Intégration de relations spatiales floues dans un filtre particulaire pour le suivi d'objets

Nicolas WIDYNSKI^{1,2}, Séverine DUBUISSON¹, Isabelle BLOCH²

¹UPMC - LIP6, Paris, France

²Télécom ParisTech, CNRS UMR 5141 LTCI, Paris, France

Nicolas.Widynski@enst.fr, Severine.Dubuisson@lip6.fr, Isabelle.Bloch@enst.fr

Résumé – Dans cet article, nous proposons une méthode novatrice pour introduire des informations spatiales structurelles dans les filtres particulaires. Cette information, caractérisée par des relations spatiales telles que l'orientation ou la distance, est modélisée par des ensembles flous, et est introduite dans la dynamique dans le but de modéliser les changements potentiels d'un instant à un autre. La modélisation floue introduit de la fexibilité à la fois dans la sémantique des relations et dans les transitions d'une relation à une autre. Cela permet de prendre en compte les situations dans lesquelles un objet change brusquement de direction. Les tests réalisés sur des données synthétiques avec des dynamiques complexes montrent que notre approche suit efficacement les objets, et fournit de meilleurs résultats que plusieurs techniques de filtrage classiques en utilisant peu de particules.

Abstract – In this paper, we propose a novel method to introduce structural spatial information in particle filters. This information, expressed as spatial relations such as orientation and distance, is modeled in a fuzzy set framework, and is introduced in the dynamics in order to model the potential changes from one instant to the next one. The fuzzy modeling provides flexibility both in the semantics of the relations and in the transitions from one relation to another one. This allows taking into account situations where a tracked object changes its direction in a quite abrupt way. Tests on synthetic data show that our approach efficiently tracks objects with complex dynamics, and outperforms several classical filtering techniques while using only a small number of particles.

1 Introduction

Le suivi d'objets dans des séquences vidéo a été largement abordé dans la littérature, selon des approches variées. Le filtrage particulaire est de plus en plus utilisé dans ce domaine, et c'est dans ce contexte que nous nous plaçons ici. Une des difficultés est que la dynamique des objets à suivre est en général inconnue. Ainsi en pratique, l'utilisation classique d'une dynamique basique conduit souvent à des erreurs de suivi. Afin de générer des particules mieux placées, plusieurs approches ont été proposées. La fonction d'importance optimale garantit une variance des poids minimale, sous l'hypothèse que le système est linéaire ou partiellement linéaire [2]. Une autre approche classique consiste à générer les particules selon une distribution d'importance adéquate. Le filtre particulaire auxiliaire [3] en est un exemple connu, et utilise les observations courantes pour sélectionner les particules qui sont les plus susceptibles d'être dans une zone de forte vraisemblance.

Dans cet article, nous proposons de définir une fonction d'importance originale, en considérant également une information structurelle. Ce type d'information est d'une importance capitale en analyse d'images, et n'a pas été utilisé, à notre connaissance, dans le filtre particulaire. Cette modélisation nous permet, pendant la phase prédictive, de considérer la trajectoire des paramètres dynamiques ainsi que la nouvelle observation, dans le but de générer des particules proches des zones de forte vraisemblance tout en étant robuste face aux valeurs aberrantes.

Nous décrirons dans la section 2 la modélisation des relations spatiales floues, et son introduction dans les filtres particulaires sera détaillée dans la section 3. Enfin, des résultats préliminaires sont illustrés dans la section 4, présentant des améliorations face aux erreurs obtenues avec un filtre particulaire classique (SIR, [2]) et un filtre particulaire auxiliaire [3].

2 Modélisation des relations spatiales

Nous considérons ici les relations de distance et d'orientation, mais l'approche proposée est générique et peut facilement être adaptée à d'autres types de relations. Chaque relation est considérée comme une variable linguisitique, prenant un faible nombre de valeurs linguistiques [4]. La granularité de cette représentation peut être définie en fonction de l'application. La sémantique de chacune des valeurs est donnée par un ensemble flou sur le domaine de la variable ($[-\pi, \pi]$ pour les orientations, \mathbb{R}^+ pour les distances).

