

Régions de taux atteignables pour le canal à interférence à relais

Brice DJEUMOU, Elena Veronica BELMEGA et Samson LASAULCE

Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS, Supélec, Paris Sud 11)
Supélec, 3 rue Joliot-Curie, 91192 Gif-sur-Yvette cedex, France

Adresse électronique

Résumé – Dans cet article nous nous intéressons à la détermination de débits de communication de Shannon pour le canal à interférence à relais (CIR). Ce modèle représente une brique de base d'un système dans lequel des utilisateurs doivent coexister sur la même bande de fréquence et peuvent également exploiter un nœud relais disponible afin d'accroître leurs débits de communication. Nous considérons deux stratégies de relayage à savoir décoder-et-transférer et estimer-et-transférer. En particulier, nous montrons qu'il existe au moins deux façons différentes de mettre en place la stratégie estimer-et-transférer dans le CIR. Nous analysons ensuite les performances de ces différentes stratégies dans le cas le cas gaussien en considérant un modèle spatial où les gains de canal représentent les effets d'affaiblissements à grande échelle.

Abstract – We analyse the performance of a system composed of two interfering point-to-point links where the transmitters can exploit a common relay to improve their individual transmission rates. This channel is known as the interference relay channel (IRC) and represents a system where users have to coexist in the same frequency band. We derive achievable rate regions when the relay uses either the decode-and-forward protocol or the estimate-and-forward (EF) protocol. In particular, we show that there are at least two ways to set the EF protocol in a two-user IRC. We finally analyse the performance of these relaying strategies in the Gaussian case assuming a spatial pathloss model.

1 Introduction

Dans cet article nous nous intéressons à la détermination de débits de communication de Shannon pour le canal à interférence à relais (CIR). Ce canal à été introduit par [1]. Il constitue une extension du canal à interférence (CI,[2]) dans le même sens que l'est le canal de diffusion à relais pour le canal de diffusion. Les travaux théoriques déjà élaborés portent principalement sur le canal à interférence. Sa région de capacité reste inconnue pour le cas général. Toutefois, cette région de capacité a été déterminée dans les cas discret et gaussien pour des cas particuliers tels que le canal à interférence avec une interférence dite *forte* (exemple de [3]). La borne intérieure de la région de capacité la plus connue est l'œuvre de Han et Kobayashi [4]. Concernant le CIR, dans [1], les auteurs déterminent une région de taux atteignables dans le cas gaussien lorsque le protocole de relayage est basé sur la stratégie DT (DT) de [5]. Toujours dans le cas gaussien, dans [6], ils considèrent la situation dans laquelle le relais connaît les messages des nœuds source de façon non-causale et applique ainsi une stratégie de codage combinant le *codage avec information adjacente* (dirty paper coding, DPC) et une suppression de l'interférence. Notre approche diffère de ces travaux dans la mesure où

1. contrairement à [1] et [6], nous considérons en plus le cas discret (plus général). Il a son importance car il permet de caractériser les systèmes pour lesquels les liens sont modélisés par des canaux binaires ou ternaires. Il est également pertinent en *codage de réseau* (network coding) où l'on s'intéresse aux paquets. Un autre avantage du cas discret est qu'avec des arguments de continuité, il

permet de retrouver le cas gaussien [7];

2. étant donné que la stratégie DT ne peut améliorer les performances du système uniquement si l'observation au relais est meilleure que celles aux nœuds destination, nous considérons également la stratégie ET (ET, [5]) et nous différencierons deux schémas : un premier à niveau résolution unique et un second à double niveau de résolution ;
3. nous considérerons uniquement un relais causal contrairement aux travaux de [6].

Dans la suite nous présentons nos différents théorèmes de codage pour le canal à interférence à relais dans les cas discret. Pour le cas gaussien, pour des raisons de place, nous ne traiterons que le protocole DT qui présente un intérêt particulier.

Nous considérons uniquement le CIR à deux utilisateurs constitué de deux nœuds sources (\mathcal{S}_1 and \mathcal{S}_2), un nœud relais (\mathcal{R}) et deux nœuds destinations (\mathcal{D}_1 and \mathcal{D}_2). Nous considérons également le cas des messages privés et communs afin d'appliquer des stratégies de codage similaires à celle de Han et Kobayashi [4] *i.e.* le nœud source \mathcal{S}_i transmet les messages commun $w_{i0} \in \mathcal{W}_{i0}$ et privé $w_{ii} \in \mathcal{W}_{ii}$. Chaque message commun étant décodé aux deux nœuds destination. Le taux de Shannon R_i au nœud destination \mathcal{D}_i est défini par $R_i = R_{i0} + R_{ii}$. Enfin, on définit la fonction capacité $C(x) = \log_2(1 + x)$.

