

Traitement d'images inspiré des processus de réaction-diffusion

Saverio MORFU¹

¹Laboratoire LE2I UMR Cnrs 5158, Aile des sciences de l'ingénieur BP 47870 21078 Dijon Cedex
smorfu@u-bourgogne.fr

Résumé – Les techniques de filtrage inspirées des processus de réaction-diffusion s'appuient sur des équations différentielles partielles (EDPs) qui sont souvent soit purement anisotrope, soit purement non linéaire mais isotrope. Dans ce document, je montre qu'il est possible de combiner l'anisotropie à la non linéarité afin de développer un outil de traitement qui allie les avantages de ces 2 types d'EDPs. Le nouvel algorithme développé permet le filtrage du bruit et l'amélioration du contraste des images. Les résultats sont comparés à ceux obtenus avec la méthode classique de Perona Malik inspirée d'un processus physique de diffusion anisotrope. Le profil des lignes de l'image filtrée montre que certains détails de l'image peuvent être réhaussés avec ce nouvel algorithme.

Abstract – We propose a new algorithm inspired by the properties of diffusion processes for image filtering. We show that purely nonlinear diffusion processes ruled by Fisher equation allows contrast enhancement and noise filtering, but involves a blurry image. By contrast, anisotropic diffusion, described by Perona and Malik algorithm, allows noise filtering and preserves the edges. We show that combining the properties of anisotropic diffusion with those of nonlinear diffusion provides a better processing tool which enables noise filtering, contrast enhancement and edge preserving.

1 Introduction

Ces dernières années, de nombreux sujets de recherche ont porté sur l'étude des systèmes non linéaires. En effet, les équations différentielles qui décrivent ces systèmes permettent de rendre compte d'un très grand nombre de phénomènes naturels allant du comportement de la surface des océans, aux mécanismes de transport dans les cellules vivantes [1]. Plus récemment, ces mêmes équations différentielles ont su trouver des applications insoupçonnées dans le domaine du traitement d'images sous l'appellation de méthodes non conventionnelles de traitement [2]. Parmi ces systèmes d'équations, on peut citer le système de réaction-diffusion suivant:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= D_u \Delta u + F(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= D_v \Delta v + G(u, v).\end{aligned}\quad (1)$$

où Δ représente le Laplacien, u et v sont les concentrations de l'activateur et de l'inhibiteur tandis que D_u et D_v sont les constantes de diffusion. F et G permettent de décrire le taux de production de l'activateur et de l'inhibiteur. Dans le cas où $F(u, v) = \beta u(u - a)(1 - u) - v$ et $G(u, v) = u - bv$, le système (1) correspond à celui de Fitzhugh-Nagumo et a permis la détection de contours d'images bruitées [3]. D'autres modèles de fonction F et G ont pu être considérés tel que le modèle de Brusselator pour réaliser de la synthèse de texture [4, 5], ou encore le modèle d'Oregonator pour réaliser des opérations de morphologie mathématique [2]. Dans cette communication, nous focaliserons sur des opérations de réhaussement de contraste et de filtrage du bruit en ne considérant que la première équation du système (1) lorsque la fonction F ne

dépend pas de v .

En ce qui concerne le filtrage du bruit, au début des années 90, Perona et Malik ont proposé un algorithme non conventionnel de filtrage du bruit s'appuyant sur des équations différentielles modélisant un processus de diffusion anisotrope [6]. Ces 20 dernières années, cet algorithme a servi de référence puisqu'il a été largement utilisé pour effectuer de l'analyse d'images médicales [7], de la restauration d'images astronomiques [8], pour ne citer que quelques exemples. Je me propose de présenter un nouvel algorithme de traitement basé sur un processus de diffusion anisotrope et non linéaire et de le comparer à l'algorithme existant de Perona et Malik. Dans un souci de clareté, je présente dans un premiers temps, chacun des 4 algorithmes de traitement inspirés des processus de diffusion suivants: diffusion linéaire, diffusion purement non linéaire, diffusion purement anisotrope, diffusion anisotrope et non linéaire. Ce plan permettra au lecteur de mieux comprendre comment l'algorithme de Perona et Malik peut être complété pour inclure une non linéarité qui permet le réhaussement du contraste.

