

Architecture optimisée de SVD pour le calcul d'un précodeur dans une chaîne de transmission MIMO.

Hélène DUBOIS¹, Olivier BERDER¹, Guillaume GARNIER¹, Baptiste VRIGNEAU², Olivier SENTIEYS¹

¹IRISA Université de Rennes 1
6 rue de Kérampont 22300 Lannion, France

²SIC Université de Poitiers
Bat SP2MI, Bvd Marie et Pierre Curie, 86962 Futuroscope Chasseneuil, France

helene.dubois@enssat.fr, berder@irisa.fr
guillaume.garnier@techway.fr, vrigneau@sic.univ-poitiers.fr, sentieys@irisa.fr

Résumé – L'utilisation de précodeurs dans les systèmes MIMO permet d'adapter les signaux à transmettre aux canaux de propagation. Mais leur détermination nécessite souvent la diagonalisation de la matrice de canal, et donc des calculs complexes comme la décomposition en valeurs singulières (SVD). Nous montrons que la SVD peut être calculée à l'aide d'un algorithme itératif CORDIC, implémenté sur FPGA en virgule fixe. Une étude est faite pour déterminer le nombre d'itérations et la précision en virgule fixe nécessaires à un calcul suffisamment précis de la SVD. Ce bloc est ensuite intégré dans la chaîne complète de transmission décrite sous Matlab et ses performances en matière de taux d'erreur binaire (TEB) sont comparées avec le TEB théorique. La courbe du TEB en fonction du rapport signal à bruit (RSB) montre que la version de l'architecture du CORDIC proposée permet d'atteindre une qualité de service très proche de la valeur théorique et permet donc d'envisager l'implémentation de tels précodeurs avec une complexité matérielle raisonnable.

Abstract – The use of precoders in MIMO systems allows to adapt the signals to the transmission channels. But the computation of these precoders relies on complex calculations, such as singular value decomposition (SVD) of the channel matrix. We propose to compute the SVD thanks to an iterative CORDIC algorithm, implemented in fixed point arithmetic on FPGA. The study then shows the influence of the CORDIC parameters (number of iterations, fixed point precision) on the SVD computing and on the bit-error-rate of the whole transmission system, proving that a good quality of service can be achieved with a reasonable hardware cost.

1 Introduction

Dans le cadre des communications sans fil, la demande croissante en termes de débit de données exigé par les nouveaux services multimédia et d'une meilleure qualité de service nécessite de proposer de nouvelles techniques pour augmenter la capacité du canal de transmission. La technique des antennes multiples, plus connue sous le terme anglais de MIMO (Multiple Input Multiple Output), suscite depuis quelques années de nombreuses recherches et un intérêt certain au sein des acteurs de l'industrie des nouvelles technologies. Les techniques MIMO sont ainsi présentes dans la plupart des nouvelles normes de communication, comme la future génération de téléphonie mobile (4G), application intéressante pour évaluer les nouvelles architectures reconfigurables développées au sein de l'équipe Cairn de l'Irisa.

Un système MIMO se base sur une architecture constituée de plusieurs antennes à l'émission et à la réception et permet d'atteindre une capacité théorique dépassant la limite physique traditionnelle. Suivant la configuration des réseaux d'antennes, en combattant efficacement les évanouissements du signal, la

qualité de service peut ainsi être améliorée en exploitant la diversité des trajets.

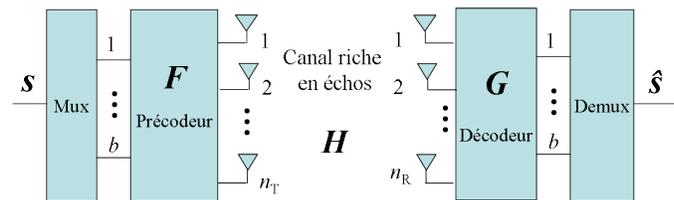


FIG. 1 – Chaîne MIMO

Chaque antenne de réception reçoit les informations provenant de toutes les antennes d'émission. La réponse du canal de transmission est modélisée par une matrice de canal $\mathbf{H} = (h_{ij})$, avec h_{ij} trajet entre la j^{eme} antenne émettrice et la i^{eme} antenne réceptrice.

