

A priori par normes mixtes pour les problèmes inverses

Application à la localisation de sources en M/EEG

Matthieu KOWALSKI¹, Alexandre GRAMFORT²

¹Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités
CMI, 39 rue Joliot-Curie, 13453 Marseille Cedex 13, France

²INRIA Sophia Antipolis, France- Projet ODYSSEE
kowalski@cmi.univ-mrs.fr, alexandre.gramfort@inria.fr

Résumé – On s'intéresse aux problèmes inverses sous déterminés, et plus particulièrement à la localisation de sources en magnéto et électro-encéphalographie (M/EEG). Dans ces problèmes, bien que l'on ait à disposition un modèle physique de la diffusion (ou du "mélange") des sources, le caractère très sous-déterminé des problèmes rend l'inversion très difficile. La nécessité de trouver des *a priori* forts et pertinent physiquement sur les sources est une des parties difficiles de ce problème. Dans ces problèmes, la parcimonie classique mesurée par une norme ℓ_1 n'est pas suffisante, et donne des résultats non réalistes. On propose ici de prendre en compte une parcimonie structurée grâce à l'utilisation de normes mixtes, notamment d'une norme mixte sur trois niveaux. La méthode est utilisée sur des signaux MEG issus d'expériences de stimulation somesthésique. Lorsqu'ils sont stimulés, les différents doigts de la main activent des régions distinctes du cortex sensoriel primaire. L'utilisation d'une norme mixte à trois niveaux permet d'injecter cet *a priori* dans le problème inverse et ainsi de retrouver la bonne organisation corticale des zones actives. Nous montrons également que les méthodes classiquement utilisées dans le domaine échouent dans cette tâche.

Abstract – We are interested by under-determined inverse problems, and more specifically by source localization in magneto and electroencephalography (M/EEG). In these problems, despite we have a physical model of diffusion (or "mixing") of the sources, the (very) under-determined aspect of the problem leads to a very difficult inversion. The need of finding strong and physically relevant prior on the sources is one of the challenging part. In these problems, classical sparsity prior used with a ℓ_1 norm is not relevant, and gives unrealistic results. We propose to take into account a structured sparsity thanks to the use of mixed norms, and especially a mixed norm with three indices. The method is then used on MEG signals issued from somatosensory data. When stimulated, hand fingers activate separate regions of the primary somatosensory cortex. The use of a three level mixed norm allows to take this prior into account in the inverse problem in order to correctly recover the organization of the brain functional regions. We also show that classical methods fail for this task.

1 Introduction

Le but d'un problème inverse en traitement du signal est de restituer un ou plusieurs signaux à partir d'observations souvent incomplètes et bruitées. Les signaux sont supposés liés par un modèle physique. On supposera ici que l'on dispose de N capteurs pour mesurer des signaux de longueur T . Les mesures, que l'on représentera par une matrice $M \in \mathbb{R}^{N \times T}$, sont supposées issues d'un mélange de I sources de longueur T représentées par une matrice $X \in \mathbb{R}^{I \times T}$. Le mélange est effectué par un opérateur linéaire $G \in \mathbb{R}^{N \times I}$. Cet opérateur G représente une transformation physique liant les sources X et les observations M :

$$M = GX + b,$$

où b représente un bruit additif.

On se place dans le cadre où, bien que l'on dispose d'un modèle réaliste pour l'opérateur G , le nombre N d'observations à notre disposition est très inférieur au nombre I de sources à estimer. En particulier, on s'intéressera au problème de localisation de sources en M/EEG. Le but de ce problème inverse est d'estimer la position et l'amplitude des sources dans

le cerveau à partir d'une centaine de mesures des champs électrique ou magnétique induits par l'activité neuronale jusqu'à l'extérieur de la tête. Selon les modèles utilisés le nombre de sources possibles peut atteindre plusieurs dizaines de milliers. Si ce problème est à rapprocher de la séparation de sources audio, son caractère très sous-déterminé ne permet pas d'utiliser les techniques classiques habituellement mise en oeuvre (voir par exemple [6] et les références pour un aperçu des méthodes utilisées en séparation de sources audio).

