

Analyse spectrale polaire des artefacts en subdivision

François DESTELLE, Salem SAID, Cédric GÉROT, Annick MONTANVERT
Gipsa-lab

961 rue de la Houille Blanche BP 46F - 38402 GRENOBLE Cedex - France

francois.destelle@gipsa-lab.inpg.fr, salem.said@gipsa-lab.inpg.fr,
cedric.gerot@gipsa-lab.inpg.fr, annick.montanvert@gipsa-lab.inpg.fr

Résumé – Dans ce document, nous présentons une méthode originale d’analyse pour les surfaces de subdivision. Nous proposons un modèle de caractérisation spectrale des distorsions géométriques induites par un sommet extraordinaire. Un schéma de subdivision est un outil de modélisation de surface lisse, il généralise l’emploi des surfaces paramétrées *box-spline* [4]. En effet, le maillage de contrôle d’une surface de subdivision n’est pas contraint par sa topologie, il peut s’agir d’un maillage quelconque. Ceci induit la présence de sommets à valence irrégulière, c’est-à-dire des sommets ne possédant pas le même nombre d’arêtes incidentes que les autres. Si une surface *box-spline* possède un ensemble de caractéristiques mathématiques bien connues en tout point, il n’en est pas de même pour les surfaces de subdivision à l’endroit de ces sommets extraordinaires. En particulier, ceux-ci induisent de fortes variations de courbure à leur voisinage ; ces brusques variations constituent les artefacts du maillage subdivisé. Leur présence limite l’utilisation pratique de cet outil dans l’industrie. Nous proposons une méthode de caractérisation de l’étendue et de la forme de ces perturbations par une analyse fréquentielle. Cette analyse projette les données de courbure étudiées dans la base polaire des modes propres de vibration d’une membrane élastique. Nous montrons que cette analyse permet la caractérisation des distorsions géométriques pour un schéma de subdivision et une géométrie donnés. Nous effectuons ainsi un comparatif de plusieurs schémas de subdivision sur un ensemble de géométries, cette méthode de comparaison du comportement des schémas étend les méthodes existantes.

Abstract – In this document, we present a novel analysis method for subdivision surfaces. We present a spectral characterization model of the geometric distortions induced by an extraordinary vertex. A subdivision scheme is a modelization tool for smooth surfaces, it generalizes the use of *box-spline* [4] parametric surfaces. The control mesh of a subdivision surface is not constrained by its topology, it can be of any kind. This induces the presence of valence irregular vertices, *i.e.* vertices do not have the same number of incident edges than the others. Although a *box-spline* surface has a set of well known mathematical properties, this is not the case for subdivision surfaces in the vicinity of these extraordinary vertices. In particular, they induce strong curvature variations on the surface ; these variations are called artefacts of the subdivided mesh. The presence of these artefacts limits the practical uses of this tool in the industry. We propose a characterization method of the extent and the shape of these perturbations by a frequency analysis. This analysis projects the studied curvature measures on the polar base of the vibration eigen-modes of an elastic membrane. We show that this analysis allows the characterization of the geometric distortions for a fixed subdivision scheme and a fixed geometry. We establish a benchmark of several subdivision schemes and a fixed set of geometries, this comparison method of the schemes behaviour extends existent ones.

1 Introduction

La modélisation de surface lisse est une problématique très présente dans des domaines industriels tels que la CAO. Une surface lisse est en pratique un maillage dense en sommets que l’utilisateur manipule à travers un maillage de contrôle grossier. Cette surface est le plus souvent paramétrée par une base de fonctions *box-splines*, mais cette paramétrisation est possible uniquement lorsque le maillage de contrôle est équivalent à un pavage régulier du plan. Chaque sommet possède alors le même nombre d’arêtes incidentes ; les sommets sont de valence 6 pour un pavage triangulaire régulier, 4 pour un quadrangulaire et 3 pour un pavage hexagonal. On parle alors de valence *ordinaire*. La surface de subdivision généralise la fonction paramétrée *box-spline* en permettant l’utilisation d’un maillage de contrôle de topologie quelconque [11]. Les sommets de ce maillage peuvent donc être de valence *extraordinaire*.

Un schéma de subdivision décrit une surface de façon itérative : à chaque itération le maillage est subdivisé puis lissé, la surface discrète devient plus lisse et plus dense en sommets. Ce maillage subdivisé approche une surface lisse continue, dite surface limite, pour laquelle certaines propriétés mathématiques sont assurées [11].

