

# Estimation rapide des paramètres d'un signal à phase polynomiale

Olivier FOURT<sup>1</sup>, Messaoud BENIDIR<sup>2</sup>

<sup>1</sup>IRFU CEA Bâtiment 709 - Orme des Merisiers, 91191 Gif-sur-Yvette France

<sup>2</sup>Laboratoire des Signaux et Systèmes, Supélec, Université Paris-Sud  
3 rue Joliot-Curie 91190 Gif-sur-Yvette France

olivier.fourt@cea.fr, Messaoud.Benidir@lss.supelec.fr

**Résumé** – Les signaux à phase polynomiale forment une vaste classe de signaux non stationnaires utilisés entre autres pour la modélisation. Dans cet article, nous tirons partie de progrès en estimation robuste pour réaliser un algorithme pour l'estimation des paramètres d'un signal à phase polynomiale. Cet algorithme présente les avantages d'être rapide et d'avoir une structure robuste à la nature du bruit.

**Abstract** – Polynomial phase signals belong to a wide class of non-stationary signals used for modeling and engineering applications. In this paper, we take benefits of some advances in robust estimation in order to propose a new algorithm for estimating the parameters of a polynomial phase signal. The advantages of this algorithm are being fast and being robust to the shape of the noise.

## 1 Introduction

Les Signaux à Phase Polynomiale (SPP) constituent une classe de signaux largement utilisée pour modéliser des signaux réels, ils servent par exemple à approximer les signaux Doppler. De nombreuses méthodes ont été proposées pour estimer leurs paramètres [1]. Les algorithmes MUSIC [2] [3] peuvent être facilement adaptés pour cette tâche d'estimation [4]. Un autre algorithme est PHAF [5], amélioration de HAF pour les signaux multi-composantes et dotée un meilleur seuil d'utilisation face au bruit [6] [16]. Ces méthodes ont de bonnes performances en précision mais sont souvent restreintes à des environnements gaussiens, parfois sont sous-optimales [1] et peuvent être très coûteuses en temps de calculs, en particulier MUSIC. Nous nous sommes limités à des SPP d'ordre  $p$  à valeurs réelles et d'amplitude constante définis par :

$$s(t) = \alpha \cos \left( \sum_{k=0}^p \beta_k t^k \right) \quad \alpha \in \mathbb{R}^+, \beta_k \in \mathbb{R} \quad k = 0 \dots p \quad (1)$$

La méthode développée dans cet article est basée sur la mise en commun de plusieurs algorithmes existant et sur l'utilisation de la fréquence instantanée du signal. L'estimation de la fréquence instantanée est une tâche classique et ancienne qui peut souffrir d'erreurs grossières avec en conséquence la mauvaise précision de beaucoup d'algorithmes rapides – des erreurs relatives de l'ordre de  $10^{-1}$  – et voient leur utilisation limitée à l'estimation d'ordres de grandeurs sur des paramètres. Le point clé de notre méthode est d'utiliser un algorithme d'estimation robuste pour réaliser une régression polynomiale robuste sur la fréquence instantanée avec un M-estimateur. Les simulations ont montré que notre algorithme est rapide et robuste à la nature du bruit (gaussien ou impulsif) sans aucune modification et avec une précision améliorée même si inférieure aux algorithmes les plus précis, lents et dépendant du type de bruit. Ses inconvénients sont un seuil d'utilisation en SNR élevé et sa précision modeste. Nous ne fournissons que des résultats empiriques avec plusieurs tableaux. Pour modéliser le bruit impulsif, nous employons des variables aléatoires suivant des lois  $\alpha$ -stable [7]  $S_\alpha(\beta, \gamma, \mu)$  avec  $\gamma$  coefficient de dispersion et restreints aux cas symétriques et centrés ( $\beta = \mu = 0$ ). La définition du SNR n'est pas valide avec un bruit  $\alpha$ -stable (variance infinie) nous utilisons à la place le GSNR (Generalize Signal to Noise Ratio) défini dans [7] pour un bruit  $\alpha$ -stable par :

$$\text{GSNR} = 10 \log \left( \frac{1}{2N\gamma} \sum_{k=0}^N |x(k)|^2 \right) \quad (2)$$

Dans les résultats, seul le SNR est indiqué mais dans les situations avec le bruit impulsif, c'est en fait le GSNR qui est calculé. Cet article comporte 5 parties.

La deuxième partie regroupe des rappels sur les paramètres instantané et des définitions de variables utilisées. La troisième partie est consacrée à l'algorithme d'estimation de l'amplitude. La quatrième s'occupe de l'estimation des paramètres de phase. La cinquième et dernière partie présente les simulations et les résultats.

