

Morphologie Mathématique sur graphes pondérés de topologie arbitraire – Traitements non locaux d’images et de données multi-variées

Vinh-Thong TA, Abderrahim ELMOATAZ, Olivier LÉZORAY

Université de Caen Basse-Normandie, ENSICAEN, GREYC UMR CNRS 6072, Équipe Image
6 Boulevard Maréchal Juin, 14050 CAEN Cedex, FRANCE

{vinhthong.ta, abderrahim.elmoataz-billah, olivier.lezoray}@unicaen.fr

Résumé – La morphologie mathématique offre un large panel d’opérateurs pour appréhender divers problèmes de traitement d’image. Les traitements morphologiques peuvent être définis en terme d’opérations algébriques sur des ensembles ou en terme d’équations aux dérivées partielles (EDP). Dans ce contexte, nous proposons une nouvelle approche de la morphologie mathématique en introduisant un cadre formel basé sur des équations aux différences partielles (EdP) définies sur des graphes de topologie arbitraire. Ce formalisme définit à l’aide des graphes permet de retrouver les formulations basées sur les EDP ainsi que les formulations algébriques. Notre méthodologie permet de généraliser ces deux approches pour le traitement non local des images, ainsi que de les étendre aux traitements de données non-organisées et multi-variées.

Abstract – Mathematical morphology offers a wide range of operators to address various image processing problems. These processing can be defined in terms of algebraic set or as partial differential equations (PDEs). In this paper, a novel approach is formalized as a framework of partial difference equations (PdEs) on weighted graphs. We introduce morphological operators in local and nonlocal configurations. Our framework recovers classical local algebraic and PDEs-based morphological methods in image processing context; generalizes them for nonlocal configurations and extends them to the treatment of any arbitrary discrete data that can be represented by a graph.

1 Introduction

Les deux opérateurs fondamentaux de la morphologie mathématique (MM) sont la *dilatation* et l’*érosion*. Ils sont habituellement formulés comme des opérations sur des ensembles ou des treillis et leurs implantations sont habituellement faites dans un cadre algébrique (discret) [8, 10]. Des formulations alternatives basées sur des équations aux dérivées partielles (EDP) ont également été proposées [2, 7]. Ces dernières formulations montrent que la dilatation δ et l’érosion ε d’une fonction $f^0 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ par un ensemble d’éléments structurants $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p \leq 1\}$ peuvent être générées par les EDP suivantes

$$\delta(f) = \partial_t f = +\|\nabla f\|_p \text{ et } \varepsilon(f) = \partial_t f = -\|\nabla f\|_p. \quad (1)$$

Contributions. Nous étendons les formulations basées sur les EDP pour obtenir des schémas discrets non locaux en définissant des opérateurs morphologiques basés sur des équations aux différences partielles (EdP) sur graphes pondérés.

La formulation proposée comporte plusieurs avantages. Notre approche intègre directement dans un même formalisme les traitements locaux et non locaux pour les images. Les traitements non locaux des images sont connues pour le débruitage et la restauration des images. Nous introduisons ces méthodes dans le cadre des traitements morphologiques. Notre méthodologie étant définie sur des graphes de topologie arbitraire, nous

pouvons appliquer nos opérateurs morphologiques pour traiter n’importe quelles données discrète pouvant être représentées par un graphe (notamment les données multi-variées définies sur des domaines irréguliers).

2 Définitions et notations

Soit $G = (V, E, w)$, un *graphe pondéré* défini par un ensemble V de *sommets*, un sous-ensemble $E \subset V \times V$ d’*arêtes*. Une arête $uv \in E$ connecte deux sommets adjacents (voisins) u et v . Le *poids* d’une arête, noté w_{uv} , représente la similarité entre les sommets. Les similarités peuvent être définies par une fonction de poids symétrique $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfaisant : $w_{uv} = 0$ si $uv \notin E$. Nous définissons également une fonction $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur les sommets de G et notons par $\mathcal{H}(V)$, l’espace d’Hilbert de ces fonctions.