Malheureusement, les surfaces de subdivision ne sont pas définies de façon optimale à l’endroit des sommets extraordinaires. On observe à leur voisinage de fortes variations de courbure [8], ces distorsions géométriques sont nommées artefacts. Il s’agit du défaut principal reproché à l’utilisation d’un schéma de subdivision pour la génération d’une surface lisse de grande qualité. Certains travaux [1] sont consacrés à l’évaluation de l’importance de ces artefacts. En particulier, une mesure de variation maximale de courbure au voisinage d’un sommet extraordinaire a été introduite.

Afin d'étendre ces méthodes de caractérisation, nous cherchons à mesurer la forme de ces variations. Les ondulations de courbure observées sont intuitivement proches des modes de vibration d'une membrane circulaire élastique. Nous proposons d'analyser de façon fréquentielle les données de courbure relativement à cette observation. Nous centrons ici notre analyse sur les surfaces générées par le schéma de Loop [9], bien que notre méthode soit aisément généralisable à tout autre schéma de subdivision.

Nous exposons en premier lieu le principe de notre analyse spectrale ; nous précisons ensuite comment celle-ci est appliquée dans notre cadre d'analyse, à savoir la surface de subdivision. Enfin, nous effectuons une étude comparative de différents schémas de subdivision pour une géométrie donnée.

2 Analyse spectrale polaire des variations de courbure

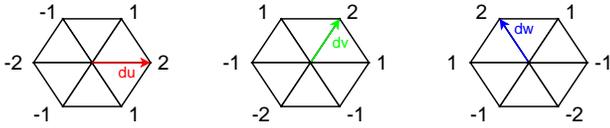


FIG. 1: Masques de filtrage utilisés pour le calcul du gradient de courbure aux sommets ordinaires du maillage selon ses trois directions u , v et w .

Les brusques variations géométriques que nous cherchons à caractériser sont mises en évidence à travers l'évaluation des variations de courbure mesurées au voisinage d'un sommet extraordinaire. Cette mesure nous renseigne sur la forme de l'artefact analysé. Comme dit précédemment, nous proposons de caractériser ces variations de courbure de façon fréquentielle, dans une base de fonctions liées aux modes propres de vibration d'une membrane circulaire élastique. La courbure \mathcal{C} prise en compte dans notre étude est la courbure absolue, donc la somme de la valeur absolue des deux courbures principales [7].

Nous considérons la norme du gradient de courbure absolue mesurée en un sommet ordinaire placé aux coordonnées polaires (r, φ) , selon les trois directions du maillage triangulaire (u, v, w) où $w = v - u$, voir les Figures 1 et 2,

$$|\nabla\mathcal{C}(r, \varphi)| = \sqrt{\left|\frac{d\mathcal{C}(r, \varphi)}{du}\right|^2 + \left|\frac{d\mathcal{C}(r, \varphi)}{dv}\right|^2 + \left|\frac{d\mathcal{C}(r, \varphi)}{dw}\right|^2}. \quad (1)$$

Des exemples de visualisation de cette mesure sont présentés en Figure 3.d ainsi qu'en Figure 4. Celle-ci est faible lorsque la géométrie du maillage n'est pas perturbée par un sommet extraordinaire.

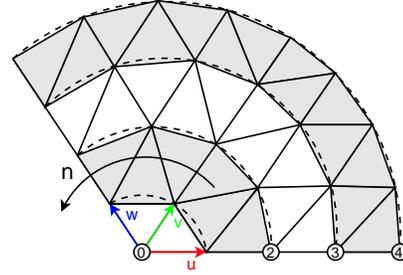


FIG. 2: Le sommet central est de valence n . Sur notre disque d'analyse, les sommets sont répartis sur chaque anneau de façon uniforme, dans cet exemple ils sont au nombre de 4.

2.1 Analyse spectrale sur maillage

Relativement peu de travaux sont consacrés à l'analyse spectrale sur maillage. En 1995, Gabriel Taubin a introduit la notion de traitement du signal sur maillage [10]. L'analyse est liée à la matrice d'adjacence des sommets, un opérateur laplacien est utilisé. En traitement d'image, les vecteurs propres de cet opérateur correspondent aux fonctions cosinus, fonctions notamment utilisées dans l'encodage JPEG. Ceci est applicable aux maillages quelconques si l'on considère le 1-voisinage des sommets. Une deuxième approche très différente peut s'identifier au modèle pyramidal des ondelettes [6]. Deux opérations complémentaires sur un maillage sont prises en compte : *edge-split* et *edge-collapse*. Cette séquence multi-résolution est donc basée sur des divisions et des réunions d'arêtes. Le maillage de départ est simplifié, et l'information géométrique nécessaire à la reconstruction est stockée en mémoire pour chaque résolution. C'est sur cette information géométrique que se base leur analyse spectrale.

