

Identification des paramètres modaux de câbles en vibration par la transformée en ondelettes

JOSEPH LARDIES

Institut FEMTO-ST ; Département de Mécanique Appliquée
24 rue de l'Épitaphe, 25000 Besançon, France
joseph.lardies@univ-fcomte.fr

Résumé – Les paramètres modaux de systèmes en vibration jouent un rôle primordial lors du recalage de modèles, de la surveillance et du contrôle passif ou actif de structures. L'identification de ces paramètres peut s'effectuer à partir de données temporelles en utilisant la transformée en ondelettes. On considère des câbles d'haubanage soumis à une excitation. On applique la transformée en ondelettes aux signaux provenant d'accéléromètres placés sur les câbles. L'ondelette analysante choisie est obtenue par minimisation de l'entropie des coefficients de la transformée en ondelettes et les paramètres modaux des câbles sont alors identifiés à partir du module et de la phase des coefficients de la transformée en ondelettes. Deux indicateurs de surveillance des câbles sont proposés : le nombre de Scruton et la tension propre des câbles. Des résultats expérimentaux sont présentés.

Abstract – Modal parameters of vibrating systems are primordial in updating models, health monitoring and control of structures. The modal parameter identification procedure from time data can be performed by the wavelet transform of signals. Consider stay cables of a bridge excited by random and no measured vibrations. The wavelet transform is applied to accelerometer signals and the analyzed wavelet is obtained by minimization of the entropy of wavelet coefficients. The modal parameters of stay cables are then identified from the modulus and phase of the wavelet transform. Two indicators for health monitoring of stay cables are presented: the Scruton number and the cable tension. Experimental results are presented.

1. Introduction

Soient des câbles tendus soumis à une excitation qui peut être impulsionnelle ou aléatoire. Notre but est de déterminer les paramètres modaux (fréquences propres et coefficients d'amortissement) des câbles à partir des mesures temporelles provenant d'accéléromètres placés sur ces câbles. Pour cela nous allons utiliser la transformée en ondelettes (T.O.) [1-4] des signaux issus des accéléromètres. Cette T.O. est à valeurs complexes et on montre que son module et sa phase sont directement liés au coefficient d'amortissement et à la fréquence propre du mode considéré. Dans cette étude, l'ondelette mère choisie est l'ondelette de Morlet modifiée dont un paramètre est déterminé par minimisation de l'entropie des coefficients de la transformée en ondelettes. Deux indicateurs de surveillance des câbles sont proposés : le nombre de Scruton [5] et la tension propre des câbles. Deux cas tests sont présentés. Le premier concerne un câble tendu étudié en laboratoire, le deuxième des câbles d'haubanage d'un pont en fonctionnement. Ces tests montrent l'efficacité de la T.O. lors de l'identification des paramètres modaux. Si l'approche présentée dans cette communication est appliquée à des câbles en vibration, elle peut se généraliser tout autre système vibrant dont on connaît la réponse temporelle.

2. La transformée en ondelettes

2.1 Théorie et généralités

Par rapport à la transformée de Fourier, l'idée de base de la transformée en ondelettes est de décomposer un signal $x(t)$ selon une autre base que celle des sinusoides, chaque base d'ondelettes possédant des propriétés particulières qui guident son utilisation pour le type de problème posé. Le signal $x(t)$ va donc être décomposé sur une famille de fonctions

translatées et dilatées à partir d'une fonction unique $\psi(t)$ appelée ondelette mère. La famille se met sous la forme [1-3]

