

Décomposition et classification de composantes spectrales dans des cubes de données radio-astronomiques

Vincent MAZET¹, Christophe COLLET¹, Bernd VOLLMER²

¹LSIIT (UMR 7005 Université de Strasbourg–CNRS),
Bd Sébastien Brant, BP 10413, 67412 Illkirch Cedex, France

²Observatoire Astronomique de Strasbourg (UMR 7550 Université de
Strasbourg–CNRS), 11 rue de l’Université, 67000 Strasbourg, France
{vincent.mazet,c.collet,bernd.vollmer}@unistra.fr

Résumé – Un cube de données astronomiques est une image multispectrale où les pixels sont des spectres dont les composantes spectrales sont décalées par effet Doppler à cause des mouvements de gaz. Nous présentons une méthode pour analyser la cinématique des structures de gaz : tout d’abord, une méthode bayésienne permet de décomposer les spectres en une somme de composantes ; ensuite, les composantes estimées sont classées par similarité de forme. La décomposition et la classification de composantes spectrales sur des spectres répartis dans un espace bidimensionnel est un sujet original. Les performances de la méthode sont discutées sur un cas réel.

Abstract – An astronomical data cube is a multispectral image where each pixel is a spectrum. The spectrum consists of an emission line which is Doppler-shifted by gas motions along the line of sight. These data are essential to understand the gas distribution and kinematics of the astronomical object. We propose a two-step method to extract coherent kinematic structures from the data cube. First, the spectra are decomposed into a sum of Gaussians using a Bayesian method to obtain an estimation of spectral lines. Second, we aim at tracking the estimated lines to get an estimation of the structures in the cube. Decomposition and classification of spectral lines in spectra which set in a 2D space is an original contribution. The performance of the approach is evaluated on a real radio-astronomical observation.

1 Introduction

Les galaxies sont principalement constituées de gaz formant des structures en mouvement. À cause de l’expansion de l’Univers (décalage vers le rouge), elles s’éloignent pour la plupart de la Terre. Par ailleurs, les structures de gaz au sein de la galaxies ont également des mouvements propres. Ces mouvements globaux ou locaux du gaz intéressent les astronomes car ils leur permettent de comprendre la formation et l’évolution des galaxies. Ils sont observés en analysant les spectres d’émission des gaz qui sont décalés en longueur d’onde (effet Doppler) : de cette manière, les cinématiques des structures de gaz sont caractérisées par les décalages de leur spectre.

Les fréquences radio sont particulièrement adaptés à ces observations. Un cube de données radio-astronomiques est une image multispectrale dont les axes correspondent aux deux coordonnées spatiales et à la longueur d’onde. Chaque pixel de l’image est donc un spectre constitué de raies. Du fait de l’effet Doppler, les raies varient en longueur d’onde et sont donc représentatives de la distribution et de la cinématique du gaz constituant l’objet observé¹.

L’analyse des cubes est faite à partir des images à chaque longueur d’onde et des cartes de moment (figure 1) : le moment 0 correspond à l’intensité (c’est la moyenne des bandes) et le moment 1 au champ de vitesse (c’est la somme des intensités des bandes pondérées par la longueur d’onde). Or, si le gaz a une structure trop complexe, l’analyse de ces images devient

difficile. En effet, des informations importantes peuvent rester cachées car les moments sont calculés en intégrant les spectres et ne reflètent donc pas le comportement individuel des différents composantes. En particulier, l’analyse devient extrêmement complexe lorsque les spectres contiennent plusieurs composantes. Notre approche doit permettre une analyse automatique des cubes radio-astronomiques afin d’aider l’astronome à appréhender des données complexes, tout en étant complémentaire de la méthode d’analyse standard.