Pour l'orientation, nous considérons ici huit valeurs linguistiques : *est, nord-est, nord, nord-ouest, ouest, sud-ouest, sud, sud-est.* La sémantique de chaque valeur est donnée par une fonction d'appartenance trapézoïdale, sur l'axe des angles. L'ensemble des fonctions d'appartenance forme une partition



FIG. 1 – Relations spatiales floues (a) *nord-est* et (b) \dot{a} *moyenne distance*.

floue de $[-\pi, \pi]$. La superposition entre fonctions d'appartenance est un paramètre de notre méthode. Nous supposons ici que seulement deux relations successives peuvent se superposer (par exemple, *nord* et *nord-est*). De même, pour les distances, trois valeurs sont considérées : *proche, moyenne*, et *loin*. Cette sémantique est traduite par des fonctions d'appartenance trapézoïdales formant une partition sur \mathbb{R}^+ . En utilisant des coordonnées polaires, ces relations peuvent être représentées dans le domaine spatial [1] (figure 1).

Afin de prendre en compte ces relations non seulement dans les états du filtre particulaire mais aussi dans la dynamique, nous proposons de modéliser les changements d'état en privilégiant le même état (celui-ci étant défini de manière souple et pas réduit à une valeur précise) et, dans une moindre mesure, le changement vers un état voisin (par exemple de *nord* à *nord-est* pour des orientations). Cette idée est applicable par exemple au cas d'objets qui peuvent changer de direction, mais avec une relative continuité. Nous proposons de calculer automatiquement les probabilités de transition markovienne pour chacun des concepts flous selon :

$$p(c_t^m = i | c_{t-1}^m = k) = \frac{\int_{\mathbf{\Theta}^m} \max[\top(f_m^i(\theta^m), f_m^k(\theta^m)), \varepsilon] \, d\theta^m}{\sum_{j=1}^{N_{c^m}} \int_{\mathbf{\Theta}^m} \max[\top(f_m^j(\theta^m), f_m^k(\theta^m)), \varepsilon] \, d\theta^m}$$
(1)

où c_t^m désigne la valeur linguistique d'une des relations m à l'instant t, \top est une t-norme (une conjonction floue), f_i^m la fonction en trapèze définissant la valeur i de la relation m, et ε est une faible valeur fixée. Lorsque les trapèzes sont définis de sorte qu'au plus deux se recouvrent, pour deux relations voisines, alors les transitions pour des relations non voisines sont nulles si $\varepsilon = 0$. La matrice de transition est tridiagonale dans de tels cas. Dans le but d'autoriser des transitions vers n'importe quel état, même un état non voisin, avec une faible probabilité, le paramètre ε est introduit, et permet de fixer une valeur minimale de transition afin de faciliter le suivi lors de changements brusques de trajectoire. Ce modèle permet ainsi de ne pas définir de seuil sur les relations et les transitions et introduit des transitions graduelles entre les valeurs des relations.

3 Introduction des relations spatiales dans un filtre particulaire

L'idée est d'introduire dans la prédiction le fait qu'un objet va en général poursuivre sa trajectoire selon les mêmes relations spatiales qu'aux temps précédents (à l'imprécision sur ces relations près), avec des évolutions possibles vers des états voisins des relations. L'introduction de cette information structurelle est un aspect novateur du modèle proposé, ce que nous détaillons maintenant.

Considérons le problème de filtrage et notons $x_t \in \mathcal{X}$ le processus d'état et $y_t \in \mathcal{Y}$ le processus de mesure. Afin d'intégrer les relations spatiales floues dans un filtre particulaire, nous proposons de modéliser les paramètres dynamiques de x_t par le vecteur $\Theta_t \in \Theta$. L'évolution de x_t est donc liée à une fonction de transition non linéaire $g_t(x_{t-1}, \Theta_t, v_t), v_t$ étant un bruit blanc. Remarquons que les paramètres dynamiques utilisés sont ceux à l'instant t. Le vecteur Θ_t est composé de Mcomposantes indépendantes, soit $\Theta_t = (\theta_t^1, \ldots, \theta_t^M)$. Contrairement au choix classique de modéliser la dynamique des paramètres par une marche aléatoire simple, nous considérons les paramètres Θ_t et Θ_{t-1} conditionnellement indépendants sachant c_t . Ainsi, nous n'avons pas besoin de modéliser la transition a priori $p(\Theta_t | \Theta_{t-1})$.