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (1)$$

et est appelée ondelette analysante, avec a paramètre de dilatation ou paramètre d'échelle définissant la largeur de la fenêtre d'analyse. La variable a joue le rôle de l'inverse de la fréquence: plus a est faible moins l'ondelette analysante est étendue temporellement, donc plus la fréquence centrale de son spectre est élevée. Le paramètre b est le paramètre de translation localisant l'ondelette analysante dans le domaine temporel. Modifier a et b permet d'avoir des ondelettes à la fréquence voulue et à l'instant souhaité. En notant $\psi^*(t)$ le conjugué de $\psi(t)$, la T.O. du signal $x(t)$ est définie par [1-3]

$$(W_{\psi x})(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (2)$$

Cette analyse permet de décrire le contenu de $x(t)$ localement au voisinage de (a,b) dans le plan temps-échelle. Elle nous indique l'importance relative de la fréquence $1/a$ autour du point b (ou à l'instant b) pour le signal $x(t)$. Ainsi, si $x(t)$ vibre à une fréquence nettement moins élevée ou, au contraire, beaucoup plus élevée que $1/a$, le module du coefficient de la T.O. sera très petit et quasiment négligeable. Il ne devient conséquent que si le signal contient une composante de cette fréquence au point considéré. Les coefficients de la T.O. sont donc un moyen de repérer avec précision l'apparition d'une fréquence donnée à un instant donné dans un signal. Cette décomposition est fonction de deux variables a et b et évalue la pertinence de l'utilisation de l'ondelette dans la description de $x(t)$. La T.O. est une représentation linéaire du signal, ceci implique que la T.O. de P signaux devient :

$$(W_{\Psi} \sum_{i=1}^P x_i)(a, b) = \sum_{i=1}^P (W_{\Psi} x_i)(a, b) \quad (3)$$

Cette propriété est pratique pour l'analyse de signaux multi-composantes.

L'ondelette choisie habituellement est l'ondelette de Morlet,

définie par $\psi(t) = e^{j 2 \pi f_0 t} e^{-t^2/2}$ où f_0 est la fréquence propre de l'ondelette. L'un des avantages de l'ondelette de Morlet est qu'elle est bien adaptée pour analyser toute sorte de signal vibratoire. La transformée de Fourier de cette

fonction dilatée est $\Psi(af) = \sqrt{2 \pi} e^{-2 \pi^2 (a f - f_0)^2}$ et atteint son maximum lorsque le paramètre de dilatation est égal à $a = f_0/f$. Connaissant f_0 et ayant trouvé une fréquence propre du signal à étudier nous pourrions utiliser cette relation pour déduire le paramètre de dilatation. L'ondelette de Morlet dilatée est un filtre passe-bande de fréquence centrale $f_c = f_0/a$ dont la largeur est proportionnelle à $1/a$. Il faut noter que si la fréquence analysée est importante, le paramètre de dilatation devient faible et la fenêtre fréquentielle de la fonction analysante large. Dans cette étude une autre ondelette, appelée ondelette de Morlet modifiée, sera utilisée. Elle se met sous la forme :

$$\psi(t) = e^{j 2 \pi f_0 t} e^{-t^2/N} \quad (4)$$

avec $N > 0$, dont la transformée de Fourier dilatée est

$$\Psi(af) = \sqrt{N \pi} e^{-N \pi^2 (a f - f_0)^2} \quad (5)$$

Lorsque N croît la résolution fréquentielle augmente au détriment de la résolution temporelle. Il y a une valeur optimale de N donnant la meilleure résolution temps-fréquence, pour un signal $x(t)$ donné et analysé avec l'ondelette de Morlet modifiée.

2.2 Entropie des coefficients de la T.O.

Pour déterminer l'ondelette de Morlet modifiée optimale, c'est à dire pour évaluer la valeur optimale du paramètre N , nous allons utiliser un critère relatif à la dispersion des coefficients de la transformée en ondelettes. La mesure de cette dispersion s'effectue au sens de l'entropie de Shannon. Dans la transformée en ondelettes d'un signal échantillonné $\{x(q)\}$, l'énergie pour chaque paramètre d'échelle a_i est :

$$E_{a_i} = \sum_j \left| (W_{\Psi} x)(a_i, b_j) \right|^2 ; j=1, 2, \dots, M \quad (6)$$

où M est le nombre d'échantillons temporels. Dans cette relation on considère les coefficients de la T.O. obtenus pour une valeur de a_i en parcourant le domaine de translation. L'énergie totale est alors obtenue en considérant :

