, n$, pour l'estimation des Directions D'Arrivées (DDA) (θ l'angle d'arrivée) et où ω_k peut aussi être la pulsation temporelle, i.e $\omega_k = 2\pi \frac{f_k}{f_e}$ (f_e la fréquence d'échantillonnage) dans le cas de l'analyse spectrale. Les amplitudes des ondes $\mathbf{x}(t)$ ainsi que le bruit $\mathbf{n}(t)$ sont supposés être des processus stochastiques circulaires et stationnaires Gaussien centrés et dont les moments du second ordre valent

$$\mathbb{E}[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)] = \mathbf{P} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(t)] = \sigma^2 \mathbf{I} \quad (3)$$

où \mathbb{E} représente l'espérance mathématique et H l'opérateur transposé conjugué et où T et * correspondant respectivement à la transposée et à la conjugaison.

L'objectif de ce travail est de fournir une méthode optimale pour l'estimation des DDAs qui intègre et exploite la connaissances de certaines d'entre elles en vue d'améliorer l'estimation des DDAs inconnues. L'optimalité doit être comprise au sens du Maximum de Vraisemblance (MV), or l'estimation des DDAs au sens du MV est un sujet qui a suscité beaucoup d'attention ces dernières années [3]. Une méthode a néanmoins émergée grâce à ses bonnes performances ainsi que par son coût calculatoire peut élevé. Cette méthode s'intitule MODE pour Method Of Direction Estimation [6, 4]. Nous allons donc nous baser sur cette méthode pour proposer un nouvel estimateur.

3 De MODE à PLEDGE

Par manque de place nous ne pouvons exposer dans les détails l'algorithme MODE, nous donnons simplement les grandes lignes de la méthode ainsi que le critère de minimisation. Dans le cadre d'une Antenne Linéaire Uniforme (ALU), les n pulsations ω_k sont déterminée par la recherche des racines d'un

polynôme, que nous nommons $Q(z)$, dont le vecteur de coefficients appartient au sous-espace bruit. Ce vecteur, défini comme $\mathbf{b} = [b_0 \dots b_n]^T$ est déterminée en résolvant le critère optimale

$$\text{Trace}[\mathbf{B}(\hat{\mathbf{B}}^H \hat{\mathbf{B}})^{-1} \mathbf{B}^H \hat{\mathbf{E}}_S \hat{\boldsymbol{\Lambda}} \hat{\mathbf{E}}_S^H] \quad (4)$$

où nous avons utilisé une décomposition en valeurs propres de la matrice de covariance estimée $\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{y}(t)\mathbf{y}^H(t)$, définie par $\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{E}}_S \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_S \hat{\mathbf{E}}_S^H + \hat{\mathbf{E}}_N \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_N \hat{\mathbf{E}}_N^H$ avec $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{L-n} \text{Trace}[\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_N]$ un estimé consistant de la variance du bruit et où enfin $\hat{\boldsymbol{\Lambda}} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_S (\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_S - \hat{\sigma}^2 \mathbf{I})^{-2}$. La matrice \mathbf{B} a quant à elle pour expression

$$\mathbf{B}^H = \begin{bmatrix} b_n & b_{n-1} & \dots & b_0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & & \ddots \\ \mathbf{0} & & b_n & b_{n-1} & \dots & b_0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

dont les coefficients $\{b_k\}$ sont ceux du polynôme $Q(z)$. Quelques manipulations algébriques permettent de réécrire le critère de manière à obtenir une forme quadratique et trouver plus aisément le vecteur \mathbf{b} .

Si maintenant n_c DDAs sont connues, alors le polynôme $Q(z)$ peut se factoriser en 2 polynômes $Q_c(z)$ et $Q_i(z)$ où $Q_c(z)$ est le polynôme dont les n_c racines sont les z_i de DDAs connues et $Q_i(z)$ le polynôme dont les n_i zéros sont les z_i de DDAs inconnues. Les coefficients de $Q_i(z)$ sont alors les éléments $\{\bar{b}_q\}$, $q = 1, \dots, n_i$, définis à partir des coefficients $\{b_k\}$ du polynôme $Q(z)$ et des coefficients $\{q_p\}$, $p = 1, \dots, n_c$ de $Q_c(z)$ de la manière suivante

$$[b_0 \ b_1 \ \dots \ b_n]^T = \mathbf{C}^T \bar{\mathbf{b}} \quad (6)$$

où

$$\bar{\mathbf{b}} = [\bar{b}_0 \ \bar{b}_1 \ \dots \ \bar{b}_{n_i}]^T$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & \dots & q_{n_c} & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & & \ddots \\ \mathbf{0} & & q_0 & q_1 & \dots & q_{n_c} \end{bmatrix}.$$

En réécrivant (4) en fonction de (6) et en résolvant le nouveau critère nous trouvons l'estimateur optimal PLEDGE.