Dans le cas discret, nous étudions le canal à interférence à relais discret sans mémoire, noté $(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_r, p(y_1, y_2, y_r | x_1, x_2, x_r), \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 \times \mathcal{Y}_r)$, composé de trois alphabets d'entrée de canal $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ et \mathcal{X}_r , de trois alphabets de

sortie de canal \mathcal{Y}_1 , \mathcal{Y}_2 et \mathcal{Y}_r , et d'une probabilité de transition $p(y_1, y_2, y_r | x_1, x_2, x_r)$ qui vérifie $p(y_1^n, y_2^n, y_r^n | x_1^n, x_2^n, x_r^n) = \prod_{i=1}^n p(y_{1,i}, y_{2,i}, y_{r,i} | x_{1,i}, x_{2,i}, x_{r,i})$.

Dans le cas gaussien, les signaux reçus par le relais et les nœuds destination s'écrivent $Y_r = h_{1r}X_1 + h_{2r}X_2 + Z_r$, $Y_1 = h_{11}X_1 + h_{21}X_2 + h_{r1}X_r + Z_1$ et $Y_2 = h_{22}X_2 + h_{12}X_1 + h_{r2}X_r + Z_2$ où Z_r , Z_1 et Z_2 sont des bruits gaussiens complexes centrés de variances respectives N_r , N_1 et N_2 . Les signaux émis respectent les contraintes de puissance $\mathbb{E}|X_1|^2 \leq P_1$, $\mathbb{E}|X_2|^2 \leq P_2$ et $\mathbb{E}|X_r|^2 \leq P_r$ et les h_{ij} , $(i, j) \in \{1, 2, r\}^2$, avec $j \neq r$ si $i = r$, représentent les gains de canal.

2 Stratégie décoder-et-transférer

Avec cette stratégie le relais décode les messages des deux nœuds source et coopère avec ceux-ci afin d'aider les nœuds destination à éliminer les incertitudes restantes sur les messages émis. Avec cette stratégie, une régions de taux atteignables est caractérisée par le théorème ci-dessous.

Théorème 2.1 Pour le CIR discret sans mémoire $(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_r, p(y_1, y_2, y_r | x_1, x_2, x_r), \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 \times \mathcal{Y}_r)$, tout quadruplet de taux $(R_{10}, R_{11}, R_{20}, R_{22})$ satisfaisant $\sum_{i \in \mathcal{I}} R_i \leq I(V_{\mathcal{I}}; Y_r | U_{\mathcal{S}}, X_r, V_{\mathcal{I}^c})$ pour tout $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{S}$, (1)

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_1} R_i \leq I(U_{\mathcal{I}_1}, V_{\mathcal{I}_1}; Y_1 | U_{\mathcal{I}_1^c}, V_{\mathcal{I}_1^c}) \text{ pour tout } \mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{S}_1,$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_2} R_i \leq I(U_{\mathcal{I}_2}, V_{\mathcal{I}_2}; Y_2 | U_{\mathcal{I}_2^c}, V_{\mathcal{I}_2^c}) \text{ pour tout } \mathcal{I}_2 \subseteq \mathcal{S}_2,$$

pour une certaine distribution de probabilité conjointe $p(u_{10})p(v_{10}|u_{10})p(u_{11})p(v_{11}|u_{11})p(x_1|v_{10}, v_{11})p(u_{20})p(v_{20}|u_{20})p(u_{22}) \times p(v_{22}|u_{22})p(x_2|v_{20}, v_{22})p(x_r|u_{10}, u_{11}, u_{20}, u_{22})$, est atteignable, où nous définissons les ensembles $\mathcal{S} = \{10, 11, 20, 22\}$, $\mathcal{S}_1 = \{10, 11, 20\}$ et $\mathcal{S}_2 = \{20, 22, 10\}$, et \mathcal{I}^c , \mathcal{I}_1^c et \mathcal{I}_2^c sont les compléments de \mathcal{I} , \mathcal{I}_1 et \mathcal{I}_2 respectivement dans \mathcal{S} , \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 . On a $V_{\mathcal{I}} = \{V_j, j \in \mathcal{I}\}$.