Tout domaine discret peut être modélisé par un graphe pondéré où les fonctions $f \in \mathcal{H}(V)$ représentent les données à traiter. Un ensemble de points $V \subset \mathbb{R}^m$ peut être vu comme étant une fonction $f : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ et construire un graphe à partir de cet ensemble consiste à définir les arêtes E en modélisant le voisinage du graphe. Cette construction est basée sur une mesure de distance $\mu : E \rightarrow \mathbb{R}^+$. Dans cet article, nous utilisons deux graphes de voisinage : le graphe de τ -voisinage, noté G_τ et le graphe des k plus proches voisins, noté

k -ppv. Le k -ppv est un graphe où chaque sommet est connecté à ses k plus proches voisins relativement à μ . Le graphe G_τ est un graphe où le voisinage τ pour un sommet u est défini comme $N_\tau = \{v \in V : \mu_{uv} < \tau\}$ (avec τ un paramètre de seuil). Avec ce graphe et pour le cas des images 2D, en utilisant la distance «city-block» nous obtenons le graphe grille en 4-voisinage (noté G_0) et avec la distance de Chebychev, nous avons le graphe grille en 8-voisinage (noté G_1).

Les similarités entre les données peuvent être incorporées dans le poids des arêtes grâce à une fonction $g : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ tel que $w_{uv} = g_{uv}$. La distance entre les données est alors calculée en comparant leurs vecteurs d'attributs $F(f^0, u) \in \mathbb{R}^m$ dépendent généralement d'une fonction initiale $f^0 \in \mathcal{H}(V)$. Avec F , les fonctions de poids suivantes peuvent être utilisées : $g_0 = 1$ (poids constant), $g_1 = \|F(f^0, u) - F(f^0, v)\|_2^{-1}$ et $g_2 = \exp(-\|F(f^0, u) - F(f^0, v)\|_2^2 / \sigma^2)$ (avec σ un paramètre d'échelle). La fonction F peut être exprimée de plusieurs manières, le choix le plus simple étant $F(f^0, \cdot) = f^0$. Pour le traitement des images, une manière de définir ce vecteur en chaque sommet est de considérer des patches dans l'image tel que $F(f^0, u) = F_\tau(f^0, u) = \{f^0(v) : v \in N_\tau(u) \cup \{u\}\}$. Dans le cas d'une image de niveaux de gris, la dimension de F est $(2\tau + 1)^2$ où chaque élément du vecteur correspond aux valeurs de f^0 dans une fenêtre de taille $(2\tau + 1) \times (2\tau + 1)$ centrée sur le sommet u . Cette idée a été proposée dans le cadre de la synthèse d'image [4], et plus récemment pour le débruitage et la restauration d'image [3,5,6]. L'utilisation de telles méthodes constitue une nouveauté dans le traitement morphologique des images [11].

3 Une famille de gradients morphologiques

Nous définissons respectivement les gradients morphologiques *externe* et *interne* sur graphe pour un sommet u [11] :

$$\begin{aligned} (\nabla_w^+ f)(u) &= (\max(0, w_{uv}^{1/2}(f(v) - f(u))))_{uv \in E} \quad \text{et} \\ (\nabla_w^- f)(u) &= (-\min(0, w_{uv}^{1/2}(f(v) - f(u))))_{uv \in E} . \end{aligned}$$

Les normes \mathcal{L}_p associées au gradient externe, avec $0 < p < +\infty$ et $p = \infty$, sont alors

$$\begin{aligned} \|(\nabla_w^+ f)(u)\|_p &= \left(\sum_{v \sim u} w_{uv}^{p/2} \max(0, Df(u))^p \right)^{1/p} \quad \text{et} \\ \|(\nabla_w^+ f)(u)\|_\infty &= \max_{v \sim u} (w_{uv}^{1/2} \max(0, Df(u))) \end{aligned} \quad (2)$$

où $Df(u) = f(v) - f(u)$ et $v \sim u$ signifie que v est voisin de u . Les mêmes définitions sont valables pour le gradient interne.

On peut noter que ces définitions sont valables quelque soit la topologie du graphe et incluent les configurations locales et non locales.

