

# Une structure récurrente pour la séparation de mélanges quadratiques

Chahinez CHAOUCHI, Yannick DEVILLE, Shahram HOSSEINI

Laboratoire d'Astrophysique de Toulouse-Tarbes, Université de Toulouse, CNRS,  
14 Av. Edouard Belin, 31400 Toulouse, France  
{*echaouch, ydeville, shosseini*}@ast.obs-mip.fr

**Résumé** – Nous nous intéressons au problème de séparation de sources pour des mélanges non linéaires. Dans cet article, nous considérons un modèle quadratique, en contexte non aveugle (coefficients de mélange supposés connus). On se propose alors de retrouver les sources à l'aide d'un réseau récurrent comme structure de séparation. Les propriétés de cette structure (points d'équilibre, stabilité, approche pour éviter un comportement chaotique) sont ensuite analysées puis validées à l'aide de tests numériques.

**Abstract** – This paper deals with source separation. We address the case of quadratic mixtures and propose an associated recurrent network to achieve separation. The equilibrium points of the structure and their local stability are then studied and validated by numerical tests.

## 1 Introduction

La séparation de sources consiste à retrouver un vecteur  $S$  de signaux sources à partir d'un vecteur  $X$  d'observations qui sont des mélanges de ces sources,

$$X = \mathcal{F}(S), \quad (1)$$

la fonction de mélange  $\mathcal{F}$  pouvant être connue ou non. Dans le cas de séparation aveugle, il a été montré que si le mélange  $\mathcal{F}$  est non-linéaire, l'hypothèse d'indépendance statistique des sources n'est pas suffisante pour les retrouver [1], [2]. Une manière de simplifier le problème consiste à contraindre le modèle de mélange [3], [4], [5], [6]. Dans cet article, nous considérons un modèle quadratique, et nous nous plaçons en contexte non aveugle (coefficients de mélange supposés connus). On se propose alors de retrouver les sources à l'aide d'un réseau récurrent comme structure de séparation. L'approche proposée, introduite dans [3], présente l'intérêt d'être facilement étendue à des modèles polynômiaux d'ordre élevé. Une extension au cas aveugle fait partie de nos perspectives.

Le document est organisé comme suit : en Section 2 nous introduisons le modèle de mélange étudié ainsi que la structure récurrente proposée. Les propriétés de cette structure sont ensuite analysées, nous déterminons ses points d'équilibre (Section 3) et étudions leur stabilité locale (Section 4). Ces résultats seront validés par des tests numériques (Section 5) avant de conclure.

## 2 Modèle de mélange et structure récurrente associée

### 2.1 Modèle de mélange

Le mélange considéré est un mélange instantané quadratique (auto-termes et termes croisés), défini pour 2 sources  $(s_1, s_2)$  et 2 observations  $(x_1, x_2)$  par les équations :

$$\begin{cases} x_1(n) = [a_{11}s_1(n)]^2 + [a_{12}s_2(n)]^2 + b_1s_1(n)s_2(n), & (2) \\ x_2(n) = [a_{21}s_1(n)]^2 + [a_{22}s_2(n)]^2 + b_2s_1(n)s_2(n) & (3) \end{cases}$$

Plus précisément nous considérons la version *normalisée* de ce modèle, où  $a_{11}$  et  $a_{22}$  sont supposés non nuls :

$$\begin{cases} x_1(n) = s_1'^2(n) - L_{12}s_2'^2(n) - Q_1s_1'(n)s_2'(n) & (4) \\ x_2(n) = s_2'^2(n) - L_{21}s_1'^2(n) - Q_2s_1(n)s_2(n) & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{avec } s_i'(n) = a_{ii}s_i(n), \quad i \in \{1, 2\}; \\ L_{ij} = -\frac{a_{ij}^2}{a_{jj}^2}, \quad Q_i = -\frac{b_i}{a_{ii}a_{jj}}, \quad (i, j) \in \{(1, 2), (2, 1)\} & (6) \end{cases}$$