L'originalité de notre approche est double :

- la dynamique de x_t dépend d'un vecteur $\Theta_t = (\theta_t^1, \ldots, \theta_t^M)$, dans lequel chaque paramètre $\theta_t^m, m = 1, \ldots, M$, appartient à un ensemble flou caractérisé par une fonction d'appartenance $f_m^k : \Theta^m \to [0, 1]$;
- pour l'étape de prédiction, nous proposons une fonction d'importance pour échantillonner les indices des ensembles flous, qui dépend de la trajectoire ainsi que de la nouvelle observation.

Dans le but d'estimer à quel ensemble flou θ_t^m appartient, nous proposons d'intégrer dans le filtre particulaire l'estimation du vecteur $c_t = (c_t^1, ..., c_t^M)$, en considérant que ses composantes sont indépendantes entre elles. La loi de transition *a priori* de c^m est décrite par l'équation 1.

Les fonctions $(f_m^k)^{k=1...N_{c^m}}$, où N_{c^m} correspond au nombre de valeurs discrètes possibles pour c_t^m , sont construites telles que $p(c_t^m = i|\theta^m) \triangleq f_m^i(\theta^m)$. Ce changement de sémantique des fonctions d'appartenance vers des probabilités conditionnelles recquiert la contrainte de normalisation suivante :

$$\forall \theta^m \in \mathbf{\Theta}^m, \ \sum_{k=1}^{N_c m} f_m^k(\theta^m) = 1 \tag{2}$$

Afin de faciliter l'introduction de relations spatiales dans un filtre particulaire, nous faisons également les hypothèses suivantes :

i) $p(\theta_t^m)$ suit une distribution uniforme sur le support borné Θ^m ;

ii)
$$\forall m \in \{1, \dots, M\}, \forall (i, j) \in \{1, \dots, N_{c^m}\}^2,$$

$$\int_{\Theta^m} f_m^i(\theta^m) \, d\theta^m = \int_{\Theta^m} f_m^j(\theta^m) \, d\theta^m$$

Ainsi, par i), ii) et l'équation 2, nous pouvons en déduire que $p(c_t^m = i)$ est caractérisée par une distribution discrète uniforme. De plus, nous avons les propriétés suivantes : $E[c_t|c_{t-1}] = c_{t-1}$ et $E[\Theta_t|\Theta_{t-1}] = \Theta_{t-1}$. Ces hypothèses semblent raisonnables dans la mesure où elles sont cohérentes avec celles généralement formulées dans les modèles classiques (notamment, la dynamique de marche aléatoire pour Θ_t). Soit l'algorithme de filtre particulaire suivant :

- **Initialisation :** Pour n = 1, ..., N, générer $\tilde{c}_0^{(n)} \sim q_0(c_0)$; $\tilde{\Theta}_0^{(n)} \sim p_0(\Theta_0|\tilde{c}_0^{(n)}); \tilde{x}_0^{(n)} \sim q_0(x_0)$, et poser $w_0^{(n)} = \frac{p(y_0|\tilde{x}_0^{(n)}, \tilde{c}_0^{(n)})p_0(\tilde{x}_0^{(n)})p_0(\tilde{c}_0^{(n)})}{q_0(\tilde{c}_0^{(n)})q_0(\tilde{x}_0^{(n)})}$. **Pour** t = 1, 2, ...:
 - 1) Propagation des particules. Pour n = 1, ..., N: $\begin{array}{l} \text{i) générer } \tilde{c}_{t}^{(n)} \sim q(c_{t}|c_{k:t-1}^{(n)}, \Theta_{t-1}^{(n)}, x_{t-1}^{(n)}, y_{t}) \ (\text{Eq. 3}) \ ; \\ \text{ii) générer } \tilde{\Theta}_{t}^{(n)} \sim p(\Theta_{t}|\tilde{c}_{t}^{(n)}) \ (\text{Eq. 5}) \ ; \\ \text{iii) générer } \tilde{x}_{t}^{(n)} \sim q(x_{t}|x_{t-1}^{(n)}, \tilde{\Theta}_{t}^{(n)}). \end{array}$
 - 2) Mise à jour des poids. Pour n = 1, ..., N:

$$\tilde{w}_{t}^{(n)} = w_{t-1}^{(n)} \frac{p(y_{t}|\tilde{x}_{t}^{(n)}, \tilde{c}_{t}^{(n)}) p(\tilde{x}_{t}^{(n)}|x_{t-1}^{(n)}, \tilde{\Theta}_{t}^{(n)}) p(\tilde{c}_{t}^{(n)}|c_{t-1}^{(n)})}{q(\tilde{x}_{t}^{(n)}|x_{t-1}^{(n)}, \tilde{\Theta}_{t}^{(n)}) q(\tilde{c}_{t}^{(n)}|c_{k:t-1}^{(n)}, \Theta_{t-1}^{(n)}, x_{t-1}^{(n)}, y_{t})}$$