Ce problème inverse est classiquement présenté sous une formulation variationnelle du type :

$$X^* = \arg \min_X \|M - GX\|_F^2 + \lambda \|X\|_{\mathbf{w};F}^2, \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

où $\|\cdot\|_{\mathbf{w};F}$ est la norme de Frobenius pondérée. L'utilisation d'un tel *a priori* a l'avantage de permettre un calcul simple et rapide. Cependant, cette estimation est assez imparfaite dans le sens où elle produit des régions actives dans le cerveau dont l'extension spatiale est souvent surestimée. Ce type de résultat est une conséquence directe de l'utilisation d'une norme de type ℓ_2 sur les sources. Afin de réduire ce biais d'estimation, l'approche naturelle consiste à introduire de la parcimo-

nie dans l'*a priori*, via notamment l'introduction d'une norme ℓ_1 . Malheureusement, compte tenu du caractère extrêmement sous-déterminé du problème, du niveau bruit relativement important ainsi que de l'extension spatiale réelle des zones actives, l'utilisation d'une norme ℓ_1 échoue à produire des résultats réalistes.

L'objectif de cette contribution est de montrer comment des *a priori* structurés peuvent être exploités dans un problème inverse très sous déterminé grâce à l'utilisation de normes mixtes [3, 4]. On décrira brièvement dans la section suivante les détails d'utilisation d'une norme mixte, puis on donnera un aperçu des résultats obtenus sur des données MEG dans la dernière section.

2 Méthodologie

On s'intéresse particulièrement aux modèles où les sources peuvent être indicées par trois indices. Dans le cadre de la M/EEG, les trois indices peuvent correspondre à la localisation spatiale dans le cerveau, à l'indice temporel du signal, mais aussi à la condition expérimentale (par exemple, pour les données somesthésiques, une condition correspond à un doigt de la main qui est stimulé activant ainsi une région précise dans le cortex). Notons K le nombre de conditions. La matrice de mesures est donnée par $M \in \mathbb{R}^{N \times KT}$. Les sources, dont les éléments sont indicés par (i, k, t) , sont données par $X \in \mathbb{R}^{I \times KT}$; i indice l'espace, k la condition et t le temps.

On peut alors définir une norme mixte sur ces trois indices :

Définition (Normes mixtes). Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{IKT}$ indicé par un triple indice (i, k, t) tel que $\mathbf{x} = (x_{i,k,t})$. Soit $p, q, r \geq 1$ et $\mathbf{w} \in \mathbb{R}_{+,*}^{IKT}$ une suite de poids strictement positifs, indicés par un triple indice (i, k, t) . On appelle norme mixte \mathbf{x} la norme $\ell_{\mathbf{w};pqr}$ donnée par

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{w};pqr} = \left(\sum_{i=1}^I \left(\sum_{k=1}^K \left(\sum_{t=1}^T w_{i,k,t} |x_{i,k,t}|^p \right)^{q/p} \right)^{r/q} \right)^{1/r}.$$

Le problème inverse considéré se présente de la manière suivante :

$$X^* = \arg \min_X \|M - GX\|_F^2 + \lambda \|X\|_{\mathbf{w};pqr}^r, \lambda \in \mathbb{R}_+. \quad (2)$$

Utiliser une norme mixte permet de structurer la façon dont on estime les sources, en jouant sur les valeurs de p, q, r . En particulier, des valeurs proches de 1 permettent de favoriser la parcimonie tandis que des valeurs proches de 2 favorisent la diversité. Pour l'application visée, on utilisera la norme mixte $\ell_{\mathbf{w};212}$. En choisissant de pénaliser les conditions expérimentales par une norme 1, tout en laissant une norme 2 sur les autres indices, on incite chaque source à être active pour peu de conditions (avec l'exemple somesthésique choisi, une telle norme mixte favorise l'activation d'une seule région du cortex par condition expérimentale).