Remarques : dans le cas où $p = \infty$ et $w = 1$, à partir des équations (2), nous retrouvons les formulations algébriques [9] des gradients externe $\|(\nabla_w^+ f)(u)\|_\infty = \delta(f)(u) -$

$f(u)$ et interne $\|(\nabla_w^- f)(u)\|_\infty = f(u) - \varepsilon(f)(u)$. Immédiatement, nous obtenons les formulations algébriques morphologiques du gradient $\|(\nabla_w^+ f)(u)\|_\infty + \|(\nabla_w^- f)(u)\|_\infty$ et du Laplacien $\|(\nabla_w^+ f)(u)\|_\infty - \|(\nabla_w^- f)(u)\|_\infty$.

4 Dilatation et érosion sur graphe

L'objectif est de trouver les analogues discrets sur graphes des équations (1). Pour cela nous définissons les *bords externe* $\partial^+ \mathcal{A}$ et *interne* $\partial^- \mathcal{A}$ d'un ensemble $\mathcal{A} \subset V$, respectivement par $\{u \in \mathcal{A}^c : \exists v \in \mathcal{A}, uv \in E\}$ et $\{u \in \mathcal{A} : \exists v \in \mathcal{A}^c, uv \in E\}$. À partir de ces définitions, nous pouvons démontrer l'existence de liens entre les gradients externe et interne et les bords correspondants [11]. Intuitivement, une dilatation de \mathcal{A} revient à une opération de croissance qui ajouterait des sommets de $\partial^+ \mathcal{A}$ vers \mathcal{A} . Par dualité, une érosion de \mathcal{A} peut être vu comme un processus de contraction qui enlèverait des sommets de $\partial^- \mathcal{A}$. Une simple interprétation variationnelle permet de déduire que la dilatation correspond à *maximiser* un gain de surface proportionnellement à $+\|\nabla_w^+ f\|_p$. De même, une érosion correspond à *minimiser* ce gain par rapport à $-\|\nabla_w^- f\|_p$. Finalement, les versions discrètes sur graphe de topologie arbitraire des équations (1) sont

$$\delta(f) = \partial_t f = +\|\nabla_w^+ f\|_p \quad \text{et} \quad \varepsilon(f) = \partial_t f = -\|\nabla_w^- f\|_p . \quad (3)$$

La résolution de l'équation d'évolution de la dilatation (3) peut donner lieu à l'algorithme semi-discret suivant, $\forall u \in V$

$$f^{n+1}(u) = f^n(u) + \Delta t \|\nabla_w^+ f^n(u)\|_p \quad (4)$$

avec $f^{(0)}(u) = f^0(u)$ comme condition initiale.

Remarques : dans le cas où $p = 2$, $w = g_0 = 1$ avec un graphe grille en 4-voisinage, l'algorithme (4) correspond au schéma exact de discrétisation d'*Osher-Sethian* utilisé par les approches basées sur les EDP dans le cadre des images en niveaux de gris [2]. Dans le cas où $p = \infty$, $w = 1$ et $\Delta t = 1$ alors l'algorithme (4) correspond à la *formulation algébrique* d'une dilatation sur graphe : $f^{n+1} = \max_{v \sim u} (f^n(v), f^n(u))$. Dans ce cas, l'élément structurant est défini par la topologie du graphe. Par exemple, si nous utilisons le graphe G_1 , cela revient à une dilatation dont l'élément structurant serait un carré de taille 3×3 .

5 Résultats

Le but des expérimentations suivantes n'est pas de résoudre un problème particulier en traitement d'images ou de données multi-variées, mais de montrer le potentiel de la méthodologie, notamment pour le traitement morphologique non local des images et celui des données définies sur des domaines irréguliers.

Traitements morphologiques non locaux avec patches. La figure 1 présente une des nouveautés de notre approche : l'intégration des traitements non locaux à base de patches dans les opérations morphologiques. Les traitements non locaux sont

connus dans les domaines de la synthèse, du débruitage et de la restauration des images [3, 5, 6], mais ne sont pas étudiés tant par les approches morphologiques algébriques que celles basées sur les EDP.