3) Normalisation des poids. Pour n = 1, ..., N:

$$w_t^{(n)} = \frac{\tilde{w}_t^{(n)}}{\sum_{m=1}^N \tilde{w}_t^{(m)}}$$

4) Rééchantillonnage si nécessaire.

Un des enjeux de notre approche consiste à définir une fonction d'importance pertinente à partir des intervalles flous contenant les paramètres dynamiques de notre modèle. Cette distribution intègre la trajectoire $c_{k:t-1}$, l'information a priori et la dernière observation y_t . L'utilisation de la trajectoire permet de gérer certaines ambiguïtés locales en utilisant une information globale, tout en maintenant plusieurs hypothèses dans le temps. La distribution d'importance est la suivante :

(3) Nous considérons ensuite les probabilités *a priori* $\pi_m^i = a^m = a^m$ $p(c_t^m = i)$ comme étant une réalisation du vecteur aléatoire $\Pi_m = (\Pi_m^1, \dots, \Pi_m^{N_{c^m}})$ à valeur dans $[0, 1]^{N_{c^m}}$ tel que $\sum_{i=1}^{N_{c^m}} \Pi_m^i = 1$. Dans le but de pouvoir simuler des échantillons selon $q(c_t^m = i | c_{k:t-1}^{m,(n)}, \Theta_{t-1}^{(n)}, x_{t-1}^{m,(n)}, y_t)$, les probabilités $\pi_m = (\pi_m^1, \dots, \pi_m^{N_c m})$ sont générées selon la fonction d'importance décrite dans l'équation 4, où $nb^i(a_{t_1:t_2}) =$ $|\{a_j; a_j = i, j = t_1, ..., t_2\}|$ (|.] étant la cardinalité). Les paramètres α^i encodent le degré d'importance des modes c_t^m et contrôlent ainsi la forme globale de la loi a priori de Dirichlet \mathcal{D} . La distribution multinomiale \mathcal{M} intègre les t - 1 - kdernières réalisations de $c^{m,(n)}$, ce qui conduit à une loi de Dirichlet a posteriori qui prend à la fois en compte la trajectoire de c_t et les nouvelles probabilités *a priori* des modes. Nous considérons ensuite la décomposition de la loi de mélange $q(c_t^m = i | \Theta_{t-1}^{(n)}, x_{t-1}^{(n)}, y_t)$ ci-dessous :

$$\begin{split} q(c_t^m = i | \Theta_{t-1}^{(n)}, x_{t-1}^{(n)}, y_t) &= \beta^1 p(c_t^m = i | \theta_{t-1}^{m,(n)}) \\ &+ \beta^2 p(c_t^m = i | x_{t-1}^{(n)}, \Theta_{t-1}^{(n)}, y_t) \\ &+ \beta^3 p(c_t^m = i) \end{split}$$

où $\sum_{i=1}^{3} \beta^{i} = 1$, $p(c_{t}^{m} = i)$ est la loi *a priori* uniforme de c^{m} , et $p(c_{t}^{m} = i | \theta_{t-1}^{m,(n)}) = f_{m}^{i}(\theta_{t-1}^{m,(n)})$ est la probabilité *a posteriori* que $\theta_{t-1}^{m,(n)}$ appartienne au $i^{\text{ième}}$ ensemble flou représentant une valeur du $m^{i \acute{e}me}$ concept flou.