## 2 Estimation des paramètres d'un SPP : définitions et suppositions

$$\begin{aligned} x(t) &= s(t) + b(t) && \text{signal bruité} \\ s(t) &= A \cos \left( \sum_{k=0}^p \beta_k t^k \right) && A \in \mathbb{R}^+, \beta_k \in \mathbb{R}, k = 0, \dots, p \\ b(t) &&& \text{bruit indépendant, identiquement distribué} \end{aligned}$$

Nous travaillons avec les signaux échantillonnés :  $x(n/f_s)$ ,  $n = 1, \dots, N$  où  $f_s$  est la fréquence d'échantillonnage. La définition de la fréquence instantanée d'un signal  $s(t)$  peut prendre plusieurs formes [8]. L'une des plus courantes est celle obtenue à partir du signal analytique  $z(t)$  associé au signal réel  $s(t)$  :

$$z(t) = a(t) \exp \left( i\phi(t) \right) = s(t) + iH[s(t)]$$

$H[\cdot]$  est la transformé de Hilbert

$a(t)$  and  $\phi(t)$  sont respectivement l'amplitude et la phase instantanée du signal  $z(t)$ . La fréquence instantanée du signal  $s(t)$  est alors donnée par l'expression suivante :

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{dt} \quad (3)$$

La fréquence instantanée est souvent impossible à déterminer de manière explicite. Pour un SPP  $s(t)$  d'ordre  $p$ , nous appelons fréquence instantanée la fonction suivante :

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^p k\beta_k t^{k-1} \quad (4)$$

Pourvu que l'on obtienne une estimation suffisamment précise de  $f_i(t)$ , ces paramètres peuvent donc être calculés au moyen d'une régression linéaire polynomiale. Le choix de simulations avec du bruit impulsif nécessite l'emploi de statistiques robustes. Au lieu d'utiliser la variance, nous avons employé la distance interquartile. Pour une variable aléatoire  $V$  avec une loi de probabilité

$P(V)$  on définit :

$$\begin{aligned} Q_1 &= v/P(V \leq v) \geq 0.25 \text{ et } P(V \geq v) \geq 0.75 \text{ 1}^{er} \text{ quartile} \\ Q_3 &= v/P(V \leq v) \geq 0.75 \text{ et } P(V \geq v) \geq 0.25 \text{ 3}^{ème} \text{ quartile} \\ iqr &= |Q_3 - Q_1| \text{ distance interquartile} \end{aligned} \quad (5)$$

### 3 Estimation de l'amplitude

L'amplitude instantanée du signal  $z(t)$  est en théorie l'amplitude du SPP à estimer. Celle-ci est supposée entachée d'une erreur  $a(t) = A + e(t)$ , nous réalisons donc l'estimation  $\hat{A}$  de l'amplitude en deux étapes :

- Estimation de l'amplitude instantanée :  
 $a(n) = |z(n/f_s)| \quad n = 1 \dots N$
- Sélection robuste de l'amplitude :  $\hat{A} = \text{median}(a(n))$

## 4 Estimation des paramètres de la phase

Les considérations sur la fréquence instantanée des SPP nous amènent donc à proposer comme nouvelle méthode d'estimation des paramètres de phase l'algorithme en deux étapes ci-après. Premièrement, une estimation de la fréquence instantanée du signal pour différents échantillons. Deuxièmement, une estimation des paramètres de la phase du signal par l'intermédiaire d'une régression linéaire polynomiale. L'estimation de la fréquence instantanée étant facilement entachée d'erreurs et la régression étant ici un problème mal posé, il faut impérativement avoir recours à un estimateur robuste.

### 4.1 Estimation de la fréquence instantanée

Nous avons utilisé l'algorithme « Parabolic Smoothed Central Finite Difference » (PSCFD) [9]. Celui-ci repose sur une analyse de la phase du signal analytique  $z(t)$ . L'estimateur de la fréquence instantanée est alors :

$$\hat{f}_i(n) = \frac{f_s}{4\pi} \left( \left( \arg \left[ \sum_{p=-Q}^Q h(p) \exp\{i \arg[z(n-p+1)z^*(n-p-1)]\} \right] \right) \right)_{2\pi} \quad (6)$$

Les arguments sont pris dans l'intervalle  $[0; 2\pi[$  et la fenêtre de lissage  $h(p)$  est définie par :

$$h(p) = \begin{cases} \frac{3N_i}{2(N_i^2-1)}(1 - (\frac{p}{N_i})^2) & \text{pour } p \text{ pair et } -Q \leq p \leq Q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (7)$$

fenêtre de longueur  $M = 2Q + 1$  avec  $N_i = (M + 3)/2$ . Dans les expériences réalisées pour cet article, nous avons pris  $Q = 128$ . On dispose alors d'un ensemble  $\hat{f}_i(n) \quad n = 2 \dots N - 1$ , d'estimées de la fréquence instantanée. Pour supprimer les effets de bord induits par la convolution on utilise l'ensemble  $\hat{f}_i(n), \quad n = Q + 1, \dots, N - Q - 2$ . Nous rappelons les conditions d'utilisation de cet algorithme. Introduites dans [9], ces conditions s'expriment comme suit :

1. Le signal est entaché d'un bruit additif gaussien, centré, i.i.d. et le rapport signal à bruit est modéré,  $\text{SNR} \geq 5$  soit 7dB.
2. La fréquence instantanée doit rester dans la plage de la fréquence de Nyquist  $0 \leq f_i \leq f_s/2$ .
3. La variation en fréquence doit être limitée, si  $f_0$  est la fréquence moyenne et  $\Delta\nu$  la variation en fréquence, alors  $\frac{\Delta\nu}{f_0} \ll 1$ .