La figure 1 montre le résultat des opérations de dilatation (δ) et de fermeture ($\varepsilon(\delta)$) sur des images comportant des structures fines et répétitives. Elle compare également les configurations locales (approches classiques) et les configurations non locales (notre approche). Les images sont vues comme des fonctions $f^0 : V \subset \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ où les sommets du graphe considéré sont définis par les niveaux de gris des pixels. Les résultats sont obtenus avec le paramètre $p = 2$. Les résultats des figures 1(b) et 1(e) sont obtenus en utilisant un graphe G_0 non pondéré ($w = g_0$ et $F = f^0$) ce qui correspond aux approches de la littérature. Les résultats des figures 1(c) et 1(f) montrent notre approche avec des configurations non locales basées sur des patches. Les graphes associés à ce type de traitement sont : un graphe G_2 pondéré par $w = g_2$ avec des patches $F_2(f^0, \cdot)$ pour le cas de la dilatation et un graphe des 10-ppv non pondéré ($w = g_0$) où les voisins d'un sommet u sont situés dans une fenêtre de recherche de taille 21×21 (centré sur u). Des patches de taille 7×7 sont utilisés pour déterminer la distance entre u et ses voisins.

Les résultats montrent clairement le bénéfice des traitements non locaux dans la préservation des informations de contours et de textures (effets non destructifs). En effet, les configurations non locales capturent de manière plus efficace les similarités entre les pixels.

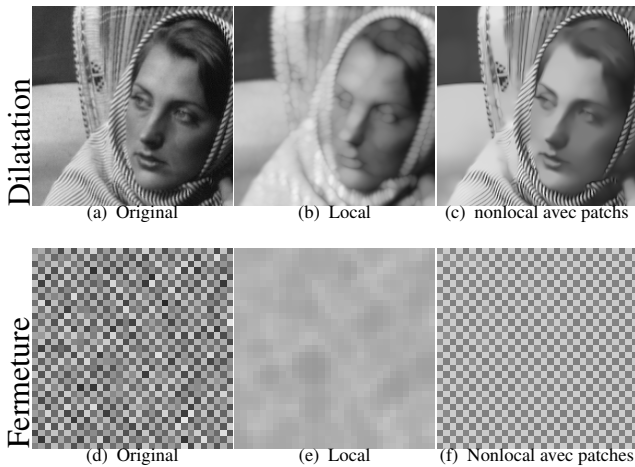


FIG. 1 – Traitements morphologiques non locaux avec patches pour des images. (a) et (d) : images originales. (b) et (e) : traitements locaux (approches classiques). (c) et (f) : traitements non locaux avec patches (voir le texte pour plus de détails).

Traitements morphologiques de données non-organisées et multi-variées. Que cela soit en morphologie mathématique algébrique ou celle basée sur les EDP, il n'y a pas de formulations satisfaisantes pour le traitement morphologique des données non-organisées et de grande dimension. Les approches algébriques nécessitent la définition d'un treillis complet, ce qui

est difficile pour les données multi-variées. En ce qui concerne les méthodes basées sur les EDP, la discrétisation spatiale est difficile pour des données définies sur des domaines irréguliers.

Un des avantages de notre approche est qu'elle permet de considérer des graphes de topologie arbitraire. De ce fait, nous pouvons donc utiliser nos opérateurs pour traiter des données multi-variées définies sur des domaines irréguliers. La figure 2 illustre l'application d'opérations morphologiques : dilatation (δ), érosion (ε), et ouverture ($\delta(\varepsilon)$) sur une base d'images. Les données proviennent de la base USPS contenant des images de chiffres manuscrits allant du chiffre 0 au chiffre 9. Chaque image est de taille 16×16 pixels. Les figures 2(a) et 2(e) présentent deux jeux de tests différents provenant de la base originale. Le graphe associé à chaque jeu de tests est un 8-ppv pondéré par $w = g_2$. Il est à noter que chaque sommet du graphe représente une image et que le vecteur d'attributs F est de dimension 256 ($\mathbb{R}^{16 \times 16}$). Les figures 2(b) et 2(f) montrent les résultats d'une dilatation, 2(c) et 2(g) montrent les résultats d'une érosion et, 2(d) et 2(h) montrent les résultats d'une ouverture. Nous pouvons observer les effets de la dilatation et de l'érosion, mais plus particulièrement ceux de l'opération d'ouverture qui filtre les données et crée de nouveaux modèles pour chaque chiffre. Finalement, ces traitements peuvent servir comme étape de pré-traitement et de simplification facilitant ainsi des méthodes de classification ou de regroupement.