Enfin nous proposons de faire l'approximation suivante :

$$p(c_t^m = i | x_{t-1}^{(n)}, \Theta_{t-1}^{(n)}, y_t) \simeq \frac{p(y_t | g_t(x_{t-1}^{(n)}, \bar{\Theta}_{t|t-1}^{m_i, (n)}, v_t))}{\sum_{j=1}^{N_{cm}} p(y_t | g_t(x_{t-1}^{(n)}, \bar{\Theta}_{t|t-1}^{m_j, (n)}, v_t))}$$

où $\bar{\Theta}_{t|t-1}^{m_i, (n)} = (\theta_{t-1}^{1, (n)}, \dots, \theta_{t-1}^{m-1, (n)}, \bar{\theta}_t^{m_i}, \theta_{t-1}^{m+1, (n)}, \dots, \theta_{t-1}^{M, (n)})$
désigne une valeur candidate du paramètre $\Theta_{t|t-1}$, et $\bar{\theta}_t^{m_i}$
est une caractéristique de la fonction floue f_m^i , comme par
exemple sa valeur moyenne. Notons que cette approxima-
tion est valide sous l'hypothèse précédemment mentionnée
 $E[\Theta_t | \Theta_{t-1}] = \Theta_{t-1}.$

Une fois les indices des ensembles flous simulés (équation 3), la dernière étape consiste à générer les paramètres du modèle. Sous l'hypothèse d'indépendance, nous avons :

$$p(\Theta_t | \tilde{c}_t^{(n)}) = \prod_{m=1}^M \frac{f_m^{\tilde{c}_t^{m,(n)}}(\theta_t^m)}{\int f_m^{\tilde{c}_t^{m,(n)}}(\theta_t'^m) \, d\theta_t'^m}$$
(5)

Ici nous supposons pouvoir générer des échantillons proportionnellement à $f_m^{\tilde{c}_t^{m,(n)}}(\theta_t^m)$.

Résultats sur des données simulées 4

Nous considérons ici un exemple synthétique de suivi, où un objet est défini par le vecteur d'état $x_t = (x_t, y_t)$ de ses coordonées spatiales, ainsi que par ses paramètres dynamiques exprimés en coordonnées polaires $\Theta_t = (\varphi_t, r_t)$. Soient $c_t^1 \in \{E, NE, N, NO, O, SO, S, SE\}$ et $c_t^2 \in$ {proche, à moyenne distance, loin} les valeurs des variables linguistiques. Nous considérons le système suivant :

$$g_t(x_{t-1}, \Theta_t, v_t) = \begin{pmatrix} x_{t-1} + \Delta t \ r_t \cos(\varphi_t) + v_t^1 \\ y_{t-1} + \Delta t \ r_t \sin(\varphi_t) + v_t^2 \end{pmatrix}$$

$$h_t(x_t, w_t) = x_t + w_t$$

$$v_t^1, v_t^2 \sim \mathcal{N}(0, 4)$$

$$w_t \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\right)$$
(6)

La simulation des paramètres dynamiques θ_t^m recquiert de savoir générer des échantillons proportionnellement à $f_m^{\tilde{c}_t^{m,(n)}}(\theta_t^m)$ (équation 5). En considérant des fonctions d'appartenance trapézoïdales, donc linéaires par morceaux, une simulation par simple inversion de la fonction de répartition est possible. Enfin, les particules du vecteur d'état sont générées selon la distribution *a priori* $p(x_t | x_{t-1}^{(n)}, \tilde{\Theta}_t^{(n)})$.

Afin d'illustrer le potentiel de notre approche, une trajectoire arbitraire d'un objet ponctuel a été simulée. Les observations sont générées à partir de cette trajectoire et selon le processus de mesure décrit dans l'équation 6. La figure 2 (a) compare les trajectoires obtenues pour une observation donnée. La trajectoire obtenue par la méthode proposée est comparée à celles

$$\pi_{m} \sim q(\Pi_{m}|c_{k:t-1}^{m,(n)}, \Theta_{t-1}^{(n)}, x_{t-1}^{(n)}, y_{t}) \propto q(c_{k:t-1}^{m,(n)}|\Pi_{m}) q(\Pi_{m}|\Theta_{t-1}^{(n)}, x_{t-1}^{(n)}, y_{t})$$

$$= \mathcal{M}\left(\mathsf{nb}^{1}(c_{k:t-1}^{m,(n)}), \dots, \mathsf{nb}^{N_{c}m}(c_{k:t-1}^{m,(n)})\right) \times \mathcal{D}\left(\Pi_{m}; \left\{1 + \alpha^{i}q(c_{t}^{m} = i|\Theta_{t-1}^{(n)}, x_{t-1}^{(n)}, y_{t})\right\}_{i=1..N_{c}m}\right)$$