Sous ces conditions, l'estimation de la fréquence instantanée atteint la borne de Cramer-Rao, elle présente un biais négligeable et une variance donnée par la formule suivante [9] :

$$\sigma^2 = \frac{f_s^2}{4\pi} \frac{6}{\text{SNR} \times N_i(N_i^2 - 1)} \quad (8)$$

Ces conditions et performances garanties sont importantes car dans la partie 5 consacrée aux simulations et à l'étude des performances de notre algorithme, celui-ci est testé avec des contraintes qui peuvent s'éloigner largement du domaine garanti. A cette occasion nous verrons que dans le cadre de SPP, les performances de l'algorithme PSCFD restent valides avec du bruit  $\alpha$ -stable et avec des signaux présentant de fortes variations en fréquence.

## 4.2 Régression polynomiale robuste

Soit les vecteurs  $\mathbf{f}_i, \mathbf{b}$  regroupant les données de fréquence instantanée et les paramètres et  $\mathbf{R}$  la matrice de régression.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i &= (\hat{f}_i(2), \dots, \hat{f}_i(N-1))^T \quad \text{avec} \quad \hat{f}_i(k) = \hat{f}_i(kt_s) \\ \mathbf{b} &= (\beta_p, \dots, \beta_1)^T \\ \mathbf{R} &= \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} p(2t_s)^{p-1} & \dots & 2(2t_s) & 1 \\ p(3t_s)^{p-1} & \dots & 2(3t_s) & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ p((N-1)t_s)^{p-1} & \dots & 2((N-1)t_s) & 1 \end{pmatrix} \quad (9) \end{aligned}$$

Les vecteurs  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{e}$  (erreurs) sont alors solution du système linéaire :

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{R}\mathbf{b} + \mathbf{e} \quad (10)$$

Les erreurs d'estimation de la fréquence instantanée n'ont pas une distribution gaussienne et peuvent même présenter des points aberrants. La méthode classique basée sur l'estimateur des moindres carrés n'est donc pas utilisable et il faut avoir recours à une méthode d'estimation robuste. Le choix s'est porté sur l'emploi d'un M-estimateur avec l'algorithme « Iteratively Reweighted Least Squares » (IRLS) et la fonction de Welsch comme fonction de coût [11]. La fonction de Welsch s'est imposée car c'est celle qui a offert les meilleurs résultats en simulation. Les paramètres sont alors obtenus en résolvant le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{\beta_k} \sum_n \rho(\epsilon(n)) \quad \text{avec} \quad \rho(x) = \frac{c^2}{2} [1 - \exp(-x/c)^2] \quad (11)$$

La constante  $c$  vaut  $c = 4.2$  dans les simulations. On notera toutefois que dans le cas particulier d'un SPP dont la phase est d'ordre 1 (signal sinusoïdal), l'algorithme est inutile car il faut estimer une constante. Nous avons alors pris comme estimateur la médiane des fréquences instantanées calculées.

## 5 Simulations et résultats

Un ensemble de tests a été réalisé pour déterminer les performances de l'estimation des paramètres de SPP de différents ordres et pour plusieurs conditions de bruit. Ces performances sont présentées de manière empirique avec des statistiques sur les erreurs relatives des estimées des paramètres. La précision décroît rapidement avec le SNR, il y a un seuil élevé dû à l'algorithme PSCFD. Dans toutes les expériences, nous avons utilisé des signaux avec les caractéristiques suivantes : amplitude 1, fréquence d'échantillonnage  $f_s = 10^6$  Hz, 8192 points, le terme constant (degré 0) des phases a été généré aléatoirement entre 0 et  $2\pi$ . Un filtre anti-repliement de type Butterworth d'ordre 8 coupant à  $4 \times 10^5$  Hz a été appliqué.

Plage des paramètres : SPP3 (ordre 3)  $a_1$  compris entre 0 et  $3.5 \times 10^5$ ,  $a_2$  compris entre  $\pm 8 \times 10^7$ ,  $a_3$  compris entre  $\pm 6 \times 10^9$ . SPP4 (ordre 4)  $a_1$  compris entre 0 et  $3.5 \times 10^5$ ,  $a_2$  compris entre  $\pm 2 \times 10^8$ ,  $a_3$  compris entre  $\pm 5 \times 10^{10}$ ,  $a_4$  compris entre  $\pm 2.5 \times 10^{12}$ .