La connaissance des propriétés de cette matrice à l'émetteur permet la mise en place d'un précodeur et d'un décodeur, qui vont adapter des puissances d'émission sur les antennes en fonction des caractéristiques du canal selon différents critères [1].

La chaîne de transmission complète est maintenant décrite par la figure 1.

Nous nous intéressons à un type de précodeur, le précodeur linéaire $Max - D_{min}$, dans le cadre d'un système à deux antennes émettrices et deux antennes réceptrices. Ce précodeur vise à optimiser la distance minimale entre les points représentant les symboles reçus [2]. Sa détermination s'appuie sur le calcul des valeurs singulières S_1 et S_2 de la matrice \mathbf{H} . La décomposition en valeurs singulières (SVD) peut être réalisée par la méthode de Jacobi [3], qui revient pour une matrice 2×2 à effectuer deux rotations dont les angles sont calculés à partir de la matrice \mathbf{H} . Les équations font appel à des fonctions trigonométriques qui peuvent être calculées grâce à l'algorithme Cordic (COordinate Rotation DIgital Computer) [4] [5].

Cet algorithme itératif approxime les angles par une dichotomie dont les angles successifs ont une tangente égale à 2^{-i} . L'avantage du Cordic est de ne nécessiter que des opérateurs simples comme des additionneurs/soustracteurs, des décaleurs pour réaliser les 2^{-i} et une table d'arctangente. Néanmoins une attention particulière doit être portée à la détermination du nombre d'itérations nécessaires à une précision suffisante des sorties, ainsi qu'à la détermination de la dynamique et de la précision du codage si un codage en virgule fixe est utilisé dans les calculs.

L'étude présente dans la section 2 l'utilisation du Cordic pour le calcul de la SVD, puis l'influence du nombre d'itérations et du choix de codage en virgule fixe sur l'erreur de calcul de la SVD. Une fois le nombre d'itérations et le codage choisis, une architecture de Cordic synthétisable est présentée ainsi que des résultats de synthèse. Cette architecture de Cordic est enfin intégrée dans la chaîne complète de transmission MIMO avec modulation QPSK et décodage basé sur un maximum de vraisemblance. Une étude du TEB de cette version par rapport à une simulation Matlab de référence est présentée dans la section 3.

2 Calcul de la SVD par appels au CORDIC

Pour calculer le précodeur, les valeurs singulières S_1 et S_2 de la matrice de canal doivent être déterminées. La matrice \mathbf{H} étant complexe, le calcul peut s'effectuer en deux étapes comme montré dans [6].

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} Ae^{i\theta_a} & Be^{i\theta_b} \\ Ce^{i\theta_c} & De^{i\theta_d} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Etape 1 : la matrice \mathbf{H} est modifiée de la manière suivante¹ :

$$\begin{bmatrix} c_\phi e^{i\theta_\alpha} & -s_\phi e^{i\theta_\beta} \\ s_\phi e^{i\theta_\alpha} & c_\phi e^{i\theta_\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ae^{i\theta_a} & Be^{i\theta_b} \\ Ce^{i\theta_c} & De^{i\theta_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\psi e^{i\theta_\gamma} & s_\psi e^{i\theta_\delta} \\ -s_\psi e^{i\theta_\delta} & c_\psi e^{i\theta_\gamma} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} We^{i\theta_w} & Xe^{i\theta_x} \\ 0 & Z \end{bmatrix} \quad (2)$$

avec

$$\theta_\alpha = \theta_\beta = \frac{-(\theta_d + \theta_c)}{2}$$

$$\theta_\gamma = -\theta_\delta = \frac{(\theta_d - \theta_c)}{2}$$

et

$$\theta_\phi = 0, \theta_\psi = \tan^{-1}\left(\frac{C}{D}\right)$$

Etape 2 : une dernière transformation est opérée afin d'obtenir les valeurs singulières S_1 et S_2 de la matrice :