Nous proposons une méthode à deux étapes pour isoler les structures cinématiques du gaz. Dans un premier temps (section 2), les spectres sont décomposés un à un en une somme de composantes dont le nombre et les paramètres (position, amplitude et largeur) sont estimés : c’est un problème d’extraction d’objets établi ici dans le cadre bayésien. Une seconde étape (section 3) prend en compte la dépendance spatiale entre spectres en classifiant les composantes estimées en fonction de leur similarité : deux composantes de deux spectres voisins sont affectées à la même classe si leurs paramètres sont très proches. Un seuil permet également à l’astronome d’analyser le résultat en fonction de l’intensité des raies. La décomposition et la classification sont effectuées séparément pour deux raisons : d’une part la méthode proposée s’avère plus simple à développer, d’autre part cela permet à l’astronome de modifier la classification via le seuil, sans avoir à décomposer à nouveau le cube (étape longue en temps de calcul). Notre méthode fournit ainsi les régions correspondant à la présence de structures cinématiques cohérentes et leurs caractéristiques spectrales. Enfin, la section 4 présente les résultats obtenus sur une image réelle et discute des performances de la méthode.

¹En astronomie, le terme « raie » se réfère à la lumière émise lors d’une transition de niveau énergétique d’un atome ou d’une molécule. Nous dirons par ailleurs qu’un spectre est constitué de « composantes ».

2 Décomposition des spectres

2.1 Modèle des spectres

On suppose que le cube contient S spectres à traiter : chaque spectre $s \in \{1, \dots, S\}$ est un signal \mathbf{y}_s modélisé comme une somme de K_s composantes et d'un bruit \mathbf{e}_s . Ces composantes sont supposées gaussiennes (modèle usuel en radio-astronomie) et modélisées par des fonctions vectorielles paramétriques \mathbf{f} de position \mathbf{c}_{sk} , amplitude \mathbf{a}_{sk} et largeur \mathbf{w}_{sk} :

$$\mathbf{y}_s = \sum_{k=1}^{K_s} \mathbf{a}_{sk} \mathbf{f}(\mathbf{c}_{sk}, \mathbf{w}_{sk}) + \mathbf{e}_s = \mathbf{F}_s \mathbf{a}_s + \mathbf{e}_s$$

où

$$\mathbf{f}_n(\mathbf{c}_{sk}, \mathbf{w}_{sk}) = \exp\left(-\frac{(n - \mathbf{c}_{sk})^2}{2\mathbf{w}_{sk}^2}\right),$$

$$\mathbf{F}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1(\mathbf{c}_{s1}, \mathbf{w}_{s1}) & \dots & \mathbf{f}_1(\mathbf{c}_{sK_s}, \mathbf{w}_{sK_s}) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{f}_N(\mathbf{c}_{s1}, \mathbf{w}_{s1}) & \dots & \mathbf{f}_N(\mathbf{c}_{sK_s}, \mathbf{w}_{sK_s}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{s1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{sK_s} \end{pmatrix}$$

et $n \in \{1, \dots, N\}$ est l'indice de la longueur d'onde.

De plus, $\forall s, k, \mathbf{a}_{sk} \geq 0$ car les composantes sont forcément d'intensité positive.

Il est peut être simpliste de supposer les composantes parfaitement gaussiennes alors qu'elles peuvent être asymétriques. Or, modéliser l'asymétrie nécessiterait des variables supplémentaires et nous pensons qu'un modèle plus complexe n'apporterait pas de résultats significativement meilleurs.

2.2 Modèle bayésien

Le problème inverse est clairement mal posé. Aussi, nous nous plaçons dans le cadre bayésien et définissons le modèle hiérarchique suivant. Nous avons tenté, dans la mesure du possible, de travailler avec des lois a priori classiques ou conjuguées afin d'obtenir des lois a posteriori conditionnelles pour lesquelles il existe des algorithmes de simulation [8].