### 2.2 Structure récurrente associée

L'approche proposée consiste à considérer que le mélange étudié présente des composantes d'intérêt et des composantes d'interférence [3], respectivement  $[s_i'^2(n)]$  et  $[-L_{ij}s_j'^2(n) - Q_ies_i'(n)s_j'(n)]$ ,  $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$  pour (4)-(5). Nous lui associons alors un réseau récurrent qui

conserve les premières composantes et supprime les secondes, de sorte à récupérer à l'équilibre les sources en sortie du réseau, aux indéterminations de signe et d'échelle près. En d'autres termes, il s'agit d'obtenir à l'équilibre des sorties sous la forme :

$$y_i(m+1) = y_i(m) = y_{iE} = k_i s'_i(n), \quad k_i \in \mathbb{R}^*, \quad i \in \{1, 2\} \quad (7)$$

A chaque instant  $n$ , comme l'illustre la Figure 1, nous mettons en œuvre les récurrences sur  $m$  suivantes :

$$\begin{cases} y_1(m+1) = \epsilon_1 \sqrt{x_1(n) + l_{12}y_2^2(m) + q_1 y_1(m)y_2(m) + l_{11}y_1^2(m)}, & (8) \\ y_2(m+1) = \epsilon_2 \sqrt{x_2(n) + l_{21}y_1^2(m) + q_2 y_1(m)y_2(m) + l_{22}y_2^2(m)}, & (9) \end{cases}$$

où les  $\epsilon_{i,i \in \{1,2\}}$  valent  $\pm 1$  et sont fixés à chaque instant  $n$ . Lorsque les  $k_{i,i \in \{1,2\}}$  sont déterminés, les paramètres  $(l_{12}, l_{21}, l_{11}, l_{22}, q_1, q_2)$  sont ensuite fixés de manière à assurer la compatibilité des systèmes (4)-(5) et (8)-(9) à l'équilibre, avec (7) comme point d'équilibre. Ils vérifient alors les relations suivantes :

$$l_{ii} = 1 - \frac{1}{k_i^2}, \quad i \in \{1, 2\}, \quad (10)$$

$$l_{ij} = \frac{L_{ij}}{k_i^2 k_j^2}, \quad q_i = \frac{Q_i}{k_i k_j}, \quad (i, j) \in \{(1, 2), (2, 1)\} \quad (11)$$

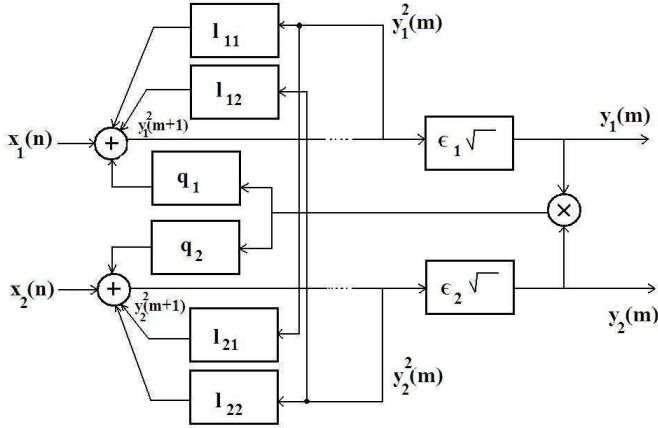


FIG. 1: Structure récurrente proposée

### 3 Points d'équilibre

L'étude de la structure définie par (8)-(9) nécessite la détermination de ses points d'équilibre et l'analyse de leur stabilité. Après calculs et simplifications (voir Annexe), nous obtenons les expressions suivantes pour les points d'équilibre :

$$(y_{1E}, y_{2E})^{(1)} = (\epsilon k_1 s'_1(n), \epsilon k_2 s'_2(n)) \quad (12)$$

$$(y_{1E}, y_{2E})^{(2)} = \left( \epsilon' k_1 \frac{[(1-L_{21}L_{12})s'_1(n) - (Q_1+Q_2L_{12})s'_2(n)]}{\sqrt{d}}, \epsilon' k_2 \frac{[(Q_2+Q_1L_{21})s'_1(n) - (1-L_{21}L_{12})s'_2(n)]}{\sqrt{d}} \right), \quad SI \quad d > 0 \quad (13)$$

avec  $d = (1 - L_{21}L_{12})^2 - (Q_1 + Q_2L_{12})(Q_2 + Q_1L_{21})$  et  $\epsilon, \epsilon' = \pm 1$ .