Les plages des paramètres ont été choisies pour que la fréquence instantanée des SPP puisse varier librement dans la plage comprise entre 0 et  $3.5 \times 10^5$  Hz.

Pour chaque ordre, nous avons généré de manière aléatoire un ensemble de SPP pour différentes conditions et niveaux de bruits puis nous avons estimé les paramètres des signaux ainsi considérés. Quatre niveaux de bruits gaussien et quatre niveaux de bruits  $\alpha$ -stable équivalents en termes de puissance ont été considérés et afin d'avoir en référence les meilleures performances envisageables, une expérience a été menée sans bruit ajouté. Chaque expérience a été répétée 15000 fois. Les niveaux de bruits gaussien étaient respectivement de 20dB, 10dB, 6dB et 3dB. Les bruits  $\alpha$ -stable ont été définis par les paramètres :  $\alpha = 1.2, \beta = 0$  (distribution symétrique),  $\gamma = 0.005, 0.05, 0.1$  et 0.2. Les résultats sont uniquement de nature empirique et ont pour forme plusieurs statistiques sur les erreurs relatives des estimées des paramètres. L'emploi de bruit impulsif dans les expériences nécessite le recours à des statistiques robustes : médiane, distance interquartile (estimation de la dispersion) et une EQM robuste – une moyenne des erreurs quadratiques calculée en excluant

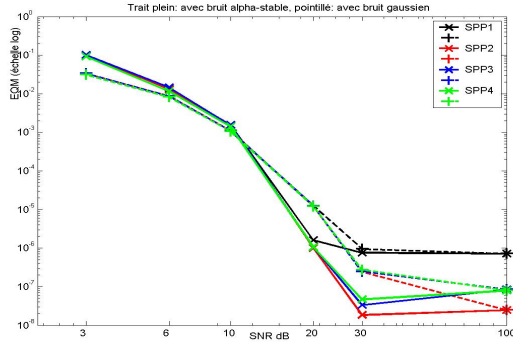


FIGURE 1 – EQM robuste de  $\hat{A}$ , SPP d'ordre 1 à 4 pour différents bruits

TABLE 1 – Médiane de l'erreur relative de  $\hat{A}$

Ordre	SNR					
	$\infty$ dB	30 dB	20 dB	10 dB	6 dB	3 dB
SPP3	$7.47 \times 10^{-6}$	$\alpha -2.18 \times 10^{-6}$	$\alpha -9.27 \times 10^{-4}$	$\alpha -3.86 \times 10^{-2}$	$\alpha -0.112$	$\alpha -0.311$
		$\mathcal{N} -2.18 \times 10^{-4}$	$\mathcal{N} -3.47 \times 10^{-3}$	$\mathcal{N} -3.39 \times 10^{-2}$	$\mathcal{N} -9.50 \times 10^{-2}$	$\mathcal{N} -0.186$
SPP4	$1.77 \times 10^{-5}$	$\alpha 1.55 \times 10^{-3}$	$\alpha -8.96 \times 10^{-4}$	$\alpha -3.78 \times 10^{-2}$	$\alpha -0.111$	$\alpha -0.307$
		$\mathcal{N} -1.81 \times 10^{-4}$	$\mathcal{N} -3.36 \times 10^{-3}$	$\mathcal{N} -3.34 \times 10^{-2}$	$\mathcal{N} -9.43 \times 10^{-2}$	$\mathcal{N} -0.185$

les 5% des valeurs les plus extrêmes. Dans tous les tableaux de résultats, le symbole  $\alpha$  indique le résultat d'une expérience avec du bruit  $\alpha$ -stable tandis que le symbole  $\mathcal{N}$  indique le résultat d'une expérience avec du bruit gaussien. Dans les courbes des figures, les tracés en trait plein sont ceux d'une expérience avec du bruit  $\alpha$ -stable et ceux en pointillé sont ceux d'une expérience avec du bruit gaussien. La valeur 100dB dans les graphes est en fait le résultat des expériences sans bruit ajouté. Les résultats avec les phases d'ordre 1 et 2 sont similaires et sont dans un article soumis à EUSIPCO 2009 (à paraître)