Dans cette étude, nous introduisons une analyse spectrale sur maillage centrée sur un sommet. Les données prises en compte ne se limitent pas au 1-voisinage du sommet, principale limitation des travaux de Gabriel Taubin. De plus, il s'agit d'une analyse spectrale au sens où nous projetons les données dans une base de fonctions. Enfin, les méthodes précédentes prennent en compte la position des sommets tandis que nous analysons les variations de courbure au voisinage d'un sommet extraordinaire.

Nous considérons un voisinage topologique polaire centré sur le sommet extraordinaire. De par le comportement d'un schéma de subdivision classique, ses sommets voisins ont une valence ordinaire. Ainsi, nous pouvons considérer ces sommets comme étant disposés en anneaux d'équidistance topologique, voir Figure 2. La notion de distance topologique est ici la distance classique couramment rencontrée dans ce domaine. Chaque sommet ordinaire est donc aisément situé dans ce disque au moyen de coordonnées polaires discrètes (r, φ) . Les données que nous projetons dans la base de fonctions sont les données de courbure $|\nabla\mathcal{C}(r, \varphi)|$. Nous cherchons en particulier à mettre en évidence la présence de hautes fréquences dans les géométries perturbées par un sommet extraordinaire.

2.2 Une base de fonctions polaires

Nous partons d'une analogie entre le comportement des données de courbure de la surface autour du sommet extraordinaire et celui des modes de vibration d'une membrane circulaire élastique. La résolution du problème physique est exposée en détails dans l'ouvrage [3]. Ces modes forment la base naturelle d'une analyse spectrale de Fourier en coordonnées polaires, qui permet de caractériser à la fois les oscillations radiales et angulaires d'une membrane. Cette membrane possède un bord contraint, les fonctions de la base sont nulles sur celui-ci. Ainsi, la base choisie est constituée des modes propres d'une membrane circulaire élastique, ils sont exprimés au moyen des fonctions de Bessel de première espèce. Soit donc une base de fonctions continues correspondant aux modes propres de la membrane, $\mathcal{G}_{mn} : [0, \mathcal{R}] \times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{C}$, où les entiers $m \geq 0$ et $n > 0$ repèrent respectivement les modes angulaires et radiaux :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{mn}(r, \varphi) &= \mathcal{J}_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r)e^{-jm\varphi}, \\ \text{avec } \lambda_{mn} &= \left(\frac{s_{mn}}{\mathcal{R}}\right)^2, \end{aligned} \quad (2)$$

où \mathcal{J}_m est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre m :

$$\mathcal{J}_m(r) = \left(\frac{r}{2}\right)^m \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^{2p}p!(m+p)!} r^{2p}, \quad (3)$$

s_{mn} est son n -ième zéro et \mathcal{R} est le rayon de la membrane.

Ces fonctions forment une base orthonormale selon le produit scalaire suivant,

$$\sum_{r, \varphi} \mathcal{J}_m(\sqrt{\lambda_{mo}}r)\mathcal{J}_m(\sqrt{\lambda_{mp}}r) \cos(m\varphi)^2 r = \delta_{(o=p)}. \quad (4)$$

Les données $|\nabla\mathcal{C}|$ portées par les sommets sont notées $c(r, \varphi)$, où $r \leq \mathcal{R}$. La projection de celles-ci dans la base fréquentielle génère un spectre complexe en m et en n . Nous notons la partie réelle du spectre \mathcal{A}_{mn} et sa partie imaginaire \mathcal{B}_{mn} . Les fonctions de base continues sont donc échantillonnées selon les coordonnées (r, φ) de notre disque d'analyse. Nous discrétisons le calcul de cette projection comme suit,

$$\mathcal{A}_{mn} = \sum_{r, \varphi} c(r, \varphi)\mathcal{J}_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \cos(m\varphi)r \quad (5)$$

$$\mathcal{B}_{mn} = \sum_{r, \varphi} c(r, \varphi)\mathcal{J}_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \sin(m\varphi)r \quad (6)$$

$$\mathcal{M}_{mn} = \sqrt{\mathcal{A}_{mn}^2 + \mathcal{B}_{mn}^2}. \quad (7)$$

La projection dans cette base des données de courbure $|\nabla\mathcal{C}|$ portées par un disque formé de sommets du maillage nous permet d'analyser les comportements de la courbure de façon fréquentielle. Nous étudierons dans nos exemples le module du spectre \mathcal{M}_{mn} .