- K_s suit une loi de Poisson où le nombre moyen de composants est λ [4] ;
- le bruit est supposé stationnaire dans tout le cube (hypothèse réaliste en radio-astronomie). Il est supposé blanc, gaussien, de moyenne nulle, indépendant et identiquement distribué de variance r_e ;
- sans information sur la position \mathbf{c}_{sk} des composants, nous les supposons uniformément distribués sur $[1; N]$;
- les amplitudes \mathbf{a}_{sk} sont distribuées suivant une distribution (conjuguée) normale à support positif (afin de garantir la positivité des amplitudes) et de variance r_a ;
- les largeurs \mathbf{w}_{sk} sont supposées être distribuées suivant un a priori inverse gamma $\mathcal{IG}(\alpha_w, \beta_w)$ dont les paramètres peuvent être fixés en fonction de la largeur approximative des raies connue a priori.
- l'hyperparamètre r_a est distribué suivant une loi (conjuguée) inverse gamma $\mathcal{IG}(\alpha_a, \beta_a)$ dont la moyenne est fixée à l'amplitude approximative μ des composantes (estimée au préalable grossièrement) et la variance est grande, d'où $\alpha_a = 2 + \varepsilon$ et $\beta_a = \mu + \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll 1$;
- Un a priori inverse gamma $\mathcal{IG}(\alpha_e, \beta_e)$ de paramètres $\alpha_e = \beta_e \ll 1$ est choisi pour r_e : cela correspond au cas limite de l'a priori de Jeffreys traditionnellement utilisé mais malheureusement impropre.

On en déduit alors les lois a posteriori conditionnelles (le calcul de la loi sur \mathbf{a}_{sk} peut être trouvé dans [6, Annexe B]) :

$$\mathbf{c}_{sk} | \dots \propto \exp\left(-\|\mathbf{y}_s - \mathbf{F}_s \mathbf{a}_s\|^2 / 2r_e\right) \mathbb{I}_{[1, N]}(\mathbf{c}_{sk}),$$

$$\mathbf{a}_{sk} | \dots \sim \mathcal{N}^+(\mu_{sk}, \rho_{sk}),$$

$$\mathbf{w}_{sk} | \dots \propto \exp\left(-\frac{\|\mathbf{y}_s - \mathbf{F}_s \mathbf{a}_s\|^2}{2r_e} - \frac{\beta_w}{\mathbf{w}_{sk}}\right) \frac{1}{\mathbf{w}_{sk}^{\alpha_w + 1}} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\mathbf{w}_{sk}),$$

$$r_a | \dots \sim \mathcal{IG}\left(\frac{L}{2} + \alpha_a, \frac{1}{2} \sum_s \sum_{k=1}^{K_s} \mathbf{a}_{sk}^2 + \beta_w\right),$$

$$r_e | \dots \sim \mathcal{IG}\left(\frac{NS}{2} + \alpha_e, \frac{1}{2} \sum_s \|\mathbf{y}_s - \mathbf{F}_s \mathbf{a}_s\|^2 + \beta_e\right)$$

avec :

$$\mu_{sk} = \frac{\rho_{sk} \mathbf{z}_{sk}^T \mathbf{F}_{sk}}{r_e}, \quad \rho_{sk} = \frac{r_a r_e}{r_e + r_a \mathbf{F}_{sk}^T \mathbf{F}_{sk}},$$

$$\mathbf{z}_{sk} = \mathbf{y}_s - \mathbf{F}_s \mathbf{a}_s + \mathbf{F}_{sk} \mathbf{a}_{sk}$$

et N est la longueur du spectre, S est le nombre de spectre, L est le nombre total de composantes ($L = \sum_s K_s$) et \mathbf{F}_{sk} correspond à la k^e colonne de la matrice \mathbf{F}_s . On note $\mathcal{N}^+(\mu, \sigma^2)$ la distribution normale à support positif définie par :

$$p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma^2}\right)\right]^{-1} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

où erf est la fonction erreur.

2.3 Algorithme MCMC & estimation

Comme l'a posteriori global est complexe et de grande dimension, nous choisissons de trouver la solution du problème à l'aide des méthodes de Monte Carlo par chaîne de Markov (MCMC) [8]. Plus précisément, comme la dimension du problème n'est pas constante, nous utilisons l'algorithme réversible jump MCMC [4] qui est très répandu, rapide et flexible [1]. Nous choisissons pour cela les mouvements suivants :

- B_s : une composante est créée dans le spectre s ;
- D_s : une composante est supprimée dans le spectre s ;
- U_s : mise à jour des variables $\mathbf{c}_s, \mathbf{a}_s$ et \mathbf{w}_s ;
- H : mise à jour des hyperparamètres r_a et r_e .