L'inégalité (1) correspond à la contrainte de décodage au relais. Celle-ci peut être particulièrement pénalisant surtout lorsque l'observation au relais est plus dégradée que celle aux nœuds destination. Ces trois inégalités montrent que le système est équivalent à la composition de trois canaux à accès multiple (MAC).

Dans le cas gaussien, nous traitons uniquement le cas des messages privés afin de montrer que l'analyse des régions de taux de Shannon obtenues fait appel à de nouvelles notions telles que la théorie des jeux. Ainsi, le corollaire suivant caractérise une région de taux atteignables.

Corollaire 2.2 Pour le canal à interférence à relais gaussien, avec la stratégie DT, la paire de taux (R_1, R_2) est atteignable, où

$$R_1 < \min \left\{ C \left(\frac{|h_{1r}|^2 \bar{\rho}_1 P_1}{N_r} \right), C \left(\frac{|h_{11}|^2 P_1 + |h_{r1}|^2 \alpha P_r + 2h_{11}h_{r1}^* \sqrt{\rho_1 P_1 \alpha P_r}}{|h_{21}|^2 P_2 + |h_{r1}|^2 \bar{\alpha} P_r + 2h_{21}h_{r1}^* \sqrt{\rho_2 P_2 \bar{\alpha} P_r} + N_1} \right) \right\} \quad (2)$$

$$R_2 < \min \left\{ C \left(\frac{|h_{2r}|^2 \bar{\rho}_2 P_2}{N_r} \right), C \left(\frac{|h_{22}|^2 P_2 + |h_{r2}|^2 \alpha P_r + 2h_{22}h_{r2}^* \sqrt{\rho_2 P_2 \alpha P_r}}{|h_{12}|^2 P_1 + |h_{r2}|^2 \bar{\alpha} P_r + 2h_{12}h_{r2}^* \sqrt{\rho_1 P_1 \bar{\alpha} P_r} + N_2} \right) \right\} \quad (3)$$

$$R_1 + R_2 < C \left(\frac{|h_{1r}|^2 \bar{\rho}_1 P_1 + |h_{2r}|^2 \bar{\rho}_2 P_2}{N_r} \right), \quad (4)$$

où $\rho_i \in [0, 1]$, $i \in \{1, 2\}$, et $\alpha \in [0, 1]$ avec $\bar{\alpha} = 1 - \alpha$.

D'après les inégalités (2) et (3), on remarque que les nœuds source disposent d'un degré de liberté dans la maximisation de leurs taux de Shannon à savoir leurs niveaux de coopération $(\rho_i, i \in \{1, 2\})$ respectifs avec le relais. Les optimisations de ces niveaux de coopération étant inter-dépendantes, il apparaît donc une interaction entre les utilisateurs et cette interaction peut être analysée en ayant une approche propre à la théorie des jeux ; ce qui est fait dans un autre article soumis à ce congrès [8].

Afin de relaxer la contrainte de décodage au relais qu'impose le protocole DT, nous élaborons des protocoles basés sur la stratégie ET.

3 Stratégie estimer-and-transférer

Nous introduisons deux approches de codage pour cette stratégie. La première dite à double niveau de résolution pour laquelle le relais construit deux versions estimées de son observation. Chacune des versions estimées étant compatible avec les capacités de décodage de l'un des nœuds destination. Le théorème ci-dessous donne la région de taux obtenue avec la premier approche.

Théorème 3.1 Pour le CIR discret sans mémoire $(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_r, p(y_1, y_2, y_r | x_1, x_2, x_r), \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 \times \mathcal{Y}_r)$, tout quadruplet de taux $(R_{10}, R_{11}, R_{20}, R_{22})$ est atteignable, où $\sum_{i \in \mathcal{I}_1} R_i \leq I(V_{\mathcal{I}_1}; Y_1, \hat{Y}_{r1} | U_1, V_{\mathcal{I}_1^c})$ pour tout $\mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{S}_1$,