Ces points d'équilibre doivent vérifier la relation :

$$\text{sign}(y_{iE}) = \text{sign}(\epsilon_i), \quad i \in \{1, 2\} \quad (14)$$

Pour (12) et (13), (14) s'écrit respectivement :

$$\text{sign}(k_1)\text{sign}(k_2) = \text{sign}(\epsilon_1)\text{sign}(\epsilon_2)\text{sign}(s'_1(n))\text{sign}(s'_2(n)) \quad (15)$$

$$\text{et} \quad \text{sign}(k_1)\text{sign}(k_2) = \text{sign}(\epsilon_1)\text{sign}(\epsilon_2)\text{sign}(r_1)\text{sign}(r_2) \quad (16)$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} r_1 = (1 - L_{21}L_{12})s'_1(n) - (Q_1 + Q_2L_{12})s'_2(n), \\ r_2 = (Q_2 + Q_1L_{21})s'_1(n) - (1 - L_{21}L_{12})s'_2(n) \end{cases}$$

Si l'on suppose que (15) est vérifiée, la structure présente au moins un point d'équilibre, le point séparant (12). Le second point d'équilibre (13), non séparant, existe si  $d$  est positif, ce qui assure son existence dans  $\mathbb{R}$ , et si la condition (16) est vérifiée.

### 4 Stabilité locale des points d'équilibre

Dans cette partie on suppose que les paramètres  $(l_{12}, l_{21}, l_{11}, l_{22}, q_1, q_2)$  vérifient les conditions (10)-(11) et que la condition (15) est valide. Pour étudier la stabilité locale d'un point d'équilibre  $(y_{1E}, y_{2E})$ , nous utilisons l'approximation au premier ordre de (8)-(9) au voisinage de celui-ci, définie par :

$$\begin{cases} y(m+1) \approx f(y_E) + J(y(m) - y_E), \quad y = (y_1, y_2)^T \\ f(y) = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \sqrt{x_1(n) + l_{12}y_2^2 + q_1 y_1 y_2 + l_{11}y_1^2} \\ \epsilon_2 \sqrt{x_2(n) + l_{21}y_1^2 + q_2 y_1 y_2 + l_{22}y_2^2} \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (17)$$

où  $J$  désigne la matrice jacobienne au point d'équilibre  $(y_{1E}, y_{2E})$  définie par :

$$J = \left( \frac{\partial f(y(m))}{\partial y(m)} \right)_{(y_{1E}, y_{2E})} \quad (18)$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{q_1 y_{2E} + 2l_{11} y_{1E}}{2y_{1E}} & \frac{2l_{12} y_{2E} + q_1 y_{1E}}{2y_{1E}} \\ \frac{2l_{21} y_{1E} + q_2 y_{2E}}{2y_{2E}} & \frac{q_2 y_{1E} + 2l_{22} y_{2E}}{2y_{2E}} \end{pmatrix} \quad (19)$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point d'équilibre soit localement stable est que les valeurs propres de  $J$ ,  $\lambda_{i,i \in \{1,2\}}$  vérifient la relation  $|\lambda_{i,i \in \{1,2\}}| < 1$ . Le point d'équilibre vérifie alors le système [7] :

$$\begin{cases} T + D + 1 > 0, & (20) \\ T - D - 1 < 0, & (21) \\ D - 1 < 0. & (22) \end{cases}$$

où  $T$  et  $D$  désignent respectivement la trace et le déterminant de  $J$ .

Pour le point séparant (12), le système (20)-(22) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{s_1'^2((2k_1^2 - 1)Q_2 - L_{21}Q_1) + s_2'^2((2k_2^2 - 1)Q_1 - L_{12}Q_2)}{2(k_1k_2)^2s_1's_2} \\ + \frac{2s_1's_2(2(2k_1^2k_2^2 - k_1^2 - k_2^2) + (1 - L_{12}L_{21}))}{2(k_1k_2)^2s_1's_2} > 0 \end{array} \right. \quad (23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(Q_2 + Q_1L_{21})s_1'^2 + (Q_1 + Q_2L_{12})s_2'^2}{2(k_1k_2)^2s_1's_2} \\ - \frac{2(1 - L_{12}L_{21})s_1's_2}{2(k_1k_2)^2s_1's_2} < 0, \end{array} \right. \quad (24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{s_1'^2((k_1^2 - 1)Q_2 - L_{21}Q_1) + s_2'^2((k_2^2 - 1)Q_1 - L_{12}Q_2)}{2(k_1k_2)^2s_1's_2} \\ + \frac{2s_1's_2(-(k_1^2 + k_2^2) + (1 - L_{12}L_{21}))}{2(k_1k_2)^2s_1's_2} < 0 \end{array} \right. \quad (25)$$