$$= \mathcal{D}\left(\Pi_{m}; \left\{1 + \alpha^{i}q(c_{t}^{m} = i|\Theta_{t-1}^{(n)}, x_{t-1}^{(n)}, y_{t}) + \mathsf{nb}^{i}(c_{k:t-1}^{m,(n)})\right\}_{i=1..N_{c}m}\right)$$
(4)

obtenues par un filtre SIR et un filtre particulaire auxiliaire (FPA). Nous avons utilisé pour ces deux filtres une dynamique des paramètres de marche aléatoire, avec des variances de bruit fixées à $\sigma_{r_t} = 6$ et $\sigma_{\varphi_t} = 1$. À chaque instant, l'état estimé correspond à l'espérance de x_t^n . Les erreurs de ces positions moyennes sont illustrées sur la figure 2 (b). Le tableau 1 fournit l'erreur moyenne quadratique du suivi obtenu avec notre méthode, le filtre SIR, et le FPA, en considérant un nombre croissant de particules, et en moyennant les résultats obtenus avec 100 simulations d'observations. Pour le modèle proposé, nous avons utilisé $\beta^1 = 0.2$, $\beta^2 = 0.7$ et $\beta^3 = 0.1$, afin d'attirer les particules vers les zones de forte vraisemblance. Nous avons en outre fixé $\varepsilon = 0.1$ afin d'autoriser avec une faible probabilité des sauts conséquents pour la loi de transition des indices des fonctions floues. Des tests supplémentaires ont été menés en utilisant des formes de fonctions d'appartenance différentes, en allant des fonctions indicatrices binaires aux fonctions d'appartenance triangulaires. Dans tous nos tests, la dissimilarité des erreurs obtenues en utilisant différentes formes n'a pas été significative. Notons que la méthode proposée a pour principal avantage d'introduire une fonction d'importance pertinente, ce qui explique la convergence des filtres lorsque le nombre de particules est élevé. Cependant, avec un faible nombre de particules, l'approche fournit de manière notable de meilleurs résultats. Enfin, l'introduction d'une nouvelle information induit un coût additionnel par particule, qui est néanmoins partiellement compensé par le faible nombre de particules nécessaires dans le but d'obtenir une erreur moyenne quadratique acceptable.

Modèle	Erreur moyenne quadratique					
	5	20	50	100	500	2000
Modèle proposé	10.4	7.5	7.0	6.8	6.5	6.3
SIR	33.8	11.0	7.6	7.1	6.8	6.5
FPA	29.4	9.6	7.7	7.4	7.2	6.8

TAB. 1 – Erreur moyenne quadratique obtenue en considérant 100 simulations du processus d'observation, en utilisant N = 5, 20, 50, 100, 500 ou 2000 particules.

5 Conclusion

Nous avons proposé dans cet article une approche originale d'intégration des relations spatiales floues dans les filtres particulaires. Cela est géré de manière efficace en utilisant une fonction d'importance qui dépend de la trajectoire des ensembles flous ainsi que de la nouvelle observation, ce qui permet de mieux appréhender les valeurs aberrantes tout en attirant les



FIG. 2 – (a) Comparaison des trajectoires de suivi obtenues avec N = 20 particules. (b) Erreurs associées.

particules vers des zones de forte vraisemblance. Les expériences réalisées montrent que la méthode proposée obtient de meilleurs résultats que le filtre SIR ou l'APF, spécialement lorsque le nombre de particule est faible. La méthode présentée dans cet article étant suffisamment générique, nos travaux actuels concernent l'adaptation du modèle à d'autres problématiques en suivi, ainsi qu'à la généralisation de l'intégration des concepts flous dans le filtre particulaire.

Références

- I. Bloch. Fuzzy spatial relationships for image processing and interpretation : a review. Image and Vision Computing. 23(2) : 89-110, 2005. 2
- [2] A. Doucet, S. Godsill and C. Andrieu. On Sequential Monte Carlo Sampling Methods for Bayesian Filtering. Statistics and Computing, 10, 2000. 1
- [3] M.K. Pitt and N. Shepard. *Filtering via Simulation : Auxiliary Particle Filters* Journal of the American Statistical Association, 94(446) : 590-599, 1999. 1
- [4] L.A. Zadeh. The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning Information Sciences, 8: 199-249, 1975.