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_2} R_i \leq I(V_{\mathcal{I}_2}; Y_2, \hat{Y}_{r2} | U_2, V_{\mathcal{I}_2^c}) \text{ pour tout } \mathcal{I}_2 \subseteq \mathcal{S}_2,$$

sous les contraintes

$$I(Y_r; \hat{Y}_{r1} | U_1, Y_1) \leq I(U_1; Y_1), \quad (5)$$

$$I(Y_r; \hat{Y}_{r2} | U_2, Y_2) \leq I(U_2; Y_2), \quad (6)$$

pour une certaine distribution de probabilité conjointe

$$p(v_{10}, v_{11}, v_{20}, v_{22}, x_1, x_2, u_1, u_2, x_r, y_1, y_2, y_r, y_{r1}, y_{r2}, \hat{y}_{r1}, \hat{y}_{r2}) = p(v_{10})p(v_{11})p(x_1|v_{10}, v_{11})p(v_{20})p(v_{22})p(x_2|v_{20}, v_{22}) \times p(u_1)p(u_2)p(x_r|u_1, u_2)p(y_1, y_2, y_r|x_1, x_2, x_r)p(\hat{y}_{r1}|y_r, u_1) \times p(\hat{y}_{r2}|y_r, u_2).$$

Avec le schéma de compression à niveau de résolution unique, la région obtenue est donnée par le théorème suivant

Théorème 3.2 Pour le CIR discret sans mémoire $(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_r, p(y_1, y_2, y_r | x_1, x_2, x_r), \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 \times \mathcal{Y}_r)$, tout quadruplet de taux $(R_{10}, R_{11}, R_{20}, R_{22})$ est atteignable, où $\sum_{i \in \mathcal{I}_k} R_i \leq I(V_{\mathcal{I}_k}; Y_k, \hat{Y}_r | X_r, V_{\mathcal{I}_k^c})$ pour tout $\mathcal{I}_k \subseteq \mathcal{S}_k$,

où $k \in \{1, 2\}$, sous la contrainte $\max_k I(Y_r; \hat{Y}_r | X_r, Y_k) \leq \min_k I(X_r; Y_k)$, (7)

pour une certaine distribution de probabilité conjointe

$$p(v_{10}, v_{11}, v_{20}, v_{22}, x_1, x_2, x_r, y_1, y_2, y_r, y_{r1}, y_{r2}, \hat{y}_r) = p(v_{10})p(v_{11})p(x_1 | v_{10}, v_{11})p(v_{20})p(v_{22})p(x_2 | v_{20}, v_{22}) \times p(x_r)p(y_1, y_2, y_r | x_1, x_2, x_r)p(\hat{y}_r | y_r, x_r).$$

4 Analyse des performances associées aux stratégies élaborées dans le cas gaussien

Les métriques considérées sont le débit-somme du système et les débits individuels de Shannon. Quand nous nous intéresserons aux débits de Shannon individuels, nous supposons que le relais alloue sa puissance de façon équitable ($\alpha = \frac{1}{2}$). Sans perte de généralité, nous considérons un système spatial symétrique ($d_{\mathcal{S}_1 \mathcal{D}_1} = d_{\mathcal{S}_2 \mathcal{D}_2}$ et $d_{\mathcal{S}_1 \mathcal{D}_2} = d_{\mathcal{S}_2 \mathcal{D}_1}$) et nous analysons les métriques en fonction de la position du relais dans l'espace. Nous prenons en compte les effets d'affaiblissements à grande échelle c'est-à-dire que les gains de canal s'expriment comme $|h_{ij}| = \left(\frac{d_{ij}}{d_0}\right)^{-\gamma}$ for $(i, j) \in \{1, 2, r\}^2$. Nous prenons $\gamma = 2$. Comme référence on considère le canal à interférence. Pour ce dernier on supposera que chaque nœud destination voit le signal destiné à son homologue comme un bruit. D'une part, avec le protocole DT, on va s'intéresser en particulier au débit-somme car, bien que le canal soit décentralisé, les optimisations individuelles des coefficients de corrélation ρ_1 et ρ_2 dans les équations (2)-(4) sont interdépendantes. En effet, ces coefficients de corrélation influent sur les niveaux d'interférence vus par les nœuds destination. Chaque nœud source optimise donc son coefficient de corrélation en réponse à celui de son homologue. Par conséquent, ces coefficients de corrélation seront optimisés de façon conjointe afin de maximiser le débit-somme du canal, ce qui reste réaliste dans la mesure où cela correspond à l'objectif d'un opérateur sur son réseau. D'autre part, en nous intéressant au débit-somme du système avec les stratégies DT et ET à double résolution, nous distinguerons deux cas :

1. Cas I : le relais optimise le paramètre d'allocation de puissance α afin de maximiser le débit-somme du système. Les débit-somme ainsi obtenus sont donnés par les équations suivantes

$$R_{df, sum} = \max_{\alpha, \rho_1, \rho_2} (R_1 + R_2), \quad (8)$$

$$R_{ef, sum} = \max_{\alpha} (R_1 + R_2), \quad (9)$$

où R_1 et R_2 sont les taux dans le Corollaire 2.2 pour (8) et dans le Théorème 3.1 (pour les expressions dans le cas gaussien, voir [9]) pour (9).