2 Les différents processus de diffusion

Parmi les EDPs linéaires, c'est l'équation de diffusion de la chaleur qui a tout d'abord retenu l'attention des chercheurs. Cette dernière, qui décrit l'évolution de la température X en un point de l'espace de coordonnées (x, y) peut s'exprimer sous la forme:

$$\frac{\partial X(x, y, t)}{\partial t} = D \Delta X. \quad (2)$$

Bien évidemment, dans un contexte de traitement d'image, X représente le niveau de gris d'une image continue. Cependant,

en raison du caractère intrinsèquement discret des images, l'équation (2) peut être discrétisée pour obtenir :

$$X_{i,j}^{t+dt} = X_{i,j}^t + D \frac{dt}{|N_r|} \sum_{(k,l) \in N_r} (X_{k,l}^t - X_{i,j}^t),$$

$$i, j = 1 \dots N, 1 \dots M, \quad (3)$$

avec $N_r = \{(i, j - 1); (i, j + 1); (i - 1, j); (i + 1, j)\}$.

Dans l'équation précédente, $N \times M$ représente la taille de l'image, i, j les indices du pixel de l'image à traiter et N_r représente l'ensemble des voisins, c'est à dire 4 voisins adjacents sauf pour les 4 côtés et les 4 coins de l'image qui ont respectivement 3 et 2 voisins. dt représente le pas d'intégration de l'équation différentielle, et t le temps. L'image que l'on souhaite traiter est appliquée comme condition initiale dans l'équation (4) et correspond donc au temps $t = 0$, tandis que l'image traitée à l'instant $t \neq 0$ s'obtient en relevant l'état du système d'équations différentielles à cet instant t .

On peut donc dire que ce traitement est itératif, comme tous ceux qui seront envisagés. Le comportement de ce filtre linéaire est assez connu. En fait, ce filtre possède un comportement passe-bas qui peut sembler adapté pour le filtrage du bruit. Cependant, comme le montre la figure 1, l'image filtrée devient floue du fait de la nature isotrope du filtre étudié. Par ailleurs, l'amplitude du profil de la ligne 50 n'est pas amplifiée; ce qui traduit le fait que le contraste de l'image n'est pas réhaussé.

3 Diffusion non linéaire

Le traitement précédent s'appuyait sur un processus linéaire car décrit par l'équation de propagation de la chaleur. Dans ce paragraphe, je considère l'équation de Fisher qui permet entre autre de modéliser les mécanismes de transports dans les cellules vivantes [1], mais également de réhausser le contraste et segmenter des images [9, 10]. Cette équation s'écrit

$$\frac{\partial X(x, y, t)}{\partial t} = D \Delta(X) + f(X), \quad (4)$$

où D représente le coefficient de diffusion et $f(X)$ une non linéarité qui s'exprime le plus souvent sous la forme cubique suivante:

$$f(x) = -\beta x(x - a)(x - 1). \quad (5)$$

Dans l'eq. (5), β ajuste le poids de la non linéarité puisque si β est nul, l'eq. (4) tends vers l'eq. (2). Le processus devient linéaire.

Par ailleurs, a est appelé seuil de la non linéarité et est ajusté à $a = 1/2$ pour assurer la symétrie de la non linéarité [10]. Pour effectuer du traitement d'image, une discrétisation avec un pas temporel dt permet d'obtenir l'algorithme itératif de traitement

$$X_{i,j}^{t+dt} = X_{i,j}^t + \frac{dt}{|N_r|} D \sum_{(k,l) \in N_r} (X_{k,l}^t - X_{i,j}^t) + dt f(X_{i,j}^t). \quad (6)$$

Du fait de l'isotropie de ce processus, les résultats obtenus aux figures 2(a),(b) et (c) montrent que l'image résultante est floue