$$\begin{bmatrix} c_\lambda e^{i\theta_\xi} & -s_\lambda e^{i\theta_\eta} \\ s_\lambda e^{i\theta_\xi} & c_\lambda e^{i\theta_\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} We^{i\theta_w} & Xe^{i\theta_x} \\ 0 & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\rho e^{i\theta_\zeta} & s_\rho e^{i\theta_\omega} \\ -s_\rho e^{i\theta_\zeta} & c_\rho e^{i\theta_\omega} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

avec pour déterminer $\theta_\xi, \theta_\zeta, \theta_\eta$ et θ_ω

$$\theta_\xi = \frac{-(\theta_x + \theta_w)}{2}, \theta_\eta = \frac{(\theta_x - \theta_w)}{2},$$

$$\theta_\zeta = \frac{(\theta_x - \theta_w)}{2}, \theta_\omega = \frac{(\theta_w - \theta_x)}{2}$$

et pour déterminer θ_ρ et θ_λ

$$\theta_{sum} = (\theta_\lambda + \theta_\rho) = \tan^{-1}\left(\frac{X}{Z - W}\right),$$

$$\theta_{diff} = (\theta_\rho - \theta_\lambda) = \tan^{-1}\left(\frac{-X}{Z + W}\right)$$

donc :

$$\theta_\rho = \frac{\theta_{sum} + \theta_{diff}}{2}$$

$$\theta_\lambda = \frac{\theta_{sum} - \theta_{diff}}{2}$$

Les multiplications de matrices apparaissant dans (2) vont être réalisées en deux transformations de la manière suivante :

$$R(\theta_\phi)^T \begin{bmatrix} e^{i\theta_\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ae^{i\theta_a} & Be^{i\theta_b} \\ Ce^{i\theta_c} & De^{i\theta_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\theta_\gamma} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_\delta} \end{bmatrix} R(\theta_\psi) \quad (4)$$

où :

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Les premières multiplications se font par de simples additions d'angles :

$$\begin{bmatrix} e^{i\theta_\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ae^{i\theta_a} & Be^{i\theta_b} \\ Ce^{i\theta_c} & De^{i\theta_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\theta_\gamma} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ae^{i\theta'_a} & Be^{i\theta'_b} \\ Ce^{i\theta'_c} & De^{i\theta'_d} \end{bmatrix} \quad (5)$$

avec

$$\theta'_a = \theta_a + \theta_\alpha + \theta_\gamma, \theta'_b = \theta_b + \theta_\alpha + \theta_\delta$$

et

$$\theta'_c = \theta_c + \theta_\beta + \theta_\gamma, \theta'_d = \theta_d + \theta_\beta + \theta_\delta$$

Les deuxièmes multiplications sont de simples rotations.

Les différentes transformations nécessaires dans ces deux étapes (calcul d'angle, rotation, arctangente) sont calculées grâce au Cordic en choisissant le mode et les différentes valeurs initiales pour l'itération comme le montre la table 1.

¹on note ici $\cos \theta_\phi$ et $\sin \theta_\phi$, c_ϕ et s_ϕ

m	mode	initialisation	sortie
1	rotation	$x_0 = x$ $y_0 = y$ $z_0 = \theta$ $x_0 = 1$ $y_0 = 0$ $z_0 = \theta$	$x_n = x * \cos\theta - y * \sin\theta$ $y_n = y * \cos\theta + x * \sin\theta$ $z_n = 0$ $x_n = \cos\theta$ $y_n = \sin\theta$ $z_n = 0$
1	vectoring	$x_0 = x$ $y_0 = y$ $z_0 = \theta$	$x_n = \sqrt{x^2 + y^2}$ $y_n = 0$ $z_n = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) + z_0$
0	rotation	$x_0 = x$ $y_0 = y$ $z_0 = z$	$x_n = x$ $y_n = y + x * z$ $z_n = 0$
0	vectoring	$x_0 = x$ $y_0 = y$ $z_0 = z$	$x_n = x$ $y_n = 0$ $z_n = z + \frac{y}{x}$
-1	rotation	$x_0 = x$ $y_0 = y$ $z_0 = \theta$ $x_0 = 1$ $y_0 = 0$ $z_0 = \theta$	$x_n = x * \cosh\theta - y * \sinh\theta$ $y_n = y * \cosh\theta + x * \sinh\theta$ $z_n = 0$ $x_n = \cosh\theta$ $y_n = \sinh\theta$ $z_n = 0$
-1	vectoring	$x_0 = x$ $y_0 = y$ $z_0 = \theta$	$x_n = \sqrt{x^2 - y^2}$ $y_n = 0$ $z_n = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$