$$E_{\text{total}} = \sum_i E_{a_i} ; i=1, 2, \dots, Q \quad (7)$$

où Q est le nombre d'échelles. Les valeurs normalisées $p_{a_i} = E_{a_i}/E_{\text{total}}$ représentent la dispersion de l'énergie pour chaque

paramètre d'échelle a_i . Il est évident que $\sum_i p_{a_i} = 1$ et la

distribution $\{p_{a_i}\}$ peut être considérée comme une densité de probabilité d'énergie dans le domaine temps-échelle. L'entropie de Shannon nous fournit un critère utile afin d'analyser et de comparer cette dispersion. On définit l'entropie des coefficients de la transformée en ondelettes par

$$WE = - \sum_i p_{a_i} \log(p_{a_i}) \quad (8)$$

Cette relation permet de mesurer le degré de désordre ou d'imprévisibilité de l'énergie des coefficients de la transformée en ondelettes. La valeur du paramètre N minimisant la fonction $WE(N)$ sera la valeur optimale attribuée à l'ondelette de Morlet modifiée. Cette valeur optimale donnera la meilleure résolution temps-échelle pour un signal $x(t)$ analysé avec l'ondelette de Morlet modifiée.

2.3 Extraction de l'arête de la T.O.

Soit $x(t) = A(t) \cos(\varphi(t))$ un signal modulé en amplitude et en fréquence. La T.O. de ce signal est [1-3]

$$(W_{\Psi} x)(a, b) = (1/2) \sqrt{a} A(b) \Psi^*(a \dot{\varphi}(b)) e^{j\varphi(b)} \quad (9)$$

avec $\dot{\varphi}(b) = d\varphi/db$ la pulsation instantanée de $x(t)$. Le paramètre de dilatation est déterminé aux points d'énergie maximale, c'est à dire lorsque le module de la T.O. est maximum. On obtient alors l'arête de T.O. En considérant l'ondelette de Morlet modifiée, nous avons sur l'arête $\Psi(a \dot{\varphi}(b))$ qui est maximum et les valeurs du paramètre d'échelle vérifient :

$$a = a(b) = \omega_0 / \dot{\varphi}(b) \quad (10)$$

L'équation (9) se réduit alors à :

$$(W_{\Psi} x)(a(b), b) = (1/2) \sqrt{N \pi a(b)} A(b) e^{j\varphi(b)} \quad (11)$$

dont le module est proportionnel à l'amplitude du signal à analyser et dont l'argument correspond à la phase du signal.

3. Analyse modale par la T.O.

3.1 Identification des paramètres modaux

Considérons le cas de la réponse libre d'un système à un degré de liberté amorti :

$$x(t) = B e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t + \chi_0) \quad (12)$$

avec ω_n la pulsation du système non amorti, ω_d la pulsation du système amorti et ζ le coefficient d'amortissement. Les résultats précédents s'appliquent en considérant :

$$A(t) = B e^{-\zeta \omega_n t} ; \varphi(t) = \omega_d t + \chi_0 \Rightarrow \dot{\varphi}(t) = \omega_d$$

Le module de la T.O. est maximal, d'après (10), lorsque $a = a_1 = \omega_0 / \omega_d$ et l'équation (11) devient :

$$(W_{\Psi} x)(a_1, b) = (1/2) \sqrt{N \pi a_1} B e^{-\zeta \omega_n b} e^{j(\omega_d b + \chi_0)} \quad (13)$$

dont le module et l'argument se mettent sous la forme

$$\ln |(W_\psi x)(a_1, b)| = -\zeta \omega_n b + \text{cte} \quad (14)$$

$$\frac{d(\text{Arg}(W_\psi x)(a_1, b))}{db} = \omega_d \quad (15)$$

Le tracé de (14) en fonction de b est une droite dont la pente nous permet d'identifier le coefficient d'amortissement. Le tracé de (15) en fonction de b est une droite horizontale qui nous permet d'identifier ω_d . Considérons maintenant la réponse libre d'un système à P degrés de liberté amorti:

$$x(t) = \sum_{i=1}^P B_i e^{-\zeta_i \omega_{ni} t} \cos(\omega_{di} t + \chi_{0i}) \quad (16)$$