3 Application et perspectives

Ainsi, nous proposons une analyse originale de la forme des artefacts pour une géométrie et un schéma de subdivision donnés. Il s'agit d'une approche orientée par le traitement du signal et la physique, appliquée à l'étude d'un problème de géométrie. L'importance de cette problématique est de tout premier ordre pour l'analyse des surfaces de subdivision, la caractérisation des artefacts proposée ici étend les analyses existantes. Comme dit précédemment, les résultats se concentrent sur un schéma de subdivision triangulaire dyadique, tel que le schéma de Loop. Pour un niveau de subdivision \mathcal{N} , notre disque d'analyse est donc composé de $2^{\mathcal{N}}$ anneaux de sommets de valence ordinaire autour du sommet central. Nous illustrons quelques résultats en figure 5, pour $\mathcal{N} = 5$, soit 32 anneaux de sommets ordinaires. Dans cet exemple, nous mettons en évidence un artefact non présent sur l'exemple de référence (5.a). Cette analyse spectrale permet de mettre en évidence les différents comportements des schémas de subdivision. Les schémas de Loop tunés [2] et [5] réduisent l'amplitude de l'artefact (5.b) au prix d'oscillations angulaires plus importantes, ce qui confirme notre intuition concernant l'utilisation de cette base. La fréquence angulaire dominante est mesurée dans cet exemple en (4, 1), soit le mode de vibration angulaire $m = 4$ et le mode radial $n = 1$. Dans cet exemple, le schéma de subdivision [5] (5.d) génère un spectre contenant moins d'énergie que le schéma de Loop tuné [2] (5.c). Cette information est confirmée par la synthèse d'une surface moins perturbée par le sommet extraordinaire.

Par la suite, nous approfondirons le lien mathématique existant entre le gradient des données de courbure et les fonctions utilisées comme base de projection. Nous étudierons l'application de cette analyse à l'amélioration du tuning des schémas de subdivision, au filtrage adaptatif des données de courbure ainsi qu'à l'indexation de formes.

Références

- [1] Ursula H. Augsdörfer, Neil A. Dodgson, and Malcolm A. Sabin. Tuning subdivision by minimising gaussian curvature variation near extraordinary vertices. *Comput. Graph. Forum*, 25(3):263–272, 2006.
- [2] Loïc Barthe and Leif Kobbelt. Subdivision scheme tuning around extraordinary vertices. *Comput. Aided Geom. Des.*, 21(6):561–583, 2004.
- [3] Richard Courant and David Hilbert. *Methods of Mathematical Physics*. Wiley-Interscience, 1989.
- [4] Carl de Boor, Klaus Höllig, and Sherman D. Riemenschneider. *Box Splines*. Springer Verlag, 1993.
- [5] Cédric Gérot, François Destelle, and Annick Montanvert. Antagonism between extraordinary vertex and its neighbourhood for defining nested box-splines. *7th International Conference on Mathematical Methods for Curves and Surfaces*, Springer Verlag, 2008.

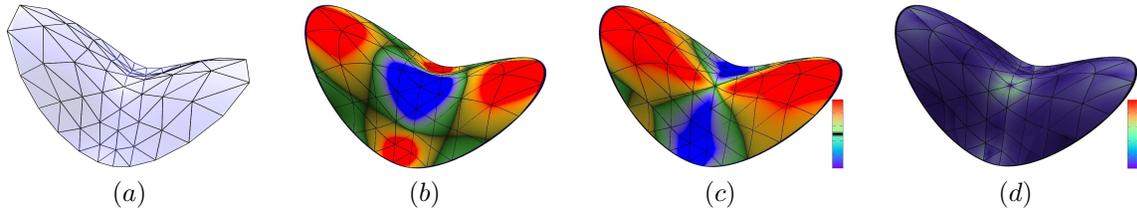


FIG. 3: (a) Maillage de contrôle en selle de cheval sans sommet extraordinaire. Visualisation des mesures de courbure (b) gaussienne, (c) moyenne, et (d) le gradient de courbure absolue $|\nabla C|$ que nous introduisons. Cette mesure est très faible lorsqu’aucun sommet extraordinaire ne perturbe la géométrie. En (b) et (c) les données sont bornées entre -1 et 1 , en (d) entre 0 et 1 .