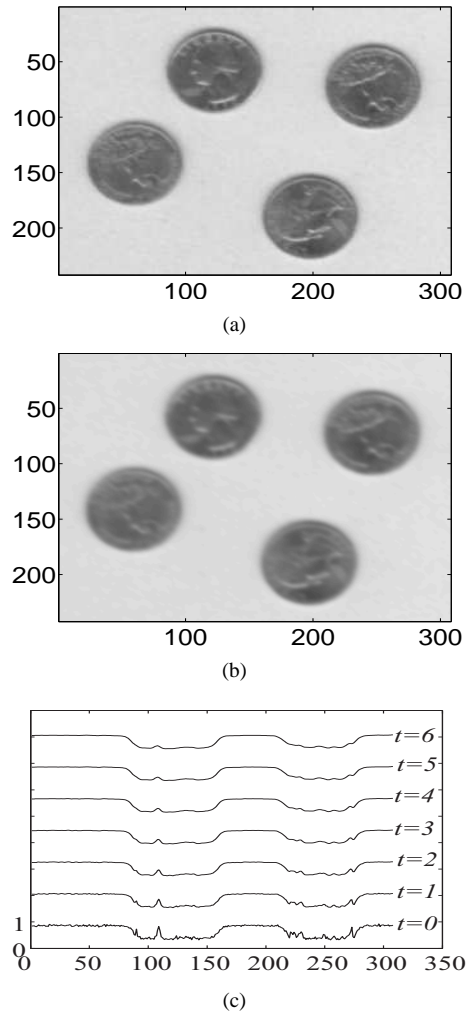


FIG. 1: Traitement avec un processus de diffusion linéaire isotrope. (a) et (b) images filtrées pour les temps de traitement $t = 2$ et $t = 6$. (c) Profile de la ligne 50 pour différents temps de traitement. Paramètres: $dt = 0.01$, $D = 1$.

et que l'on perd l'information sur les contours. Cependant, le profile de la ligne 50 obtenu pour différent temps de traitement a pu montrer que l'amplitude du profile est plus importante que celle obtenu avec le processus linéaire précédent [10].

4 Diffusion purement anisotrope

Les outils de traitement précédent étaient basés sur un processus de diffusion isotrope. Je rapelle ci après brièvement l'algorithme de Peronna et Malik qui introduit l'anisotropie pour palier aux problèmes inhérent aux algorithmes précédent [6, 11]. L'équation continue qui régit ce processus anisotrope de diffusion peut se mettre sous la forme

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \text{div}(D \nabla X), \quad (7)$$

où div représente la divergence et ∇X le gradient. Si le coefficient de diffusion D est constant, l'eq. (7) se ramène à l'eq.

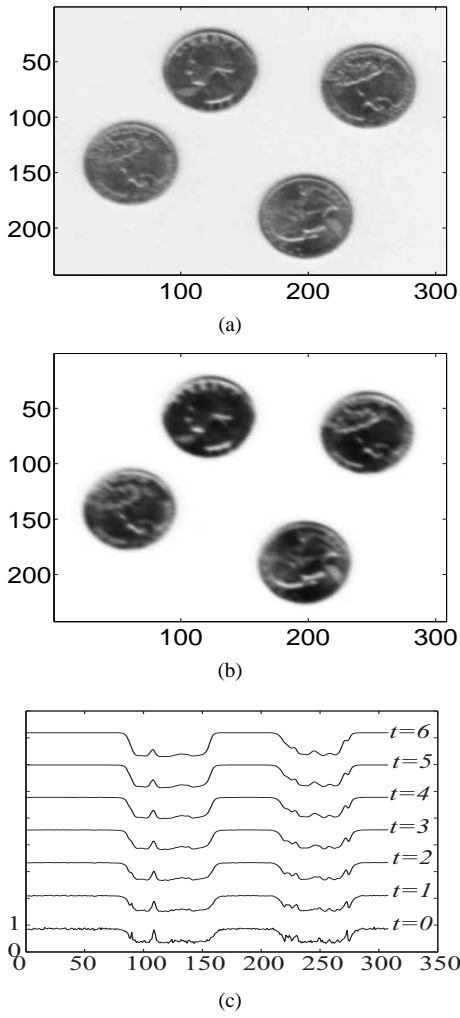


FIG. 2: *Traitement avec un processus non linéaire de diffusion.* (a) et (b) Images filtrées pour les temps de traitement $t = 2$ et $t = 6$. (c) Profile de la ligne 50 pour différents temps de traitement. Paramètres: $dt = 0.01$, $\beta = 1$, $D = 1$.

(2) qui décrit un processus linéaire de diffusion. Perona et Malik ont proposé de remplacer le coefficient de diffusion D par une fonction dépendant de l'amplitude du gradient comme la fonction de Lorentz suivante

$$g(\|\nabla X\|) = \frac{D}{1 + \left(\frac{\|\nabla X\|}{\sigma}\right)^2}, \quad (8)$$

où σ est un paramètre qui est ajusté pour préserver les contours de l'image. Conformément à [11], ce paramètre vaut $\sigma = 0.03783$ pour l'image normalisée dans l'intervalle $[0; 1]$ que nous souhaitons traiter. En remarquant que $X_{k,l}^t - X_{i,j}^t$ permet d'approximer le gradient local pour $(k, l) \in N_r$, Perona et Malik ont pu proposer une approximation discrète de l'eq. (7). L'algorithme de traitement peut ainsi s'exprimer sous la forme

$$X_{i,j}^{t+dt} = X_{i,j}^t + \frac{dt}{|N_r|} \sum_{(k,l) \in N_r} g(\|X_{k,l}^t - X_{i,j}^t\|) \times (X_{k,l}^t - X_{i,j}^t). \quad (9)$$