TAB. 1 – Fonctions calculées par l’algorithme Cordic

Une étude est ensuite faite pour choisir le nombre minimal d’itérations du Cordic, ainsi que le nombre minimal de bits pour la partie fractionnaire du codage en virgule fixe comme le montre la figure 2. Le choix de 8 itérations et d’un codage sur 16 bits avec 8 bits pour la partie fractionnaire est retenu. En effet, on ne constate pas d’amélioration notable au delà de 8 itérations, et pour le calcul, il faut autant de bits de précision que d’itérations.

Une architecture matérielle du Cordic proposée dans [5] et représentée sur la figure 3, est ensuite utilisée, programmée en VHDL et synthétisée pour FPGA sous Quartus.

Elle est simulée sous Modelsim et est intégrée au calcul de la SVD décrite sous *Matlab* grâce à l’outil *Link For Modelsim*. Les résultats ont été comparés à ceux du calcul théorique en mode *rotation* et *vectoring*. L’erreur absolue reste inférieure à 0,05 pour tous les tests effectués.

3 Calcul du précodeur $max - D_{min}$ et qualité de service de la chaîne MIMO

A partir de la détermination des valeurs singulières, le précodeur peut être calculé. Afin de juger de l’influence des différentes approximations faites dans les calculs du précodeur (dues à l’utilisation du Cordic dans le calcul de la SVD, à l’approximation par des droites dans le calcul du précodeur et à

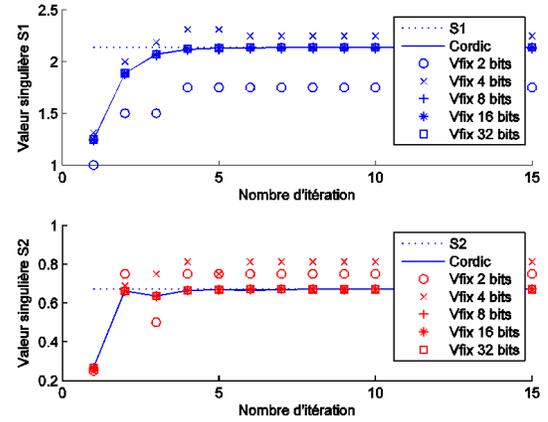


FIG. 2 – Convergence de l’algorithme Cordic pour différentes précisions

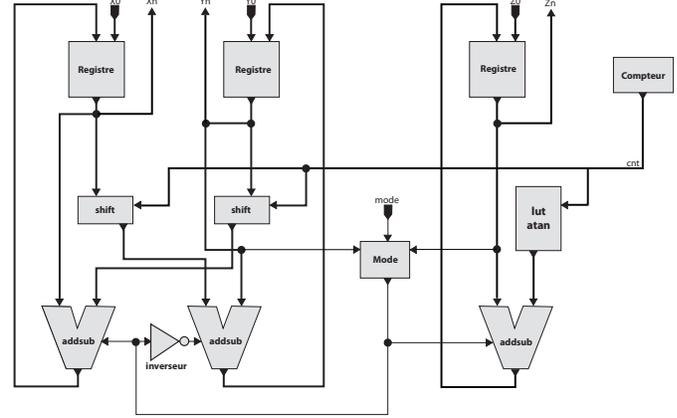


FIG. 3 – Architecture du coeur de boucle de l’algorithme "Cordic"

l’implémentation en virgule fixe des calculs), nous avons utilisé le critère le plus pertinent en termes de qualité de service à savoir le taux d’erreur binaire (TEB) en fonction du rapport signal à bruit (RSB). La figure 4 montre l’influence du nombre d’itérations sur le TEB global.

La figure 5 montre un TEB de la version implémente très proche du TEB théorique. La version *Matlab* qui utilise le Cordic pour calculer la SVD et le précodeur donne un TEB quasiment identique au TEB théorique, montrant ainsi que la légère dégradation de la version synthétisable est principalement due au codage en virgule fixe. Néanmoins, on constate que l’implémentation offre de bonnes caractéristiques en ne dégradant pas significativement la qualité de service.