4 PLEDGE BCR

La BCR proposée dans [1] est basée sur le principe de la déflation de sous-espace par projection orthogonale. Cette méthode garanti la suppression des informations connues. Cette borne, nommée la Prior-CRB (P-CRB), a été dérivée sous hypothèses déterministes. Les analyses et résultats qui ont été donnés, montrent que l'exploitation de l'information a priori par déflation orthogonale n'est pas une méthode optimale. Nous pouvons faire les constats suivants : (1) la $P\text{-CRB} = \text{CRB}$ en général et (2) la $P\text{-CRB} < \text{CRB}$ lorsque les sources associées aux DDAs connues et inconnues sont corrélées. Par une telle approche, la seule manière d'améliorer l'estimation des DDAs inconnues est d'être alors en présence de sources corrélées. De

là, nous proposons la BCR stochastique basée sur le modèle de PLEDGE et que nous nommons en conséquence la PLEDGE BCR.

Nous nous sommes inspirés de [5] pour formuler et dériver la PLEDGE BCR. En conséquence, soit

$$\alpha = [\omega_i^T \rho^T \sigma^2]^T \quad (7)$$

le vecteur des paramètres inconnus, où $\omega_i = [\omega_1 \dots \omega_i]^T$. Le vecteur ρ de taille $n^2 \times 1$ est constitué des $\{P_{ii}\}$ et $\{\text{Re}(P_{ij}), \text{Im}(P_{ij}) \text{ pour } j > i\}$. Sous les hypothèses précédentes et sous hypothèse Gaussienne, la Matrice d'Information de Fisher (MIF) pour le vecteur α est donnée par

$$\text{MIF}_{p,q} = N \text{Trace} \left[\mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha_p} \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha_q} \right] \quad (8)$$

pour $p, q = 1, \dots, n_i + n^2 + 1$

avec la matrice de covariance $\mathbf{R} = \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{A}^H + \sigma^2 \mathbf{I}$. Par manque d'espace, nous ne développons pas plus la dérivation et donnons l'expression presque intuitive de la PLEDGE BCR. Cette dernière a donc pour expression

PLEDGE BCR(ω_i) =

$$\frac{\sigma^2}{2N} \left[\text{Re} \left\{ \left(\mathbf{D}_u^H \mathbf{\Pi}_A^\perp \mathbf{D}_u \right) \odot \left(\mathbf{P}_u^H \mathbf{A}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}_u \right)^T \right\} \right]^{-1} \quad (9)$$

avec \odot le produit de Hadamard et où nous avons considéré le partitionnement $\mathbf{P} = [\mathbf{P}_i | \mathbf{P}_c]$. Enfin, $\mathbf{D}_i = [d_1 \dots d_{n_i}]$ où $d_k = (d\mathbf{a}(\omega_k)/d\omega_k)$ est la dérivée de $\mathbf{a}(\omega)$ prise en $\omega = \omega_k$.

5 Simulation

Dans tous les scénarios considérés, nous avons 2 sources frappant une ALU dont les capteurs sont espacés d'une demi longueur d'onde. Les sources ont pour direction θ_1 et θ_2 respectivement. Nos définissons la puissance de chacune des sources en fonction de la matrice de corrélation comme

$$\frac{\mathbf{P}}{\sigma^2} = \begin{bmatrix} 10 \frac{\text{RSB}_1}{10} & \rho \\ \rho^* & 10 \frac{\text{RSB}_2}{10} \end{bmatrix}$$

où σ^2 est égal à un pour chaque simulation et où ρ est le coefficient de corrélation. La DDA d'intérêt est la seconde, soit θ_2 . Les DDAs sont situées à $\theta_1 = 10^\circ$ et $\theta_2 = 12^\circ$ pour toutes les expérimentations de la Figure 1. Enfin, chaque résultat est issu d'un moyennage de 1000 tirages indépendants. Nous avons comparé PLEDGE à MODE et P-MUSIC de [1] mais nous avons amélioré les performances de ce dernier en utilisant la matrice de covariance non-bruitée au lieu de la matrice de covariance estimée (i.e. $\hat{\mathbf{R}} - \hat{\sigma}^2 \mathbf{I}$ au lieu de $\hat{\mathbf{R}}$). Nous avons tracé la BCR stochastique pour n paramètres, la PLEDGE BCR, la BCR pour le cas de sources décorréliées dérivée par Jansson et al [2] et la BCR pour n_i DDAs inconnues, $n_i = 1$ dans le contexte de ces simulations.