La minimisation de la fonctionnelle (2) se fait par un algorithme itératif utilisant l'opérateur proximal associé à la norme $\ell_{\mathbf{w};212}$. On rappelle la définition de l'opérateur proximal :

Définition (Opérateur proximal). Soit $\phi : \mathbb{R}^P \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe semie-continue inférieurement. L'opérateur proximal associée à ϕ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$, noté $\text{prox}_{\lambda\phi} : \mathbb{R}^P \rightarrow \mathbb{R}^P$ est donné par

$$\text{prox}_{\lambda\phi}(\mathbf{y}) = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^P} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_2^2 + \lambda\phi(\mathbf{x}).$$

La proposition suivante donne alors l'opérateur proximal associé à la norme mixte ℓ_{212} :

Proposition. Soit $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{IKT}$ indicé par un triple indice (i, k, t) . Soit \mathbf{w} une séquence de poids strictement positifs tels que $\forall t, w_{i,k,t} = w_{i,k}$. Pour chaque i , soit $w_{i,k'_i}, [y_{i,k'_i}] = \sqrt{w_{i,k'_i} \sum_t |y_{i,k'_i,t}|^2}$ et $r_{i,k'_i} = [y_{i,k'_i}]/w_{i,k'_i}$ ordonnés tels que, pour un i fixé, $\forall k'_i, r_{i,k'_i+1} \leq r_{i,k'_i}$. Alors, $\mathbf{z} = \text{prox}_{\lambda\|\cdot\|_{\mathbf{w};212}^2}(\mathbf{y})$ est donné coordonnée par coordonnée (i, k, t) par

$$z_{i,k,t} = y_{i,k,t} \left(1 - \frac{\lambda w_{i,k} \sum_{k'_i=1}^{K_i} [y_{i,k'_i}]}{1 + K_{\mathbf{w}_i} \lambda \|\mathbf{y}_{i,k,\bullet}\|_{\mathbf{w}_{i,k};2}} \right)^+.$$

avec $K_{\mathbf{w}_i} = \sum_{k'_i=1}^{K_i} w_{i,k'_i}^2$ et l'indice K_i est le nombre tel que

$$\lambda \sum_{k'_i=1}^{K_i} w_{i,k'_i}^2 (r_{i,k'_i} - r_{i,K_i}) < r_{i,K_i} \leq \lambda \sum_{k'_i=1}^{K_i+1} w_{i,k'_i}^2 (r_{i,k'_i} - r_{i,K_i})$$

Démonstration. On cherche :

$$\mathbf{z}^* = \arg \min_{\mathbf{z}} \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{w};212}^2,$$

avec

$$\|\mathbf{z}\|_{\mathbf{w};212}^2 = \sum_i \left(\sum_j \left(\sum_k w_{i,k} |z_{i,k,t}|^2 \right)^{1/2} \right)^2.$$

On dérive par rapport à $z_{i,k,t}$ et on obtient le système d'équations variationnelles :

$$|z_{i,k,t}| = |y_{i,k,t}| - \lambda w_{i,k} |z_{i,k,t}| (\sqrt{w_{i,k}} \|\mathbf{z}_{i,k}\|_2)^{-1} \|\mathbf{z}_i\|_{\mathbf{w};21} \\ \arg(z_{i,k,t}) = \arg(y_{i,k,t})$$

ce qui donne

$$|z_{i,k,t}| (1 + \lambda \sqrt{w_{i,k}} \|\mathbf{z}_{i,k}\|_2^{-1} \|\mathbf{z}_i\|_{\mathbf{w};21}) = |y_{i,k,t}| \quad (3) \\ |z_{i,k,t}|^2 (1 + \lambda \sqrt{w_{i,k}} \|\mathbf{z}_{i,k}\|_2^{-1} \|\mathbf{z}_i\|_{\mathbf{w};21})^2 = |y_{i,k,t}|^2$$

On somme sur k , et on obtient :

$$\|\mathbf{z}_{i,k}\|_{\mathbf{w}_{i,k};2} \left(1 + \lambda \sqrt{w_{i,k}} \|\mathbf{z}_{i,k}\|_{\mathbf{w}_{i,k};2}^{-1} \|\mathbf{z}_i\|_{\mathbf{w};21} \right) = \|\mathbf{y}_{i,k}\|_2 \\ \|\mathbf{z}_{i,k}\|_2 + \lambda \sqrt{w_{i,k}} \|\mathbf{z}_i\|_{\mathbf{w};2,1} = \|\mathbf{y}_{i,k}\|_2. \quad (4)$$

La solution de cette dernière équation est donnée par [3, théorème 3] (c'est exactement l'équation variationnelle obtenue pour l'Elistist-Lasso) :

$$\|\mathbf{z}_{i,k}\|_2 = \left(\|\mathbf{y}_{i,k}\|_2 - \frac{\lambda\sqrt{w_{i,k}}}{1 + J_{\mathbf{w}_i}} \|\mathbf{y}_i\| \right)^+ \quad (5)$$

où $\|\mathbf{y}_i\| = \sum_{j=1}^{J_i} \sqrt{w_{i,k}} \|\mathbf{y}_{i,k}\|_2$ avec les coefficients réordonnées comme il faut (voir [3, théorème 3]) et $J_{\mathbf{w}_i} = \sum_{i=1}^{J_i} w_{i,k}$.