## 5.1 Estimation de l'amplitude

Les résultats de l'estimation de l'amplitude sont présentés dans les tableaux 1, 2 et la figure 1. Un fait doit être immédiatement indiqué : pour un SNR et une statistique donnée, les résultats sont pratiquement les mêmes pour les différents ordres  $p$  des phases. La précision de l'estimation des l'amplitude semble indépendante de l'estimation des paramètres de phase, un résultat connu depuis plusieurs années avec du bruit gaussien [12] [13] qui était attendu et qui reste valable avec du bruit  $\alpha$ -stable. Pour un SNR donné, les résultats avec du bruit  $\alpha$ -stable et ceux avec du bruit gaussien sont presque les mêmes. Les résultats sont même légèrement meilleurs avec du bruit  $\alpha$ -stable : l'estimateur est robuste à la nature du bruit. La précision diminue avec le SNR ainsi que l'on peut le voir sur la figure 1 et nous considérons que 10 dB est une limitation convenable à l'usage de cet estimateur. Cette limitation avait déjà été rencontrée dans notre précédent article [15] en estimation des paramètres de la phase et nous considérons qu'il s'agit d'une limitation commune aux méthodes basées sur l'utilisation directe du signal analytique. Pour un SNR fixé, la médiane est toujours négative et sa valeur absolue est de l'ordre de la distance interquartile : l'estimateur  $\hat{A}$  semble affecté d'un biais négatif du pour l'essentiel au gain du filtre anti-repliement qui n'est pas compensé : dans une expérience menée sans bruit et sans ce filtre, la médiane et la distance interquartile de l'estimateur de  $\hat{A}$  diminuent à des valeurs de l'ordre de  $10^{-9}$  tandis que l'EQM atteint une valeur de  $10^{-14}$ .

## 5.2 Estimation des paramètres de la phase

Les résultats de l'estimation des paramètres de phase  $\beta_1$  à  $\beta_p$  sont présentés dans les tableaux 3 and 4 et les figures 2, 3 et 4. L'estimation du paramètre

TABLE 2 – Distance interquartile de l'erreur relative de  $\hat{A}$

Ordre	SNR					
	$\infty$ dB	30 dB	20 dB	10 dB	6 dB	3 dB
SPP3	$4.91 \times 10^{-4}$	$\alpha 3.17 \times 10^{-4}$	$\alpha 9.13 \times 10^{-4}$	$\alpha 1.31 \times 10^{-2}$	$\alpha 3.41 \times 10^{-2}$	$\alpha 8.35 \times 10^{-2}$
		$\mathcal{N} 7.74 \times 10^{-4}$	$\mathcal{N} 2.46 \times 10^{-3}$	$\mathcal{N} 7.02 \times 10^{-3}$	$\mathcal{N} 1.14 \times 10^{-2}$	$\mathcal{N} 1.51 \times 10^{-2}$
SPP4	$5.09 \times 10^{-4}$	$\alpha 3.49 \times 10^{-4}$	$\alpha 1.01 \times 10^{-3}$	$\alpha 1.32 \times 10^{-2}$	$\alpha 3.36 \times 10^{-2}$	$\alpha 8.25 \times 10^{-2}$
		$\mathcal{N} 9.03 \times 10^{-4}$	$\mathcal{N} 2.62 \times 10^{-3}$	$\mathcal{N} 7.72 \times 10^{-3}$	$\mathcal{N} 1.22 \times 10^{-2}$	$\mathcal{N} 1.63 \times 10^{-2}$

TABLE 3 – Médianes des erreurs relatives des paramètres  $\hat{\beta}_k$

Paramètres	SNR				
	$\infty$ dB	20 dB	10 dB	6 dB	3 dB
$a_1$ SPP3	$-4 \times 10^{-5}$	$\alpha -3 \times 10^{-5}$	$\alpha -2 \times 10^{-3}$	$\alpha -4 \times 10^{-3}$	$\alpha -1 \times 10^{-2}$
		$\mathcal{N} -4 \times 10^{-5}$	$\mathcal{N} -3 \times 10^{-4}$	$\mathcal{N} -3 \times 10^{-3}$	$\mathcal{N} -1 \times 10^{-2}$
$a_1$ SPP4	$-4 \times 10^{-5}$	$\alpha -9 \times 10^{-5}$	$\alpha -2 \times 10^{-3}$	$\alpha -4 \times 10^{-3}$	$\alpha -9 \times 10^{-3}$
		$\mathcal{N} -7 \times 10^{-5}$	$\mathcal{N} -4 \times 10^{-4}$	$\mathcal{N} -3 \times 10^{-3}$	$\mathcal{N} -1 \times 10^{-2}$
$a_2$ SPP3	$-3 \times 10^{-5}$	$\alpha -1 \times 10^{-5}$	$\alpha 2 \times 10^{-3}$	$\alpha -5 \times 10^{-3}$	$\alpha -4 \times 10^{-2}$
		$\mathcal{N} -3 \times 10^{-5}$	$\mathcal{N} 2 \times 10^{-3}$	$\mathcal{N} 2 \times 10^{-2}$	$\mathcal{N} 6 \times 10^{-2}$
$a_2$ SPP4	$-3 \times 10^{-4}$	$\alpha -2 \times 10^{-4}$	$\alpha 3 \times 10^{-3}$	$\alpha -2 \times 10^{-3}$	$\alpha -2 \times 10^{-2}$
		$\mathcal{N} -2 \times 10^{-4}$	$\mathcal{N} 2 \times 10^{-3}$	$\mathcal{N} 2 \times 10^{-2}$	$\mathcal{N} 7 \times 10^{-2}$
$a_3$ SPP3	$1 \times 10^{-6}$	$\alpha 5 \times 10^{-5}$	$\alpha 3 \times 10^{-3}$	$\alpha -5 \times 10^{-3}$	$\alpha -4 \times 10^{-2}$
		$\mathcal{N} 1 \times 10^{-5}$	$\mathcal{N} 2 \times 10^{-3}$	$\mathcal{N} 2 \times 10^{-2}$	$\mathcal{N} 6 \times 10^{-2}$
$a_3$ SPP4	$-6 \times 10^{-6}$	$\alpha 8 \times 10^{-5}$	$\alpha 5 \times 10^{-3}$	$\alpha -1 \times 10^{-4}$	$\alpha -3 \times 10^{-2}$
		$\mathcal{N} 4 \times 10^{-5}$	$\mathcal{N} 2 \times 10^{-3}$	$\mathcal{N} 2 \times 10^{-2}$	$\mathcal{N} 7 \times 10^{-2}$
$a_4$ SPP4	$7 \times 10^{-6}$	$\alpha 1 \times 10^{-4}$	$\alpha 5 \times 10^{-3}$	$\alpha -6 \times 10^{-4}$	$\alpha -3 \times 10^{-2}$
		$\mathcal{N} 8 \times 10^{-5}$	$\mathcal{N} 2 \times 10^{-3}$	$\mathcal{N} 2 \times 10^{-2}$	$\mathcal{N} 7 \times 10^{-2}$