Pour le point non séparant (13) lorsqu'il existe, on peut montrer que (21) s'écrit :

$$\frac{-d[(Q_2 + Q_1L_{21})s_1'^2 + (Q_1 + Q_2L_{12})s_2'^2 - 2(1 - L_{12}L_{21})s_1's_2]}{2(k_1k_2)^2r_1r_2} < 0, \quad (26)$$

Les expressions (24) et (26) montrent d'une part que leur validité ne dépend pas des  $k_{i,i \in \{1,2\}}$  et d'autre part que si les 2 points d'équilibre existent, seul l'un d'entre eux peut être stable.

## 5 Simulations

Dans cette section nous validons les résultats théoriques obtenus ci-dessus. Nous montrons ainsi que l'introduction des  $k_{i,i \in \{1,2\}}$ , et donc le recours à une structure étendue (comparativement à un réseau basique où ces derniers seraient fixés à 1), permet dans certains cas de stabiliser le réseau à un instant  $n$ . Pour chaque simulation nous générons un voisinage de points d'initialisation autour du point d'équilibre considéré. Les  $\epsilon_{i,i \in \{1,2\}}$  sont fixés à 1 dans nos simulations.

### 5.1 Améliorations avec le réseau étendu : Cas 1

Nous nous plaçons d'abord dans un cas de configuration symétrique du modèle (4)-(5),  $L_{ij} = L$ ,  $Q_i = Q$ ,  $s_i'(n) = s$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$  pour lequel la structure définie par (8)-(9) avec les  $k_{i,i \in \{1,2\}}$  fixés à 1 ne présente qu'un seul point d'équilibre ((16) non vérifiée), le point séparant (4, 4) instable ( $|\lambda_1| = 0.75, |\lambda_2| = 1.25$ ). Grâce à la version étendue de notre réseau (i.e.  $k_{i,i \in \{1,2\}} \neq 1$ ),  $l_{ii,i \in \{1,2\}} \neq 0$ , en sélectionnant les  $k_{i,i \in \{1,2\}}$  de manière à assurer la validité de (23)-(25) puis en fixant ( $l_{12}, l_{21}, l_{11}, l_{22}, q_1, q_2$ ) suivant (10)-(11), le nouveau point séparant (5.6569, 5.6569) devient localement stable ( $|\lambda_1| = 0.875, |\lambda_2| = 0.125$ ). La Figure 2 montre que pour plusieurs initialisations générées au voisinage du nouveau point séparant, la structure converge vers ce dernier.

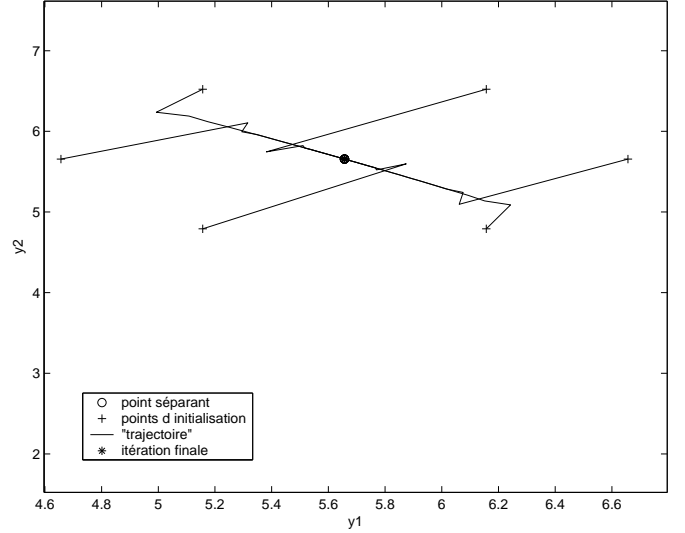


FIG. 2: Réseau étendu : Stabilisation locale du point séparant  $s = 4$ ,  $L = -0.75$ ,  $Q = -0.5$ ,  $k_{i,i \in \{1,2\}} = \sqrt{2}$ .