On revient à (3) qu'on réécrit :

$$\begin{aligned} |z_{i,k,t}| &= \frac{|y_{i,k,t}|}{\left(1 + \lambda\sqrt{w_{i,k}} \|\mathbf{z}_{i,k}\|_2^{-1} \|\mathbf{z}_i\|_{\mathbf{w}_i;21}\right)} \\ &= \frac{|y_{i,k,t}| \|\mathbf{z}_{i,k}\|_2}{\left(\|\mathbf{z}_{i,k}\|_2 + \lambda\sqrt{w_{i,k}} \|\mathbf{z}_i\|_{\mathbf{w}_i;21}\right)} \end{aligned}$$

Mais si l'on utilise (4), on obtient simplement :

$$|z_{i,k,t}| = \frac{|y_{i,k,t}| \|\mathbf{z}_{i,k}\|_2}{\|\mathbf{y}_{i,k}\|_2}.$$

Et donc, en injectant (5) dans cette dernière équation on a

$$\begin{aligned} |z_{i,k,t}^*| &= \frac{|y_{i,k,t}| \left(\|\mathbf{y}_{i,k}\|_2 - \frac{\lambda\sqrt{w_{i,k}}}{1 + J_{\mathbf{w}_i}} \|\mathbf{y}_i\| \right)^+}{\|\mathbf{y}_{i,k}\|_2} \\ &= |y_{i,k,t}| \left(1 - \frac{\lambda\sqrt{w_{i,k}}}{1 + J_{\mathbf{w}_i}} \frac{\|\mathbf{y}_i\|}{\|\mathbf{y}_{i,k}\|_2} \right)^+. \end{aligned}$$

■

Il faut noter que l'opérateur proximal correspond à un seuillage. On utilise alors des algorithmes de type "seuillages itératifs", tels que ceux utilisés pour la pénalisation ℓ_1 par Daubechies *et al.* [2], et que nous étendons aux problèmes pénalisés par normes mixtes [3]. Ces algorithmes rentrent dans le cadre global des algorithmes proximaux étudiés récemment par Combettes et Wajs [1].

L'algorithme utilisé est le suivant :

Algorithme.

- Initialisation : Choisir $X^{(0)} \in \mathbb{R}^{I \times KT}$ (par exemple $\mathbf{0}$).
- Itérer :

$$X^{(t+1)} = \text{prox}_{\mu\lambda\|\cdot\|_{212}^2} \left(X^{(t)} + \mu G^T (M - GX^{(t)}) \right)$$

où $0 < \mu < \|G^T G\|^{-1}$.

- Stopper si $\|X^{(t+1)} - X^{(t)}\| / \|X^{(t)}\|$ est plus petit qu'un seuil de tolérance fixé.

Cet algorithme a l'avantage d'être simple à implémenter tout en permettant de minimiser une fonctionnelle convexe mais non différentiable (2). L'idée de la méthode est d'alterner la minimisation à la fois sur le terme d'attache aux données par des pas dans la direction du gradient, et sur le terme de pénalisation par recours à l'opérateur proximal. On pourra lui préférer une version, plus complexe, qui améliore fortement la vitesse de convergence par l'utilisation des schémas de Nesterov [7].

3 Résultats

3.1 Simulation

La stimulation somesthésique des doigts de la main génère une activité neuronale mesurable par M/EEG. À chaque doigt de la main correspond une zone fonctionnelle différente, zones qui sont de plus limitrophes au sein du cortex sensoriel primaire pour deux doigts contigus. Ces connaissances neuroanatomiques montrent que le cortex sensoriel primaire possède une structure que nous proposons d'utiliser comme *a priori* dans le problème inverse à l'aide d'une norme mixte $\ell_{\mathbf{w};212}$, qui pénalise le chevauchement entre deux régions corticales par une norme ℓ_1 .