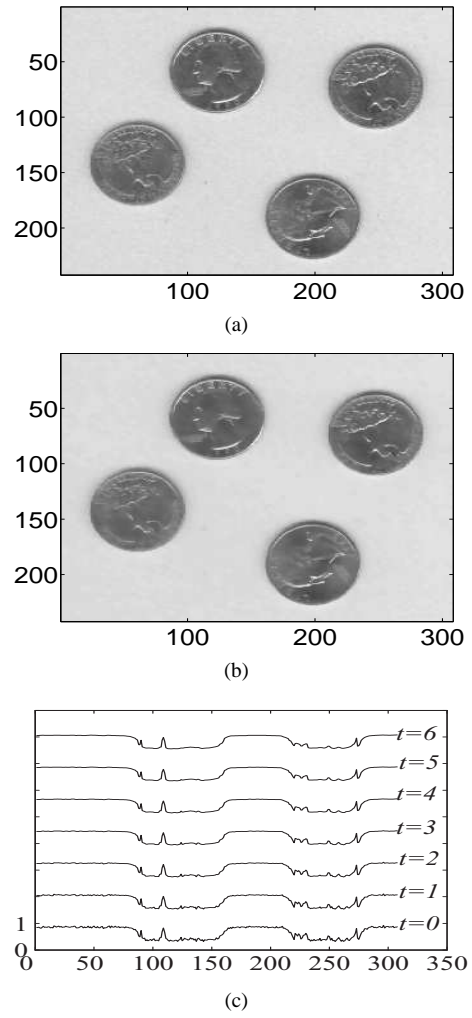


FIG. 3: *Traitement avec un processus de diffusion anisotrope.* (a) et (b) Images filtrées pour les temps de traitement $t = 2$ et $t = 6$. (c) Profile de la ligne 50 pour différents temps de traitement. Paramètres: $dt = 0.01$, $\sigma = 0.03783$

D'après l'eq. (8), quand le gradient local est très faible devant σ , le coefficient de diffusion tend vers D . Au contraire quand $\|\nabla X\|/\sigma \gg 1$, le coefficient de diffusion tend vers 0 et la diffusion est stoppée. Par conséquent, l'effet principale de ce filtre anisotrope est d'adapter la diffusion. Pour les régions homogènes de l'image, c'est à dire de faible gradient, le coefficient de diffusion sera augmenté tandis que les zones de fort gradient, correspondant aux contours de l'image, seront traitées avec un coefficient de diffusion plus faible. Les résultats obtenus avec ce filtre anisotrope sont présentés aux figures 3. (a), (b) et (c). Du fait de l'anisotropie, on observe effectivement l'élimination du bruit de l'image et le maintien des contours pour les temps de traitement présentés.