Performances de PLEDGE : Nous constatons que la variance

de PLEDGE atteint la borne minimale PLEDGE BCR. On peut donc conclure que PLEDGE est bien une solution optimale. Sur les figures Figure 1 et Figure 2 on peut voir l'apport de PLEDGE à bas RSB par rapport à MODE. L'expérience reliée à la Figure 1-(b) montre de plus l'avantage de PLEDGE lorsque la DDA d'intérêt est bien moins puissante que celle qui est connue. Par exemple, si la source d'intérêt est 2 fois moins puissante, on observe clairement que PLEDGE à une variance significativement plus faible. Nous avons aussi montré que PLEDGE était beaucoup plus robuste à la corrélation que MODE et P-MUSIC, pour cela il suffit d'analyser la Figure 2. Enfin, nous pouvons voir sur la Figure 1-(c) que P-MUSIC à de meilleurs performances que PLEDGE à bas RSB. Dans cette zone, P-MUSIC a une variance équivalente à la PLEDGE BCR avec comme hypothèse additionnelle, celle de sources décorréliées. Toutefois, due à sa sous optimalité, nous constatons qu'asymptotiquement P-MUSIC est biaisé.

A propos de la connaissance a priori : Nous basons notre discussion sur les BCR tracées sur les différentes figures. Nous concluons rapidement, en comparant la BCR pour n paramètres et la PLEDGE BCR que l'information a priori permet nettement d'améliorer l'estimation des DDAs d'intérêts, surtout à bas RSB. Concentrons nous sur la BCR sous hypothèse de sources décorréliées, la MIF associée possède $2n+1$ paramètres au lieu de $n^2 + n + 1$. Le nombre de paramètres de la MIF associée à la PLEDGE BCR est de $n_i + n^2 + 1$. De manière générale, la BCR pour sources décorréliées admet donc une variance plus faible que la PLEDGE BCR. Cependant, il existe des cas où connaître des DDAs est plus favorable que de connaître la décorrélation des sources. Pour s'en convaincre, regarder la Figure 1-(d). Pour finir, lorsque nous couplons les 2 hypothèses la borne obtenue a de loin la variance la plus faible, Figure 1-(c).

6 Application au diagnostic

Pour diagnostiquer un défaut de barre rotorique, nous étudions le glissement d'une machine asynchrone. Lorsque un défaut de barre existe, 2 composantes spectrales sont présentes dans le spectre du courant. Elles sont situées aux fréquences $f_s = (1 \pm 2s)f_{line}$ où f_{line} est la fréquence d'alimentation, soit 50 Hz et $s = \frac{v_s - v}{v_s}$ en % où v est la vitesse réelle et v_s la vitesse synchrone (stator). Dans ce type d'acquisition peu coûteuse, les inconvénients sont la forte dynamique du 50 Hz ainsi que sa fluctuation, Figure 3-(a).

Conditions expérimentales : Nous avons utilisé le signal du courant acquis d'une machine asynchrone. La machine a un faible défaut de barre et de ce fait 2 fréquences latérales devraient être présentes à 51.17 Hz et 48.83 Hz. Les conditions expérimentales sont les suivantes : nous avons acquis 60000 échantillons, soit 100 tours, à la fréquence $f_e = 25.6$ KHz et nous avons décimé d'un facteur 200 réduisant le nombre d'échantillon par tour à 3. PLEDGE utilise l'estimé de la matrice de covariance pour déterminer le sous-espace signal, dans le contexte de l'analyse spectrale nous utilisons le formalisme

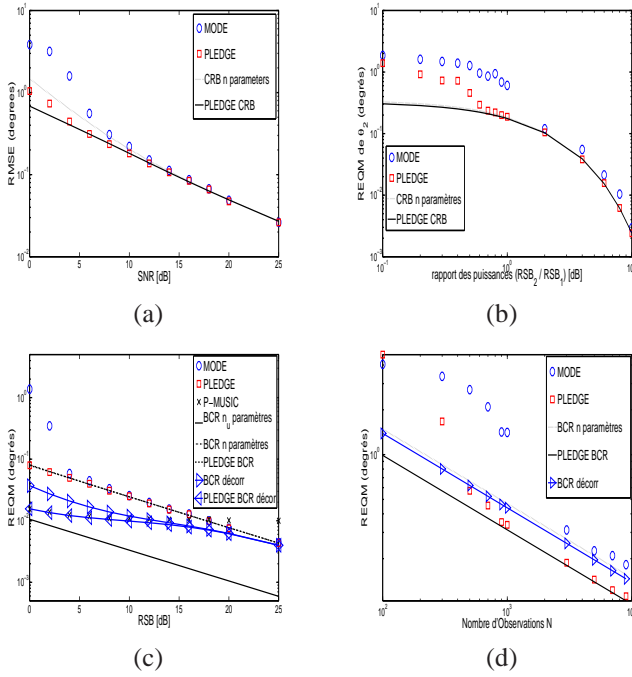


FIGURE 1 – (a) $L=5$, $N=1000$, sources de même puissance, (b) $RSB_1 = 4$ dB, $L=10$ et $N=100$, (c) $L=10$, $N=100$, $RSB_1 = 4$ dB et $RSB_2 = 14$ dB, (d) $RSB=2$ dB, $L=6$ et sources de même puissance, $n=2$ pour toutes les expériences.