Pour illustrer cela, on reproduit une partie de l'organisation du cortex sensoriel primaire (S1) [5]. On simule une activité sur trois régions corticales distinctes d'une aire similaire (voir la figure. 2a), qui peuvent correspondre à la localisation des zones sensorielles de trois doigts de la main droite. On a ensuite généré des mesures synthétiques bruité par un bruit blanc gaussien additif. L'amplitude d'activation de la région la plus temporelle (en rouge sur la figure 2), qui peut correspondre au pouce, est deux fois plus grande que les deux autres régions. En pratique, l'amplitude des sources est différente selon les conditions. On compare ensuite les résultats obtenus par l'utilisation de la norme mixte $\ell_{\mathbf{w};212}$ et d'une norme $\ell_{\mathbf{w};F}$ et qui correspondent respectivement aux problèmes (2) et (1). L'utilisation d'une norme ℓ_1 a aussi été prise en compte.

On évalue chaque méthode pour différents niveaux de bruit (donnés par le rapport signal à bruit (SNR)). Une fois le problème inverse calculé, le maximum d'amplitude d'une source à travers les conditions permet d'attribuer une source à une condition. La performance est mesurée en comptant le pourcentage de sources mal étiquetées (c'est-à-dire, attribuées à la mauvaise condition). La figure 1 montre le pourcentage d'erreur obtenu pour les trois pénalisations. On peut voir que la norme mixte $\|\cdot\|_{\mathbf{w};212}$ donne toujours les meilleurs résultats. La performance de la norme ℓ_1 chute rapidement lorsque le SNR diminue, ce qui est cohérent avec les précédentes observations faites par la communauté M/EEG.

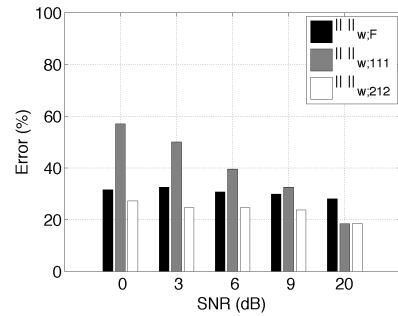


FIG. 1 – Évaluation des estimées par $\|\cdot\|_{\mathbf{w};F}$ vs. $\|\cdot\|_{\mathbf{w};212}$ vs. $\|\cdot\|_{\mathbf{w};111}$ sur des données somesthésiques synthétiques. L'erreur représente le pourcentage des dipôles mal identifiés.

Afin d’avoir une comparaison la plus juste possible, l’hyperparamètre λ a été ajusté dans chaque cas, de manière à ce que $\|M - GX^*\|_F$ soit égale à la norme du bruit ajouté (qui est connu dans les simulations).

Les résultats sont aussi illustrés sur les figures 2b et 2c sur une région d’intérêt (RI) autour du cortex somatosensoriel primaire gauche. On peut voir que l’étendue de la région la plus temporelle obtenue avec la pénalité $\|\cdot\|_{w;F}$, est largement surestimée, contrairement aux résultats relativement précis obtenus avec la pénalité $\|\cdot\|_{w;212}$.

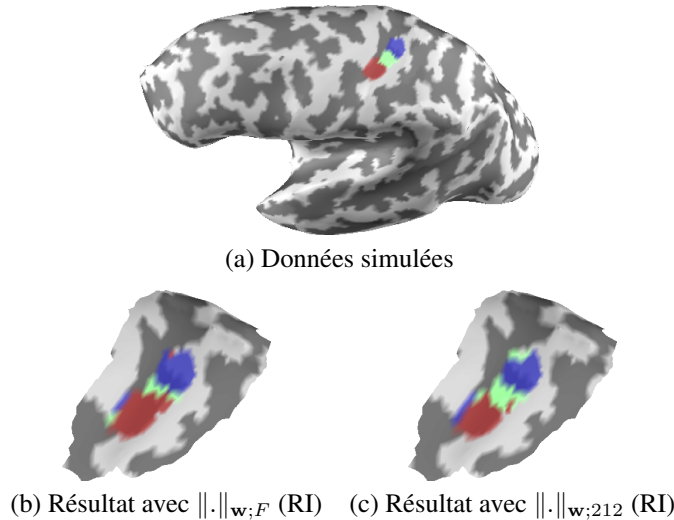


FIG. 2 – Illustration des résultats sur le cortex sensoriel primaire (S1) (SNR = 20dB). Les régions actives voisines reproduisent l’organisation de S1.