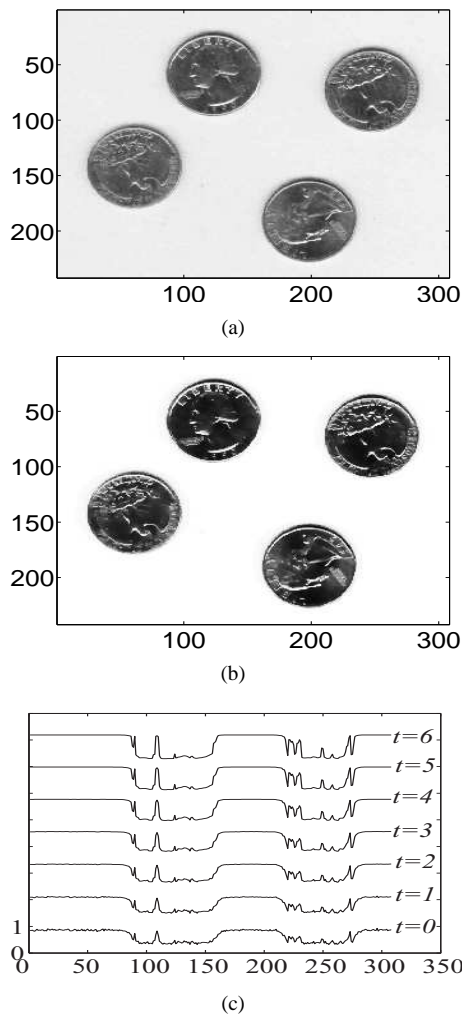


FIG. 4: Traitement avec un processus anisotrope et non linéaire de diffusion. (a) et (b) Images filtrées pour les temps de traitement $t = 2$ et $t = 6$. (c) Profile de la ligne 50 pour différents temps de traitement. $dt = 0.01$, $\sigma = 0.03783$, $\beta = 1$, $D = 1$.

5 Processus de diffusion anisotrope et non linéaire

Dans ce dernier paragraphe, j'introduis l'anisotropie dans le processus de diffusion non linéaire pour obtenir un filtre qui combine les avantages de ces 2 processus de diffusion. Je considère donc l'équation continue suivante

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \text{div}(g(\|\nabla X\|)\nabla X) + f(X), \quad (10)$$

où la fonction non linéaire f obéit à l'éq. (5) et où l'anisotropie est introduite via la fonction de Lorentz (8).

L'équation discrète qui permet de réaliser du traitement d'images peut alors être déduite de l'éq. (10) sous la forme:

$$X_{i,j}^{t+dt} = X_{i,j}^t + dt \left[\frac{1}{|N_r|} \sum_{(k,l) \in N_r} g(\|X_{k,l}^t - X_{i,j}^t\|) \right.$$

$$\left. \times (X_{k,l}^t - X_{i,j}^t) + f(X_{i,j}^t) \right]. \quad (11)$$

Quand le paramètre β de la non linéarité f est nul, le processus est équivalent à un processus purement anisotrope, tandis que quand le paramètre σ de la fonction g est très grand, le processus devient purement non linéaire mais complètement isotrope. Les figures 4.(a), (b) et (c) permettent de comparer notre algorithme avec les précédents. D'après les profils présentés à la fig. 4.(c), on s'aperçoit que le contraste de l'image est amélioré, certains détails des pièces de l'image étant réhaussés à certains instants. De plus, le bruit est parfaitement bien filtré.

6 conclusion

Dans cette communication, un nouvel algorithme a été présenté afin de réaliser le filtrage du bruit et le réhaussé d'une image, tout en conservant les contours de l'image. Comme ce fut le cas pour l'algorithme de Peronna et Malik, l'étude théorique des propriétés et de la stabilité de ce nouveau modèle reste à conduire et fera l'objet d'une étude futur.

Références

- [1] J.D. Murray. *Mathematical biology*, Springer, Berlin 1989.
- [2] C. Teuscher and A. Adamatzky, In *Proc. of the 2005 Workshop on Unconventional Computing From cellular Automata to Wetwar*, Luniver Press Beckington, 2005.
- [3] M. Ebihara, H. Mahara, T. Sakurai, A. Nomura and H. Miike In *Proceedings Visualization, Imaging and image processing (VIIP 2003)*, Benalmádena, Spain, 8-10, september 2003
- [4] A. Witkin and M. Kass In *Computer Graphics, Proceedings Siggraph 91*, 25(1):299-308, July 1991.
- [5] A.R. Sanderson, M. Kirby, C.R. Johnson and L. Yang In *Journal of graphics tools*, 11(3):47-71, 2006
- [6] P. Perona and J. Malik In *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, Vol. 12 pp.629-639, 1990.
- [7] J. Weickert, Bart M. ter Haar Romeny and Max A. Viergever. In *IEEE Trans. on Image Processing*, Vol. 7 pp.398-410, 1998.
- [8] Shin-Min Chao and Du-Ming Tsai. In *Pattern Recognition Letters*, Vol. 27 pp.335-344, 2006.
- [9] S. Morfu, B. Nofiele and P. Marquié. In *Phys. Lett. A*, Vol. 367 pp. 192-198, 2007.
- [10] S. Morfu, P. Marquié, B. Nofiele and D. Gin hac. In *Advances In Imaging and Electron Physics, Elsevier*, Vol. 152 pp. 79-153, 2008.
- [11] M. J. Black, G. Sapiro, D. H. Marimont and D. Heeger In *IEEE Trans. on Image Processing*, Vol. 3, 421-432, 1998.