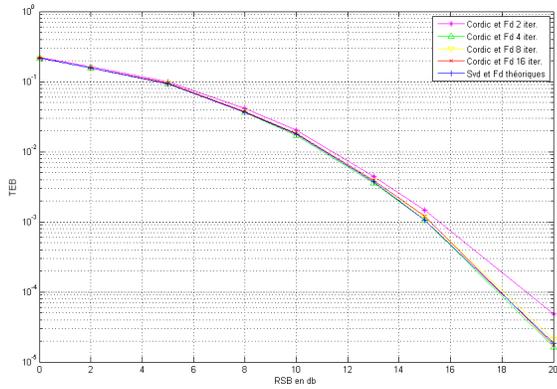


FIG. 4 – Analyse du TEB en fonction du RSB pour différents nombre d'itérations

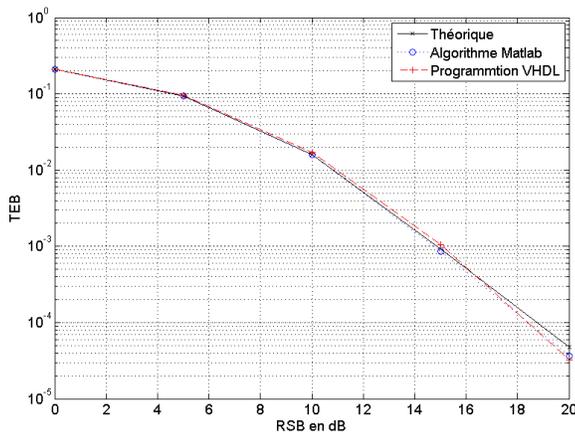


FIG. 5 – Analyse du TEB en fonction du RSB pour les 3 versions (théorique, Matlab avec Cordic, avec Cordic VHDL)

4 Conclusion et perspectives

Nous avons montré que l'utilisation d'un algorithme de Cordic en virgule fixe de complexité peu élevée pour les calculs d'un précodeur linéaire max- D_{min} permet d'atteindre une qualité de service satisfaisante avec un décodeur basé sur un maximum de vraisemblance. Malgré la nécessité de calculer la SVD de la matrice de canal pour sa détermination, ce précodeur peut donc être envisagé dans une chaîne MIMO. L'étude des performances des calculs au niveau de l'ensemble du système permet d'identifier les paramètres importants pour la qualité de service de l'ensemble de la chaîne. D'autres études pourront être réalisées pour vérifier ces performances avec des décodeurs moins robustes que ceux basés sur le maximum de vraisemblance. Une extension à des systèmes MIMO avec plus de deux antennes à l'émission et à la réception est également envisagée.

Références

- [1] M. VU, A. PAULRAJ. *MIMO Wireless Linear Precoding*. IEEE Signal processing magazine, Vol 24, Issue 5, september 2007
- [2] L. COLLIN, O. BERDER, P. ROSTAING AND G. BUREL. *Optimal Minimum Distance-Based Precoder for MIMO Spatial Multiplexing Systems*. IEEE transactions on signal processing, Vol 52, n 03, pp 617-627 march 2004
- [3] R. P. BRENT, F. T. LUK, C VAN LOAN. *Computation of the singular value decomposition using mesh-connected processors*. Journal of VLSI and computer systems, volume 1, number3, pages 242-270, Computer Science Press, 1985
- [4] H DAWID, H MEYR. *CORDIC Algorithms and Architectures*, IRE Transactions on Electronic Computers, volume 8, number 3, pages 330-334, 1959
- [5] R. ANDRAKA. *A survey of Cordic algorithms for FPGA based computers.*, Proceedings of the 1998 ACM/SIGDA sixth international symposium on Field programmable gate arrays, pages 191-200, ACM New York, NY, USA, 1998
- [6] N. D. HEMKUMAR. *A Systolic VLSI Architecture for Complex SVD*. IEEE International Symposium on Circuits and Systems, ISCAS'92 Proceedings, volume 3, 1992