La linéarité de la transformée en ondelettes conduit à :

$$(W_\psi x) = (1/2) \sqrt{a} \sum_{i=1}^P B_i e^{-\zeta_i \omega_{ni} b} \Psi^*(a \omega_{di}) e^{j(\omega_{di} b + \chi_{0i})} \quad (17)$$

Pour un signal multi-composantes, la linéarité de la transformée en ondelettes nous permet de séparer chaque composante et d'effectuer la même procédure d'identification des fréquences propres et des coefficients d'amortissement du système en vibration. Le paramètre de dilatation a_k est celui qui maximise $\Psi^*(a \omega_{dk})$ et la propriété de localisation de l'ondelette analysante nous indique que seul le mode de pulsation $\omega_{dk} = \omega_0 / a_k$ contribue de façon significative à la transformée en ondelettes du signal. Lorsque $a = a_k$ seul le k^{ième} terme dans la sommation (17) a une contribution importante, tous les autres termes étant négligeables. On pourra de cette façon isoler chaque mode et identifier ses paramètres modaux.

3.2 Indicateurs de surveillance

Deux indicateurs de l'état d'un câble tendu sont proposés : la tension propre du câble et le nombre de Scruton. La tension T d'un câble est déterminée en fonction de la fréquence fondamentale par la relation $T = 4 \rho L^2 f_1^2$ où ρ est la masse linéique du câble, L sa longueur et f_1 la fréquence fondamentale. La détermination de cette fréquence propre f_1 s'effectue par la T.O. de la réponse libre du câble, en utilisant la procédure décrite précédemment. La tension T sera un indicateur sur l'étirement du câble et l'état d'allongement du câble. La détermination des coefficients d'amortissement permet d'évaluer l'instabilité due au 'rain-wind', c'est-à-dire due à l'effet du vent et de la pluie sur le câble. En effet, l'instabilité est déterminée par le nombre de Scruton [5] défini par $S_{c,i} = \zeta_i \rho / \rho_a D^2$ où ζ_i est le coefficient d'amortissement du mode i de vibration, ρ_a est la densité de l'air et D est le diamètre du câble. Le coefficient d'amortissement est déterminé par la T.O. de la réponse libre du câble. Un nombre de Scruton $S_{c,i} > 10$ est suffisant pour négliger l'instabilité du câble sous l'action du 'rain-wind'.

4. Applications

4.1 Câble testé en laboratoire

Le premier essai expérimental est celui d'un câble tendu en laboratoire (Figure 1). Les vibrations du câble sont dues à un choc produit par un coup de marteau et les signaux provenant de quatre accéléromètres sont analysés par la T.O.

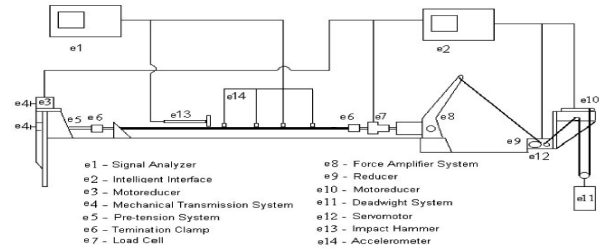


Figure 1. Câble testé en laboratoire

La figure 2 nous montre l'analyse temps-fréquence du signal provenant d'un accéléromètre en utilisant l'ondelette de Morlet. La résolution fréquentielle est mauvaise. On utilise le critère de minimisation de l'entropie des coefficients de la T.O. pour obtenir N et l'ondelette de Morlet modifiée optimale. Suivant la figure 3 on obtient N=20 et la résolution fréquentielle est améliorée comme l'indique la figure 4.