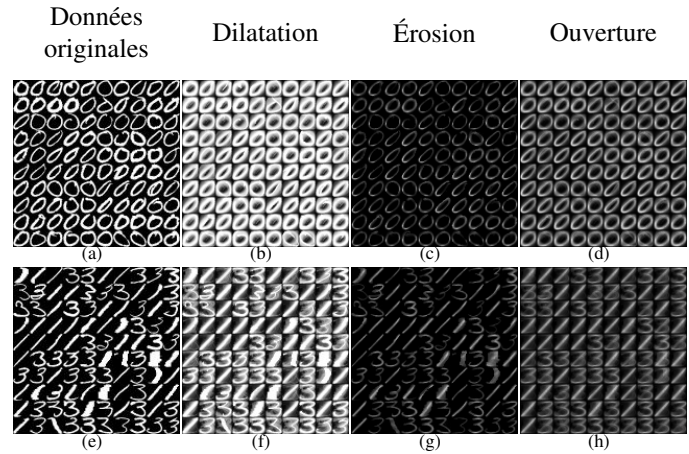


FIG. 2 – Traitements de données non-organisées et multi-variées. Chaque sommet du graphe est défini par un vecteur appartenant à $\mathbb{R}^{16 \times 16}$ (voir le texte pour plus de détails).

Segmentation non locale d'images. Basée sur les processus morphologiques présentés dans cet article, nous avons proposé une adaptation de l'équation eikonale pour des graphes de topologie arbitraire. À partir de cette adaptation, nous avons proposé des schémas interactifs (i.e. guidés par l'utilisateur) de segmentation non locale basée sur des patches. pour des graphes de pixels et de régions représentant les images. Le lecteur intéressé par plus de détails notre adaptation de l'équation eikonale et les schémas de segmentation peut se référer à [12].

La figure 3 montre des résultats de nos schémas interactifs

de segmentation pour des images. Bien que les méthodes non locales ont montré leur efficacité pour le débruitage et la restauration des images, la segmentation non locale est très peu étudiée dans la littérature [1, 6]. Nos approches permettent tout naturellement d'étendre nos schémas de segmentation basés sur des processus morphologiques aux configurations non locales. Les figures 3(a) à 3(c) montrent un exemple de segmentation interactive non locale basée sur des patches.

La figure 3(a) correspond à une image de texture bruitée avec en superposition les marqueurs initiaux (rouge pour l'objet à extraire et vert pour le fond). La segmentation est réalisée avec le gradient de l'image originale (comme image de potentiel). La figure 3(b) correspond à l'approche classique, c'est-à-dire avec un graphe G_0 non pondéré ($w = g_0$ et $F = f^0$). La figure 3(c) correspond à notre segmentation non locale avec des patches, c'est-à-dire avec un graphe $G_0 \cup 4\text{-ppv}$ pondéré par $w = g_2$ et avec $F = F_3(f^0, \cdot)$. Cet exemple montre clairement le bénéfice des configurations non locales permettant ainsi d'extraire l'objet désiré.

Un des avantages de notre méthode de segmentation est qu'elle est valable pour des graphes de topologie arbitraire. Les figures de 3(d) à 3(g) montrent l'utilisation d'un graphe de régions à la place d'un graphe de pixels. Le graphe utilisé ici est un graphe d'adjacence des régions couplé avec un 4-ppv pondéré par la $w = g_2$ et construit à partir d'une partition (figure 3(e)) de l'image originale. Les résultats montrent les avantages de changer la topologie du graphe : (i) la capacité de segmenter des objets non spatialement connexes avec un minimum de marqueurs initiaux et la robustesse de la méthode vis-à-vis du positionnement de ces marqueurs (figures 3(f) et 3(g)); (ii) une accélération du processus de segmentation du fait de la réduction du nombre de sommets à traiter (ici 98.5% de réduction en terme de sommets par rapport à un graphe de pixels).