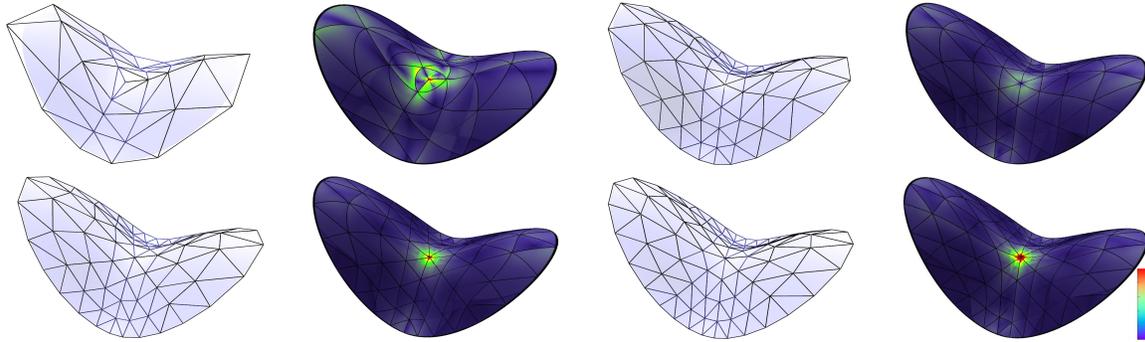


FIG. 4: Visualisation des mesures $|\nabla C|$ sur des maillages dont le sommet central est de valence, respectivement de gauche à droite et de bas en haut, 3, 6, 7 et 8. Le modèle de valence 6, donc entièrement régulier, affiche la plus faible variation de $|\nabla C|$ autour du sommet central.

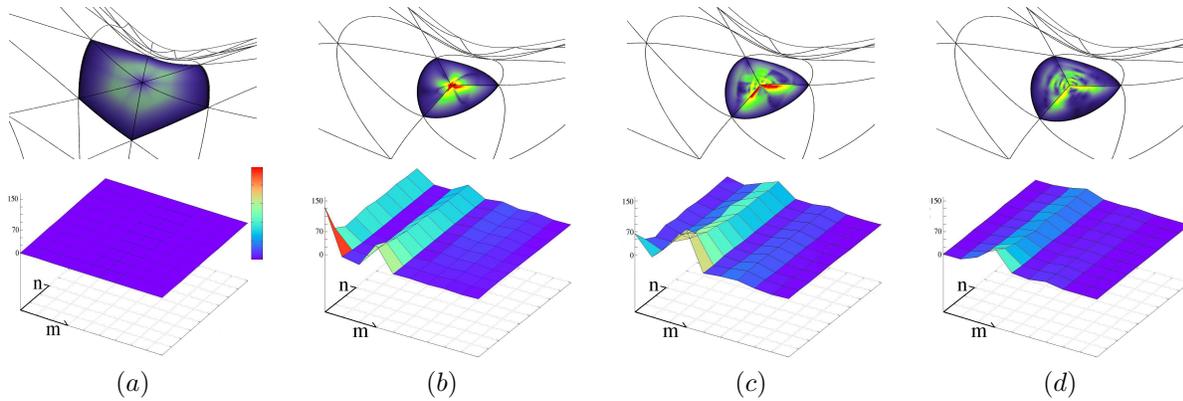


FIG. 5: (a) Analyse du spectre \mathcal{M}_{mn} de la géométrie sans artefact pour $m, n \leq 10$. Comparatif, sur la même géométrie, du schéma de (b) Loop et des schémas tunés de (c) Barthe et Kobbelt [2] et (d) Gérot et coll. [5] pour un sommet extraordinaire central de valence 3. L’artefact est atténué dans le cas des schémas tunés, au prix d’une fréquence angulaire m plus importante.

[6] Igor Guskov, Wim Sweldens, and Peter Schröder. Multiresolution signal processing for meshes. In *SIGGRAPH '99: Proceedings of the 26th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 325–334, New York, NY, USA, 1999. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co.

[7] Evangelos Kalogerakis, Patricio Simari, Derek Nowrouzezahrai, and Karan Singh. Robust statistical estimation of curvature on discretized surfaces. In *SGP '07: Proceedings of the fifth Eurographics symposium on Geometry processing*, pages 13–22, Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland, 2007. Eurographics Association.

[8] Kestutis Karčiauskas, Jörg Peters, and Ulrich Reif. Shape characterization of subdivision surfaces: case studies. *Comput. Aided Geom. Des.*, 21(6):601–614, 2004.

[9] Charles Loop. Smooth subdivision surfaces based on triangles. Master’s thesis, University of Utah, 1987.

[10] Gabriel Taubin. A signal processing approach to fair surface design. *Computer Graphics*, 29(Annual Conference Series):351–358, 1995.

[11] Denis Zorin and Peter Schröder. Subdivision for modeling and animation. In *SIGGRAPH 2000 course notes*, 2000.