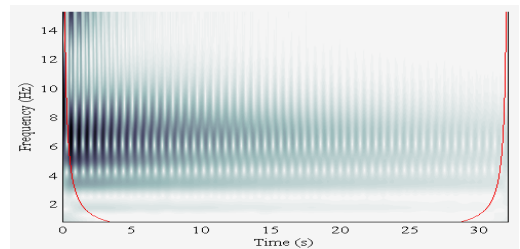


Figure 2. Analyse temps-fréquence avec N=2

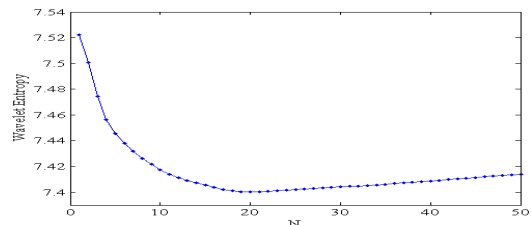


Figure 3. Entropie de la T.O.

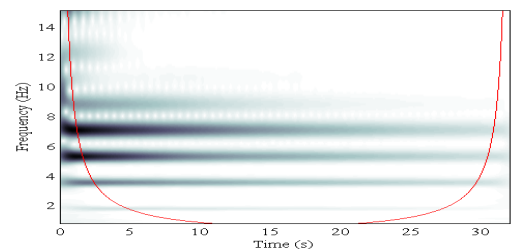
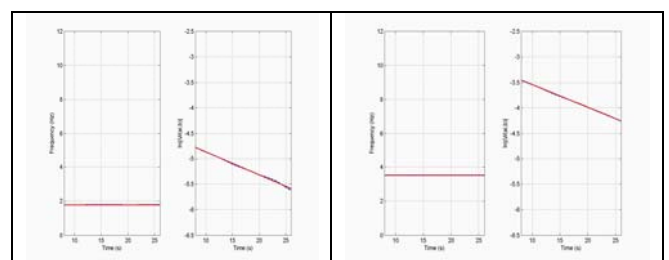


Figure 4. Analyse temps-fréquence avec N=20



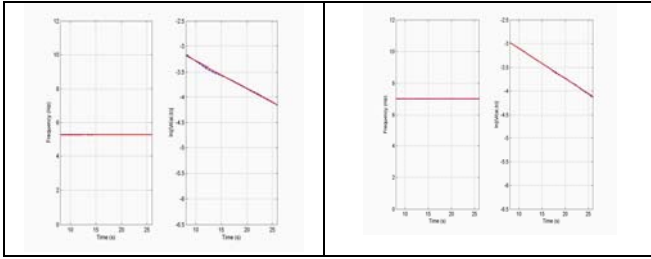


Figure 5. Fréquences instantanées et logarithme de l'amplitude de la T.O. pour les quatre premiers modes du câble

La figure 5 et le tableau 1 nous indiquent les valeurs des 4 premiers paramètres modaux obtenus par la T.O.

Tableau 1. Paramètres modaux du câble expérimental

Modes	Accéléromètre 1		Accéléromètre 2		Accéléromètre 3	
	f (Hz)	ζ (%)	f (Hz)	ζ (%)	f (Hz)	ζ (%)
1	1,776	0,465	1,775	0,455	1,776	0,452
2	3,517	0,234	3,518	0,210	3,518	0,208
3	5,255	0,244	5,255	0,242	5,255	0,258
4	7,018	0,145	7,018	0,143	7,18	0,117

4.2 Câbles d'haubanage

Les paramètres modaux des câbles d'haubanage du pont suspendu de Jimma en Chine sont déterminés en utilisant la T.O. des signaux issus d'un accéléromètre qui sera placé sur les câbles (Figure 6). La vibration aléatoire des câbles est transformée en réponse libre en utilisant la technique du décrétement aléatoire [6]. On applique la T.O. à cette réponse libre (Figure7), où l'ondelette de Morlet modifiée est obtenue par minimisation d'entropie. Les paramètres d'échelle a_i sont ceux qui maximisent l'amplitude des coefficients de la T.O. et sont utilisés dans (14) et (15) pour identifier les paramètres modaux.