TABLE 4 – Distances interquartiles des erreurs relatives des paramètres  $\hat{\beta}_k$

Paramètres	SNR				
	$\infty$ dB	20 dB	10 dB	6 dB	3 dB
$a_1$ SPP3	$3 \times 10^{-4}$	$\alpha 4 \times 10^{-4}$	$\alpha 1 \times 10^{-2}$	$\alpha 2 \times 10^{-2}$	$\alpha 8 \times 10^{-2}$
		$\mathcal{N} 3 \times 10^{-4}$	$\mathcal{N} 2 \times 10^{-3}$	$\mathcal{N} 3 \times 10^{-2}$	$\mathcal{N} 0.1$
$a_1$ SPP4	$8 \times 10^{-4}$	$\alpha 9 \times 10^{-4}$	$\alpha 2 \times 10^{-2}$	$\alpha 4 \times 10^{-2}$	$\alpha 0.1$
		$\mathcal{N} 9 \times 10^{-4}$	$\mathcal{N} 3 \times 10^{-3}$	$\mathcal{N} 4 \times 10^{-2}$	$\mathcal{N} 0.2$
$a_2$ SPP3	$3 \times 10^{-4}$	$\alpha 5 \times 10^{-4}$	$\alpha 2 \times 10^{-2}$	$\alpha 5 \times 10^{-2}$	$\alpha 0.2$
		$\mathcal{N} 4 \times 10^{-4}$	$\mathcal{N} 2 \times 10^{-3}$	$\mathcal{N} 2 \times 10^{-2}$	$\mathcal{N} 5 \times 10^{-2}$
$a_2$ SPP4	$8 \times 10^{-4}$	$\alpha 1 \times 10^{-3}$	$\alpha 5 \times 10^{-2}$	$\alpha 0.1$	$\alpha 0.4$
		$\mathcal{N} 1 \times 10^{-3}$	$\mathcal{N} 4 \times 10^{-3}$	$\mathcal{N} 4 \times 10^{-2}$	$\mathcal{N} 0.1$
$a_3$ SPP3	$3 \times 10^{-4}$	$\alpha 6 \times 10^{-4}$	$\alpha 2 \times 10^{-2}$	$\alpha 5 \times 10^{-2}$	$\alpha 0.2$
		$\mathcal{N} 4 \times 10^{-4}$	$\mathcal{N} 2 \times 10^{-3}$	$\mathcal{N} 2 \times 10^{-2}$	$\mathcal{N} 5 \times 10^{-2}$
$a_3$ SPP4	$6 \times 10^{-4}$	$\alpha 1 \times 10^{-3}$	$\alpha 5 \times 10^{-2}$	$\alpha 0.1$	$\alpha 0.4$
		$\mathcal{N} 1 \times 10^{-3}$	$\mathcal{N} 4 \times 10^{-3}$	$\mathcal{N} 3 \times 10^{-2}$	$\mathcal{N} 0.1$
$a_4$ SPP4	$6 \times 10^{-4}$	$\alpha 1 \times 10^{-3}$	$\alpha 5 \times 10^{-2}$	$\alpha 0.1$	$\alpha 0.4$
		$\mathcal{N} 1 \times 10^{-3}$	$\mathcal{N} 4 \times 10^{-3}$	$\mathcal{N} 4 \times 10^{-2}$	$\mathcal{N} 0.1$