6 Conclusion

Nous présentons dans cet article une nouvelle formulation de la MM basée sur des graphes de topologie arbitraire. Notre approche unifie et étend les méthodes algébriques et celles basées sur les EDP. Cette formulation permet de réaliser des traitements morphologiques et des segmentations non locales d'images. Elle permet également de traiter n'importe quelles données discrètes pouvant être représentées par un graphe, telles que les données non-organisées et multi-variées.

Références

[1] X. Bresson and T. F. Chan. Non-local unsupervised variational image segmentation models. Report 08-67, UCLA, 2008.

[2] R. W. Brockett and P. Maragos. Evolution equations for continuous-scale morphological filtering. *IEEE TSP*, 42(12):3377–3386, 1994.

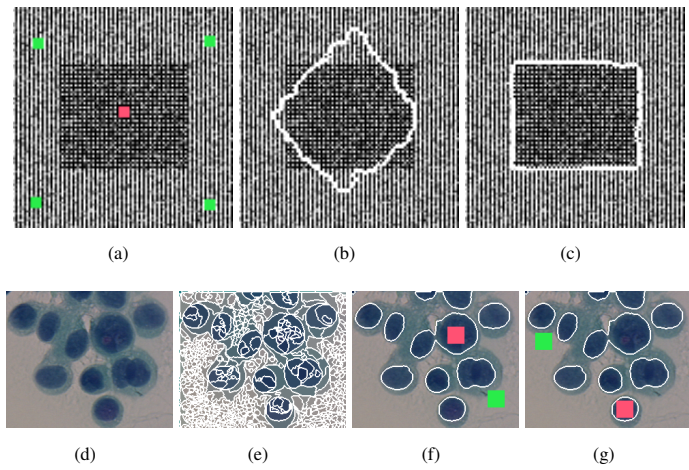


FIG. 3 – Segmentation non locale d'images. (a) : image originale + marqueurs initiaux. Résultats de segmentation par méthodes locales : (b) et non locales avec patches : (c). (d) : image originale. (e) : partition calculée à partir de (d) (98.5% de réduction en terme de sommets par rapport à (d)). (f) et (g) : segmentations finales + marqueurs initiaux (voir le texte pour plus de détails).

[3] A. Buades, B. Coll, and J.-M. Morel. Nonlocal image and movie denoising. *IJCV*, 76(2):123–139, 2008.

[4] A. A. Efros and T. K. Leung. Texture synthesis by non-parametric sampling. In *Proc. of ICCV*, volume 2, pages 1033–1038, 1999.

[5] A. Elmoataz, O. Lézoray, and S. Boughleux. Nonlocal discrete regularization on weighted graphs : A framework for image and manifold processing. *IEEE TIP*, 17(7):1047–1060, 2008.

[6] G. Gilboa and S. Osher. Nonlocal linear image regularization and supervised segmentation. *SIAM Multiscale Modeling and Simulation*, 6(2):595–630, 2007.

[7] F. Guichard, P. Maragos, and J.-M. Morel. *Partial Differential Equations for Morphological Operators*, volume 183, pages 369–390. Springer, 2007.

[8] F. Meyer and R. Lerallut. Morphological operators for flooding, leveling and filtering images using graphs. In *Proc. of GbR*, pages 158–167, 2007.

[9] J.-F. Rivest, P. Soille, and S. Beucher. Morphological gradients. *Jour. of Electronic Imaging*, 2(4):326–336, 1993.

[10] P. Soille. *Morphological Image Analysis, Principles and Applications*. Springer, 2002.

[11] V.-T. Ta, A. Elmoataz, and O. Lézoray. Partial difference equations over graphs : Morphological processing of arbitrary discrete data. In *Proc. of ECCV*, pages 668–680, 2008.

[12] V.-T. Ta, A. Elmoataz, and O. Lézoray. Adaptation of eikonal equation over weighted graphs. In *Proc. of SSVM*, 2009. to appear.