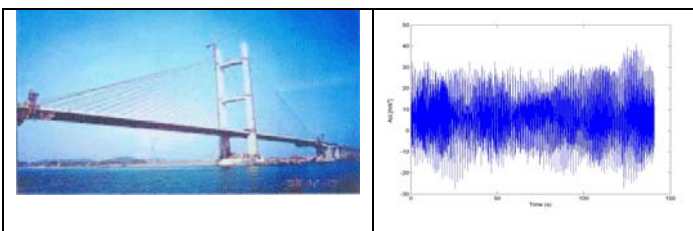


Figure 6. Pont de Jimma et réponse temporelle d'un câble d'haubanage

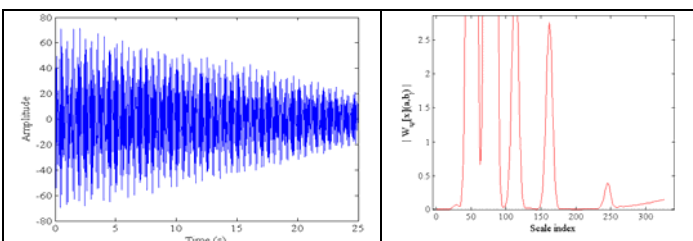


Figure 7. Réponse libre et amplitude de la T.O. de cette réponse libre

Le nombre de câbles tendus est de 112 et le tableau 2 nous montre les cinq premiers paramètres modaux d'un câble d'haubanage ainsi que le nombre de Scruton. La figure 8 représente la fréquence fondamentale de chacun des 112 câbles, elle varie de 0,533 Hz pour le câble le plus long à 2,703 Hz pour le câble le plus court. On peut alors déduire la tension minimale $T_{\text{mini}} = 2490$ kN et la tension maximale $T_{\text{Max}} = 5020$ kN. Ces tensions peuvent alors être considérées comme des tensions de référence et des indicateurs lors de la surveillance des câbles. Notons que le nombre de Scruton du câble analysé est relativement faible ce qui entraînera une certaine instabilité lors de phénomènes tourbillonnaires induits par le vent et la pluie.

Tableau 2. Paramètres modaux et nombre de Scruton d'un câble d'haubanage

Modes	1	2	3	4	5
f (Hz)	1,96	3,93	5,91	7,89	9,86
ζ (%)	0.314	0.046	0.178	0.078	0.081
Sc	4.250	0.622	2.410	1.056	1.096

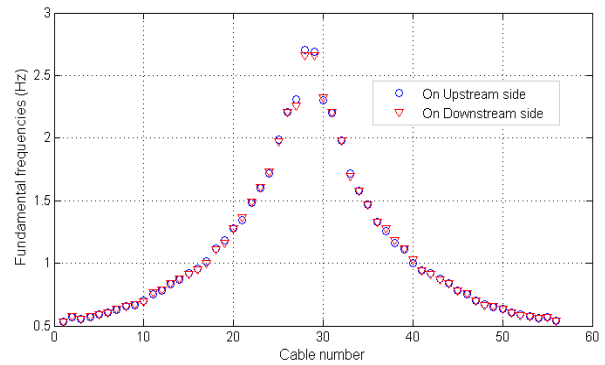


Figure 8 Fréquence fondamentale pour chaque câble du pont suspendu

5. Conclusion

L'application de la T.O. avec une nouvelle ondelette analysante pour l'identification des fréquences propres instantanées et des coefficients d'amortissement de câbles tendus a donné des résultats satisfaisants. Deux critères pour surveiller l'état des câbles en milieu naturel ont été analysés. Des mesures sur d'autres structures soumises à des excitations ambiantes sont en cours d'étude par la T.O.

Références

- [1] B. Torrèsani, Analyse continue par ondelettes, Editions du CNRS, Paris, 1995
- [2] S. Mallat, Une exploration des signaux en ondelettes, Editions de l'école Polytechnique, 2000
- [3] C. Chui, An introduction to wavelets, Academic Press, 1995
- [4] J. Lardiès, M.N. Ta M.N. , M. Berthillier, Modal parameter estimation from output-only data using the wavelet transform, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 73, pp. 718-733; 2004
- [5] R. Geier, Cable-stayed bridges and their dynamic response, Proceedings of the 22th IMAC, Detroit, 2004
- [6] S.R. Ibrahim, Random decrement technique for modal identification, *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol.14, pp.696-700 ; 1977