2. Cas II : le relais alloue sa puissance de façon équitable. Dans ce cas on a

$$R_{df, sum} = \max_{\rho_1, \rho_2} (R_1 + R_2), \quad (10)$$

$$R_{ef, sum} = R_1 + R_2, \quad (11)$$

avec $\alpha = \frac{1}{2}$.

Le débit-somme obtenu avec le stratégie de compression à résolution unique est identique dans les cas I et II. On supposera par ailleurs que les bruits de réception aux nœuds du système ont tous des variances unitaires ($N_1 = N_2 = N_r = 1$). Une fois ces critères définis, nous pouvons maintenant analyser le comportement des différentes stratégies.

4.1 La coopération est-elle nécessaire ?

Nous commençons avec la stratégie DT et nous nous intéressons au débit-somme tel que défini dans le Cas I. La figure 1, qui illustre les localisations du relais pour lesquelles le débit-somme atteint est supérieur au canal à interférence, montre que, contrairement au canal à relais (voir Figure 16 dans [10]), la coopération basée sur la stratégie DT avec le relais peut accroître le débit-somme système lorsque le relais est situé au delà des nœuds destination. Cela est dû au caractère particulier de l'interférence créée par le relais aux nœuds destination. En effet, l'interférence créée par le relais au niveau des nœuds destination décroît lorsque celui-ci s'éloigne de ces nœuds. Pour le Cas II, avec les paramètres choisis, le relais est inutile car en allouant une partie de sa puissance disponible à chacun des nœuds destination, le relais augmente automatiquement le niveau d'interférence à chacun d'eux.

Avec la stratégie ET à résolution unique, nous avons observé que le débit-somme du système est toujours supérieur à celui du canal à interférence. Cette observation est similaire à celle faite pour le canal à relais puisque le relais n'ajoute aucune interférence et apporte de l'information utile via son signal estimé. Avec la double résolution, nous constatons aussi que la coopération améliore le débit-somme quelque soit la position du relais.

4.2 Stratégie DT ou stratégie ET ?

Étant donné que la coopération est inutile avec la stratégie DT quand le relais effectue une allocation équitable de sa puissance, toute stratégie ET sera supérieure pour le scénario considéré. En plus, dans le Cas I, la stratégie ET à double résolution est toujours supérieure à la stratégie DT. Toutefois, cette dernière stratégie peut être supérieure si l'on considère le schéma à double résolution (figure 2). Globalement on constate que le débit-somme atteignable par le système est maximisé avec les stratégies de type ET. En fait, la stratégie DT est pénalisée par sa phase MAC qui réduit les taux atteignables au relais par rapport au canal à relais.

4.3 Stratégie ET : Résolution unique ou double résolution ?

La figure 3 illustre les localisations du relais pour lesquelles l'une des stratégies de compression à un avantage sur l'autre en terme de débit-somme du système dans le cas II. La double résolution est meilleure lorsque le relais est situé dans les alentours de l'un des nœuds destination. Elle souffre du fait que le relais crée une interférence supplémentaire au niveau de chaque nœud destination ; ce qui n'est pas le cas avec la résolution unique. Toutefois, en ayant une allocation de puissance optimale au relais (cas I), la région d'optimalité de la double résolution s'agrandit. En effet, dans ce dernier, on constate que le relais toute sa puissance au meilleur nœud destination.

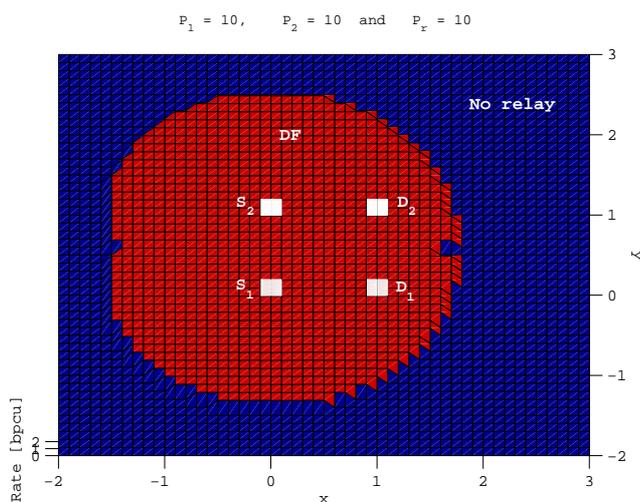


FIG. 1 – Stratégie DT (cas I) : Localisations du relais pour lesquelles la coopération est bénéfique en terme de débit-somme du système pour $P_1 = P_2 = P_r = 10$.