### 5.2 Améliorations avec le réseau étendu : Cas 2

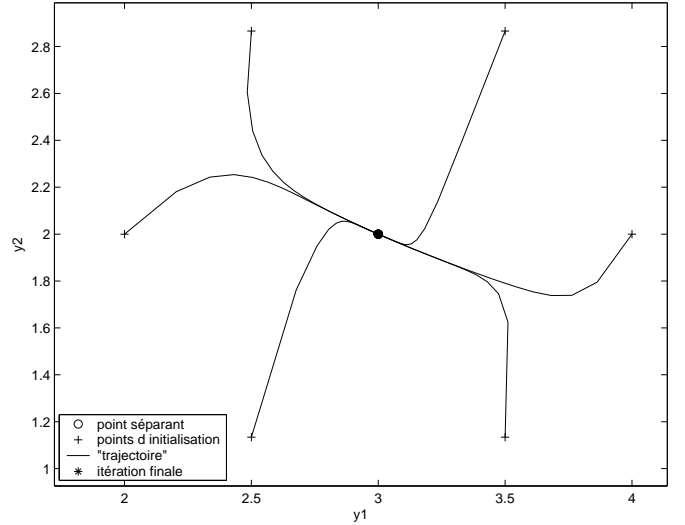


FIG. 3: Réseau étendu : Stabilisation locale du point séparant  $s_1 = 1$ ,  $s_2 = 1$ ,  $L_{12} = -0.2$ ,  $L_{21} = -0.1$ ,  $Q_1 = -0.9$ ,  $Q_2 = -2.1$ ,  $k_1 = 3$ ,  $k_2 = 2$ .

On considère ensuite un mélange pour lequel  $d < 0$  ( $d = -0.0044$ ). Le point séparant, seul point d'équilibre de la structure est instable pour la structure basique quelles que soient les valeurs des sources. Pour la Figure 3 les valeurs des sources ont été fixées à 1, la structure étendue ( $k_1 = 3$  et  $k_2 = 2$ ) converge vers le point séparant (3, 2) ( $|\lambda_1| = 0.8904, |\lambda_2| = 0.436$ ).

## 6 Conclusions et Perspectives

Nous avons considéré dans cet article un mélange quadratique de sources. La structure récurrente proposée, via l'introduction de degrés de liberté supplémentaires, permet dans certains cas de stabiliser localement le réseau à un instant  $n$ . Il semblerait cependant que son application soit limitée à un certain domaine de valeurs de coefficients de mélanges.

Une procédure qui permettrait une sélection automatique des  $k_{i,i \in \{1,2\}}$  ainsi que son extension à un contexte aveugle font partie de nos perspectives.

## 7 Annexe

Si l'on considère le système à l'équilibre  $(y_{1E}, y_{2E})$  on peut écrire :

$$\begin{cases} x_1 + l_{12}y_{2E}^2 + q_1y_{1E}y_{2E} - l'_{11}y_{1E}^2 = 0 & (27) \\ x_2 + l_{21}y_{1E}^2 + q_2y_{1E}y_{2E} - l'_{22}y_{2E}^2 = 0 & (28) \end{cases}$$

qui mène à l'expression des termes croisés en supposant  $q_{i,i \in \{1,2\}}$  non nuls :

$$y_{1E}y_{2E} = \frac{l'_{11}y_{1E}^2 - l_{12}y_{2E}^2 - x_1}{q_1} = \frac{l'_{22}y_{2E}^2 - l_{21}y_{1E}^2 - x_2}{q_2}; \quad (29)$$

ce qui conduit à :

$$y_{2E}^2 (q_1 l'_{22} + q_2 l_{12}) = y_{1E}^2 (l'_{11} q_2 + l_{21} q_1) + (x_2 q_1 - x_1 q_2) \quad (30)$$

$$\text{et } y_{2E} = \epsilon_{2E} \sqrt{y_{1E}^2 \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha}}, \quad \epsilon_{2E} = \pm 1 \quad (31)$$

$$\text{avec } \begin{cases} q_1 l'_{22} + q_2 l_{12} = (Q_1 + Q_2 L_{12}) \frac{l'_{22}}{k_1 k_2} = \alpha \\ l'_{11} q_2 + l_{21} q_1 = (Q_2 + Q_1 L_{21}) \frac{l'_{11}}{k_1 k_2} = \beta \\ x_2 q_1 - x_1 q_2 = \gamma \end{cases} \quad (32)$$