3.2 Données réelles

Les données ont été enregistrées avec une fréquence de 1250 Hz sur une machine MEG ayant 151 capteurs. Les doigts ont été stimulés électriquement de façon aléatoire. Les données ont été obtenues par moyennage de 400 répétitions. Le problème direct a été calculé avec un modèle sphérique et un maillage cortical contenant environ 55000 sources afin de permettre une bonne précision spatiale. Le problème inverse a été calculé sur une fenêtre de temps de 5 ms environ 45 ms après stimulation, ce qui correspond à la période d’activité maximale. Les colonnes $G_{\cdot i}$ de G n’étant pas normalisées, les poids sont donnés par $w_{i,k} = \|G_{\cdot i}\|_2$.

Une fois le problème inverse calculé, la labélisation des zones actives a été faite en attribuant à chaque source le label correspondant à la condition pour laquelle l’activité reconstruite était la plus grande. Sont représentés sur la figure 3 les résultats obtenus à la fois pour la norme classique $\|\cdot\|_{w;F}$ et pour $\|\cdot\|_{w;212}$. Afin de rendre la comparaison équitable le paramètre λ a été choisi pour chaque norme afin d’obtenir à l’optimum un même terme d’attache aux données ayant été estimé sur une période de repos précédant la stimulation. Pour chaque condition, la région active a été délimitée par calcul de la plus grande compo-

sante connexe. On constate qu’en injectant l’a priori structuré à l’aide de la norme $\ell_{w;212}$ l’organisation du cortex sensoriel primaire est correctement retrouvée alors que la norme classiquement utilisée en M/EEG échoue en surestimant l’étendue de la zone active pour le deuxième doigt (l’index).

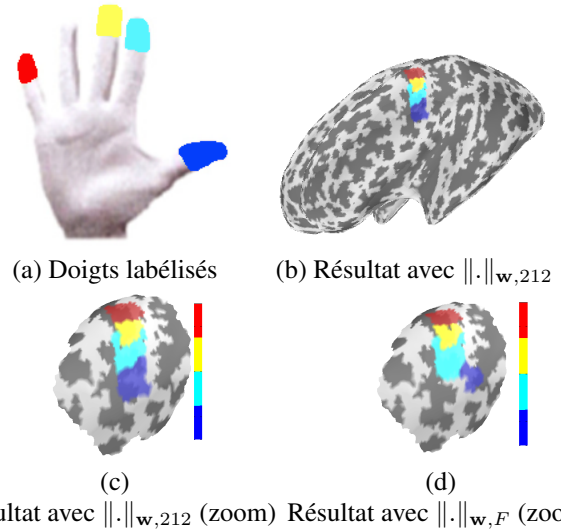


FIG. 3 – Résultats de labélisation du cortex sensoriel primaire par l’utilisation d’une norme mixte $\ell_{w;212}$ sur des données de MEG.

Références

- [1] P. L. Combettes and V. R. Wajs. Signal recovery by proximal forward-backward splitting. *Multiscale Modeling and Simulation*, 4(4) :1168–1200, Nov. 2005.
- [2] I. Daubechies, M. Defrise, and C. De Mol. An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint. *Commun. Pure Appl. Math.*, 57(11) :1413 – 1457, Aug 2004.
- [3] M. Kowalski. Sparse regression using mixed norms. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 2009. Doi : 10.1016/j.acha.2009.05.006.
- [4] M. Kowalski and B. Torrèsani. Sparsity and persistence : mixed norms provide simple signals models with dependent coefficients. *Sig Imag Video Process*, 2008. Doi :10.1007/s11760-008-0076-1.
- [5] W. Penfield and T. Rasmussen. *The Cerebral Cortex of Man : A Clinical Study of Localization of Function*. Macmillan, 1950.
- [6] E. Vincent, R. Gribonval, and M. Pumbley. Oracle estimators for the benchmarking of source separation algorithms. *Sig. Process.*, 87(8) :1933 – 1950, Aug 2007.
- [7] P. Weiss. *Algorithmes rapides d’optimisation convexe. Applications à la reconstruction d’images et à la détection de changements*. PhD thesis, Université de Nice Sophia-Antipolis, Novembre 2008.