Les probabilités b_s, d_s, u_s et h des mouvements B_s, D_s, U_s et H sont définies ainsi :

$$b_s = \frac{\gamma}{D+1} \min\left\{1, \frac{p(K_s+1)}{p(K_s)}\right\} \quad u_s = \frac{1}{D+1} - b_s - d_s$$

$$d_s = \frac{\gamma}{D+1} \min\left\{1, \frac{p(K_s-1)}{p(K_s)}\right\} \quad h = \frac{1}{D+1}$$

avec γ tel que $b_s + d_s \leq 0.9$ et $d_s = 0$ si $K_s = 0$.

Il existe plusieurs méthodes pour simuler des gaussiennes à support positif [5] ou des inverse gamma [8]. En revanche, les variables \mathbf{c}_{sk} et \mathbf{w}_{sk} sont estimées à l'aide d'un algorithme de Metropolis-Hastings à marche aléatoire [8] et sont simulées conjointement pour éviter de calculer la vraisemblance deux fois. La loi candidate est une gaussienne tronquée (séparable).

L'estimation est calculée en choisissant dans les chaînes de Markov le meilleur échantillon simulé qui minimise l'erreur quadratique moyenne : c'est une estimation très simple du maximum a posteriori qui a l'avantage de ne pas nécessiter l'enregistrement des chaînes (le nombre d'inconnues, et donc le nombre de chaînes à sauvegarder étant prohibitif).

3 Classification des composantes

3.1 Approche proposée

La décomposition (section 2) fournit pour chaque spectre K_s composantes de paramètres $\mathbf{x}_{sk} = \{\mathbf{c}_{sk}, \mathbf{a}_{sk}, \mathbf{w}_{sk}\}$. L'objectif de la classification est d'affecter à chaque composant (s, k) une classe $\mathbf{q}_{sk} \in \mathbb{N}^*$, chaque classe correspondant à une unique structure de gaz. Par ailleurs, les composantes dont l'amplitude est plus petite qu'un seuil τ défini par l'astronome ne sont pas considérées : cette condition permet à l'astronome d'effectuer une analyse en fonction de l'intensité.

Nous supposons que dans une même structure, les composantes évoluent lentement en position, amplitude et largeur. De ce fait, deux composants de deux spectres voisins sont considérés dans la même classe si leurs paramètres sont suffisamment proches. La dépendance spatiale est introduite en définissant un champ de Gibbs sur l'image décomposée [2] :

$$p(\mathbf{q}|\mathbf{x}) = \frac{1}{Z} \exp(-U(\mathbf{q}|\mathbf{x})) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\sum_{c \in \mathcal{C}} U_c(\mathbf{q}|\mathbf{x})\right)$$

où Z est la fonction de partition, \mathcal{C} représente l'ensemble des cliques d'ordre 2 dans un système de connexité 4 et la fonction de potentiel est définie comme le coût total de la classification.

En supposant que la composante (s, k) située dans le spectre s a pour classe \mathbf{q}_{sk} , alors la composante (t, l) située dans un spectre voisin $t \in \{1, \dots, S\}$ ($l \in \{1, \dots, K_t\}$) a pour classe $\mathbf{q}_{tl} = \mathbf{q}_{sk}$ si leurs paramètres sont proches. Dans ce cas, nous associons un coût à la composante (s, k) égal à la distance $D(\mathbf{x}_{sk}, \mathbf{x}_{tl})^2$ calculée à partir des paramètres des deux composants. Au contraire, si aucune composante du spectre t n'est suffisamment proche de la composante (s, k) , le coût de la composante est fixé à σ^2 qui est la distance maximale codant la similarité minimale permise. Ainsi, si les composantes (s, k) et (t, l) sont trop différentes (*i.e.* $D(\mathbf{x}_{sk}, \mathbf{x}_{tl})^2 > \sigma^2$), il sera moins coûteux de les laisser dans deux classes différentes.