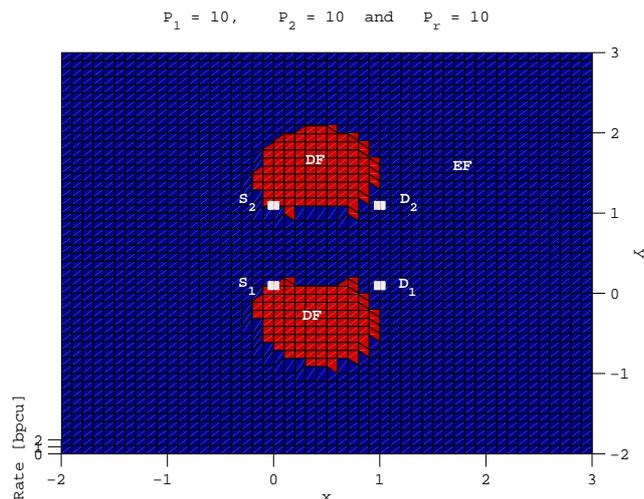


FIG. 2 – Stratégies DT (cas I) vs stratégie ET à résolution unique : Meilleure stratégie en terme de débit-somme du système en fonction de la localisation du relais pour $P_1 = P_2 = P_r = 10$.

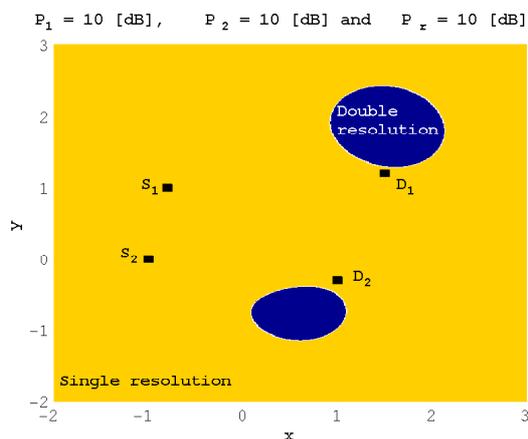


FIG. 3 – Stratégie ET à résolution unique vs stratégie ET à double résolution (cas II) : Meilleure stratégie en terme de débit-somme du système en fonction de la localisation du relais pour $P_1 = P_2 = P_r = 10$.

Références

- [1] O. Sahin and E. Erkip, "Achievable rates for the gaussian interference relay channel," in *Proc. IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM'07)*, Washington D.C., USA, pp. 786–787, Nov. 2007.
- [2] R. Ahlswede, "The capacity region of a channel with two senders and two receivers," *Ann. Prob.*, vol. 2, pp. 805–814, Oct. 1974.
- [3] A. B. Carleial, "A case where interference does not reduce capacity," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 21, no. 5, pp. 569–570, Sep. 1975.
- [4] T. S. Han and K. Kobayashi, "A new achievable rate region for the interference channel," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 27, no. 1, pp. 49–60, Jan. 1981.
- [5] T. M. Cover and A. A. El Gamal, "Capacity theorems for the relay channel," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 25, no. 5, pp. 572–584, Sep. 1979.
- [6] O. Sahin and E. Erkip, "On achievable rates for interference relay channel with interference cancellation," in *Proc. IEEE Annual Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers (invited paper)*, Pacific Grove, California, Nov. 2007.
- [7] T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of information theory*. New York : Wiley, 1991.
- [8] E. V. Belmega, B. Djeumou, and S. Lasaulce, "Jeux d'allocation de puissance pour les canaux à interférence à relais," in *Gretsi*, 2009.
- [9] B. Djeumou, E. V. Belmega, and S. Lasaulce, "Interference relay channels - part 1 : Transmission rates," *IEEE Trans. Commun.*, submitted 2009.
- [10] G. Kramer, M. Gastpar, and P. Gupta, "Cooperative strategies and capacity theorems for relay networks," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 51, no. 9, pp. 3037–3067, Sep. 2005.