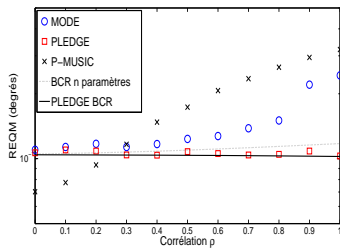


FIGURE 2 – $L=10$, $N=100$, $RSB=2$ dB, $\theta_1 = 10^\circ$, $\theta_2 = 14^\circ$ sources de même puissance et $n=2$.

de Hankel à la place. La dimension du sous-espace signal est estimée par l’algorithme MDL qui a donné 30 sources. Le 50 Hz est tout d’abord estimé par MODE puis cet estimé est utilisé pour PLEDGE.

Résultats : Les fréquences estimées par PLEDGE sont reportées sur la Figure 3-(b). Nous pouvons voir que PLEDGE a totalement supprimé la fréquence connue, soit le 50 Hz. Sans ambiguïté nous pouvons dire également que les fréquences 48.87 Hz et 50.98 Hz sont celles liées au glissement et donc au défaut de barre. En conséquence, grâce à PLEDGE, peu d’échantillon sont nécessaire pour contrôler le système ce qui représente un avantage indéniable pour lutter contre la fluctuation du 50 Hz et améliorer le coût de calcul du traitement.

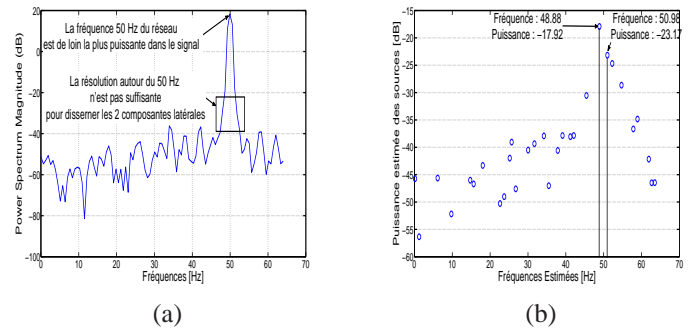


FIGURE 3 – (a) PSD du courant, (b) puissances des sources estimées par PLEDGE.

7 Conclusion

Dans cet article nous avons proposé une méthode optimale basée des connaissances a priori. Cette méthode, nommée PLEDGE, est basée sur l’algorithme MODE (method of direction estimation). PLEDGE exploite l’information de DDAs connues pour mieux estimer les inconnues. Afin de montrer le gain d’estimation obtenu par cette approche, nous avons également proposé la BCR correspondante. Les résultats de simulation ont montré que PLEDGE pouvait significativement aider l’estimation des DDAs inconnues particulièrement quand les sources associées aux DDAs inconnues sont bien plus puissantes que celles connues. Nous avons montré que PLEDGE avait de bonnes performances dans la zone où le SNR est faible et qu’il était robuste à la corrélation. Finalement, nous avons présenté un problème de diagnostic. Ce dernier consiste en l’estimation de deux fréquences masquées par une troisième très proche et bien plus puissante. PLEDGE était adapté et a permis d’estimer ces fréquences.

Références

- [1] R. Boyer and G. Bouleux. Oblique Projections for Direction-Of-Arrival Estimation with Prior Knowledge. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 56(4) :1374–1387, April 2008.
- [2] M. Jansson, B. Göransson, and B. Otersten. A Subspace Method for Direction of Arrival Estimation of uncorrelated Emitter Signals. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 47(4) :945–956, April 1999.
- [3] B. Ottersten, M. Viberg, P. Stoica, and A. Nehorai. *Exact and Large Sample ML techniques for Parameter Estimation and Detection in Array Processing*. Radar Array Processing (second ed.). Springer-Verlag, New-York, 1999.
- [4] P. Stoica and M. Jansson. On Forward-Backward MODE for Array Signal Processing. *Digital Signal Processing*, 7 :239–252, 1997.
- [5] P. Stoica, E. G. Larsson, and A. B. Gershman. The Stochastic CRB for Array Processing : A Textbook derivation. *IEEE Signal Processing Letters*, 8(5) :148–150, May 2001.
- [6] P. Stoica and K. Sharman. Maximum Likelihood Methods for Direction Of Arrival Estimation. *IEEE Trans. on Acoustics Speech and Signal Processing*, 38 :1132–1143, 1990.