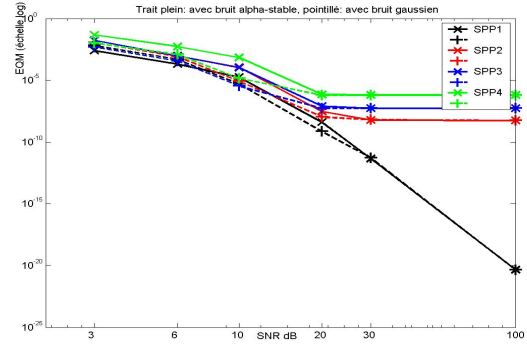


FIGURE 2 – EQM robuste de  $\hat{\beta}_1$ , SPP d'ordre 1 à 4 pour différents bruits

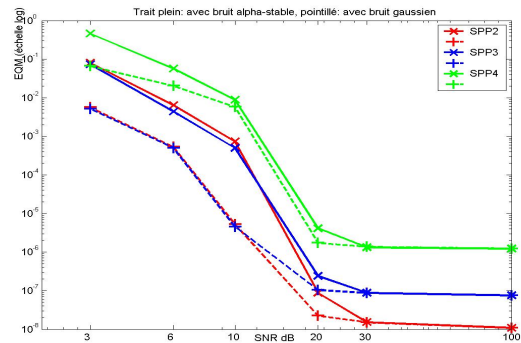


FIGURE 3 – EQM robuste de  $\hat{\beta}_2$ , SPP d'ordre 2 à 4 pour différents bruits

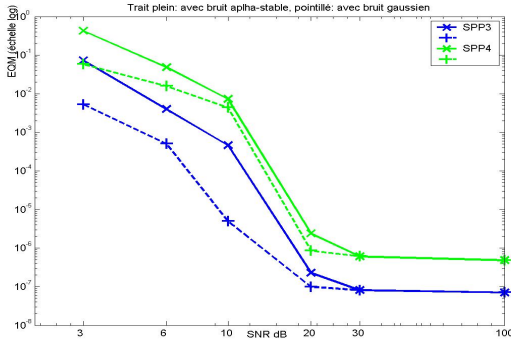


FIGURE 4 – EQM robuste de  $\hat{\beta}_3$ , SPP d'ordre 3 et 4 pour différents bruits

$\hat{\beta}_1$  est légèrement biaisée, biais qui augmente avec le niveau du bruit ce qui est en accord avec le comportement annoncé de l'algorithme PSCFD [9], ce paramètre agissant comme une translation de la fréquence instantanée. Dans le cas des autres paramètres, les alternances de valeurs positives et négatives en fonction des niveaux de bruit ne permettent pas de conclure à la présence d'un biais sur les estimations. Les figures 2 et 3 sont les tracés des EQM pour les paramètres  $\beta_1$  et  $\beta_2$  pour différents bruits. Elles montrent que le paramètre de plus haut degré est bien mieux estimé, les paramètres suivant ont une précision similaire pour un SNR donné. En étudiant les performances obtenues dans les expériences d'estimation des paramètres, nous avons constaté que certaines conditions d'utilisation garantissant les performances de l'algorithme PSCFD [9] se révèlent indispensables tandis que d'autres peuvent être ignorées pour l'estimation des paramètres des SPP.

Premièrement nous constatons que sur l'ensemble des expériences, à un niveau de bruit équivalent les performances en bruit gaussien et en bruit  $\alpha$ -stable sont du même ordre de grandeur : l'algorithme est robuste à la nature de la distribution du bruit et l'exigence de bruit gaussien pour garantir les performances n'est pas nécessaire. Deuxièmement lorsque le niveau de bruit augmente, la précision de l'estimation des paramètres bonne au départ décroît très rapidement et pour un SNR inférieur à 6dB l'algorithme fournit des estimés des ordres de grandeur des paramètres. La condition d'utilisation  $\text{SNR} \geq 7\text{dB}$  est elle nécessaire et imposer  $\text{SNR} \geq 10\text{dB}$  semble préférable. Enfin troisièmement on constate pour tous les niveaux et formes de bruit un saut dans les performances entre les SPP d'ordre 4 et les autres signaux. Ces signaux sont les plus complexes et surtout sujets aux variations en fréquences les plus rapides. Notre interprétation de ce résultat est que l'hypothèse d'une limite sur l'ampleur et la rapidité des variations en fréquence dans l'utilisation de l'algorithme PSCFD est exacte mais que la plage véritable est plus étendue que celle fournie par ses auteurs. Pour un signal de durée  $T$  échantillonné à la fréquence  $f_s$ , nous considérons que la limite d'utilisation de l'algorithme PSCFD avec une fenêtre de lissage de 257 points pour pouvoir ensuite effectuer une estimation des paramètres est de :