En injectant (31) dans (27), on obtient :

$$q_1 \epsilon_{2E} y_{1E} \sqrt{y_{1E}^2 \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha}} = \left( l'_{11} - \frac{\beta}{\alpha} l_{12} \right) y_{1E}^2 - x_1 - l_{12} \frac{\gamma}{\alpha} \quad (33)$$

soit finalement l'équation du second degré en  $Y_1$  :

$$aY_1^2 + bY_1 + c = 0, \quad Y_1 = y_{1E}^2. \quad (34)$$

$$\text{avec } \begin{cases} a = \left( l'_{11} - \frac{\beta}{\alpha} l_{12} \right)^2 - q_1^2 \frac{\beta}{\alpha}, \\ b = -q_1^2 \frac{\gamma}{\alpha} - 2 \left( l'_{11} - \frac{\beta}{\alpha} l_{12} \right) (x_1 + l_{12} \frac{\gamma}{\alpha}), \\ c = (x_1 + l_{12} \frac{\gamma}{\alpha})^2 \end{cases} \quad (35)$$

Le discriminant de (34),  $\delta = b^2 - 4ac$  s'écrit :

$$\delta = \frac{q_1^4}{\alpha^2} (l'_{11} l'_{22}) [(Q_2 + Q_1 L_{21}) s_1'^2(n) + (Q_1 + Q_2 L_{12}) s_2'^2(n) - 2(1 - L_{21} L_{12}) s_1'(n) s_2'(n)]^2 \quad (36)$$

On remarque que  $\delta \geq 0$ , (34) admet 2 racines réelles correspondant à la première sortie au carré de la structure à l'équilibre :

$$\begin{cases} Y_1^{(1)} = \frac{s_1'^2(n)}{l'_{11}} = k_1^2 s_1'^2(n), & (37) \\ Y_1^{(2)} = k_1^2 \frac{[(1 - L_{21} L_{12}) s_1'(n) - (Q_1 + Q_2 L_{12}) s_2'(n)]^2}{d} & (38) \\ \text{avec } d = (1 - L_{21} L_{12})^2 - (Q_1 + Q_2 L_{12})(Q_2 + Q_1 L_{21}) & (39) \end{cases}$$

En utilisant (31) on en déduit les secondes sorties au carré associées ( $Y_2 = y_{2E}^2$ ) :

$$\begin{cases} Y_2^{(1)} = \frac{s_2'^2(n)}{l'_{22}} = k_2^2 s_2'^2(n), & (40) \\ Y_2^{(2)} = k_2^2 \frac{[(Q_2 + Q_1 L_{21}) s_1'(n) - (1 - L_{21} L_{12}) s_2'(n)]^2}{d} & (41) \end{cases}$$

Les sorties de la structure étant réelles, seules les solutions (40)-(41) positives sont conservées, ce qui impose  $d > 0$ . Nous obtenons alors les expressions (12) et (13), en prenant respectivement les racines carrées de (40) et (41).

## Références

- [1] A. Hyvarinen et P. Pajunen. *Nonlinear Independent Component Analysis : Existence and Uniqueness Results*. *Neural Networks*, 1999.
- [2] C. Jutten et J. Karhunen. *Advances in Blind Source Separation (BSS) and Independent Component Analysis (ICA) for Nonlinear Mixtures*. *International Journal of Neural Systems*, 2004.
- [3] Y. Deville et S. Hosseini. *Recurrent networks for separating extractable-target nonlinear mixtures. Part I : Non-blind configurations*. *Signal Processing*, 2009.
- [4] A. Taleb et C. Jutten. *Source separation in postnonlinear mixtures*. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1999.
- [5] S. Hosseini et Y. Deville. *Blind Separation of Linear-Quadratic Mixtures of Real Sources Using a Recurrent Structure*. *Proc. of IWANN 2003*.
- [6] L. Tomazeli Duarte et C. Jutten. *Blind Source Separation of a Class of Nonlinear Mixtures*. *ICA 2007*.
- [7] J.M.T. Thompson et H.B. Stewart. *Nonlinear dynamics and chaos*. Wiley, Chichester, England, 2002.