$$\left| \frac{df_i}{dt} \right| < \frac{2f_s}{T}$$

Cette valeur a été obtenue en calculant la variation en fréquence maximale possible d'un SPP d'ordre 3 sur l'intervalle considéré et obtenue en imposant  $f_i(0) = 0$ ,  $f_i(T/2) = f_s/2$  et  $f_i(T) = 0$  ou bien  $f_i(0) = f_s/2$ ,  $f_i(T/2) = 0$  et  $f_i(T) = f_s/2$ . Bien que la précision des estimations des paramètres se révèle être correcte à fort SNR – de l'ordre de  $10^{-7}$  ou mieux – elle demeure moins bonne que les meilleures méthodes de type MUSIC ou PHAF [14]. Par contre notre algorithme est bien plus rapide : pour la seule partie d'estimation de la fréquence instantanée et un signal de  $N$  points, MUSIC effectue les calculs en  $O(N^3)$  opérations et PHAF en  $O(N^2 \log(N))$  contre  $O(N)$  pour le PSCFD [1] auquel il faut ajouter le calcul de la régression qui est de l'ordre de  $O(Np^3)$  pour une phase d'ordre  $p$ .

## 6 Conclusion

Comme point final de cet article, nous rappellerons que nous avons conçu un algorithme pour l'estimation des paramètres des SPP qui est rapide, avec

une complexité linéaire et avec une limitation à l'usage vis à vis du SNR qui devrait être fixée à 10 dB. L'estimation de l'amplitude est robuste à la nature du bruit et est indépendante de la phase. L'estimation des paramètres de la phase est robuste à la nature du bruit et dépend peu de l'ordre de la phase tant que les variations en fréquence ne deviennent pas trop importantes. Les travaux futurs visant à améliorer notre algorithme vont s'attacher à obtenir une meilleure estimation de la fréquence instantanée, en particulier pour travailler avec des signaux fortement bruités.

## Références

- [1] P. J. Kootsookos, A review of the frequency estimation and tracking problems, Tech. rep., CRASys Australian National University (1993).
- [2] P. Stoica, A. Nehorai, Music, maximum likelihood, and cramer-rao bound, IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing 37 (5) (1989) 720–741.
- [3] P. Stoica, A. Nehorai, Music, maximum likelihood, and cramer-rao bound : Further results and comparisons, IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing 38 (12) (1990) 2140–2150.
- [4] S. Marcos, Les méthodes à haute résolution, Hermès, 1998.
- [5] S. Barbarossa, R. Marni, A. Scaglione, Adaptive detection of polynomial phase signals embedded in noise using high order ambiguity functions, in : 31st Asilomar Conf. Signals, Syst. Comput., Pacific Grove, 1997.
- [6] A. Scaglione, S. Barbarossa, Statistical analysis of the product high-order ambiguity function, IEEE Transactions on Information Theory 45 (1) (1999) 343–356.
- [7] G. Samorodnitsky, M. S. Taqqu, Stable non Gaussian random processes, stochastic models with infinite variance, Stochastic modeling, Chapman and Hall, 2000.
- [8] S. Saliu, Definition of instantaneous frequency on real signals, in : EU-SIPCO, 2000.
- [9] B. C. Lovell, R. C. Williamson, The statistical performance of some instantaneous frequency estimators, IEEE Transactions on Signal Processing 40 (7) (1992) 1708–1723.
- [10] L. Mili, C. W. Coakley, Robust estimation in structured linear regression, The Annals of Statistics 24 (6) (1996) 2593–2607.
- [11] Z. Zhang, Parameter estimation techniques : A tutorial with applications to conic fitting, Tech. Rep. 2676, INRIA (October 1995).
- [12] B. Friedlander, J. M. Francos, Estimation of amplitude and phase parameters of multicomponent signals, IEEE Transactions on Signal Processing 43 (4) (1995) 917–926.
- [13] B. Friedlander, J. M. Francos, Bounds for estimation for multicomponent signals with random amplitude and deterministic phase, IEEE Transactions on Signal Processing 43 (5) (1995) 1161–1172.
- [14] S. Nandi, D. Kundu, Asymptotic properties of the least squares estimators of the parameters of the chirp signals, Annals of the Institute of Statistical Mathematics 56 (3) (2004) 529–544.
- [15] O. Fourt, M. Benidir, Une méthode rapide robuste et simple pour l'estimation des paramètres d'un signal à phase polynomiale, Traitement du Signal 24 (3) (2007) p. 165–173.
- [16] S. Barbarossa, A. Scaglione, G. Giannakis, Product high-order ambiguity function for multicomponent polynomial-phase signal modeling, IEEE Transactions on Signal Processing 46 (3) (1998) 691–708.