Formellement, le coût total de la classification (la fonction de potentiel) est égal à la somme des coûts de chaque composante :

$$U_c(\mathbf{q}|\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{K_s} \varphi(\mathbf{x}_{sk}, \mathbf{q}_{sk}, \mathbf{x}_t, \mathbf{q}_t)$$

où s et t sont les deux spectres impliqués dans la clique c et $\varphi(\mathbf{x}_{sk}, \mathbf{q}_{sk}, \mathbf{x}_t, \mathbf{q}_t)$ est le coût associé à la composante (s, k) :

$$\varphi(\mathbf{x}_{sk}, \mathbf{q}_{sk}, \mathbf{x}_t, \mathbf{q}_t) = \begin{cases} D(\mathbf{x}_{sk}, \mathbf{x}_{tl})^2 & \text{si } \exists l / \mathbf{q}_{sk} = \mathbf{q}_{tl}, \\ \sigma^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le coût $\varphi(\mathbf{x}_{sk}, \mathbf{q}_{sk}, \mathbf{x}_t, \mathbf{q}_t)$ est en fait une parabole tronquée qui permet d'effectuer une classification robuste [9]. Enfin, $D(\mathbf{x}_{sk}, \mathbf{x}_{tl})$ est la distance euclidienne normalisée (les trois paramètres n'ayant pas la même unité) :

$$D(\mathbf{x}_{sk}, \mathbf{x}_{tl}) = \sqrt{\left(\frac{\mathbf{c}_{sk} - \mathbf{c}_{tl}}{\delta_c}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{a}_{sk} - \mathbf{a}_{tl}}{\delta_a}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{w}_{sk} - \mathbf{w}_{tl}}{\delta_w}\right)^2}$$

Nous supposons que deux paramètres sont similaires si leur position ou leur largeur ne diffère par de plus de 1,2 canal fréquentiel ou si la différence entre leurs amplitudes n'excède pas 40% de l'amplitude maximale. Ainsi, $\delta_c = \delta_w = 1, 2$, $\delta_a = \max(\mathbf{a}_{sk}, \mathbf{a}_{s'k'}) \times 40\%$ et $\sigma = 1$.

3.2 Algorithme

Un algorithme glouton permet d'effectuer la classification en un temps raisonnable (environ 36 s pour les 9463 spectres décomposés du cube présenté section 4). À partir d'une première composante affectée à la classe 1, l'algorithme cherche les composantes similaires dans les spectres voisins et les affecte à la même classe. Si aucune nouvelle composante ne vérifie les conditions de similarité, alors l'algorithme recommence avec la classe 2 et ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les composantes estimés du cube soient classées.

L'algorithme est présenté ci-dessous ; on note z^* l'indice incrémental codant les classes et \mathcal{L} est l'ensemble des composantes à classer.

1. initialiser $z^* = 0$
2. tant qu'il existe des composantes non classées :
 3. $z^* = z^* + 1$
 4. choisir au hasard une composante non classée (s, k)
 5. poser $\mathcal{L} = \{(s, k)\}$
 6. tant que $\mathcal{L} \neq \emptyset$:
 7. soit (s, k) le premier élément de \mathcal{L}
 8. poser $\mathbf{q}_{sk} = z^*$ et supprimer (s, k) de \mathcal{L}
 9. parmi les quatre pixels voisins t de s , choisir les composantes l qui vérifient :
 - (C1) elles ne sont pas encore classées
 - (C2) $D(\mathbf{x}_{sk}, \mathbf{x}_{tl})^2 < \sigma^2$
 - (C3) $\mathbf{a}_{tl} < \tau$
 10. Ajouter (t, l) à \mathcal{L}

4 Application à un cube de données

La méthode est appliquée à une observation dans la bande radio de la galaxie NGC 4254 située dans l'amas de la Vierge. Le cube original de taille $512 \times 512 \times 42$ a été obtenu avec le Very Large Array [7], nous ne présentons ici que la région d'intérêt. Comme ce cube ne possède qu'une seule composante importante (la raie HI à 21 cm), une raie artificielle est ajoutée dans une région circulaire au nord afin de vérifier la capacité de la méthode proposée à différencier des structures superposées. Notons que les deux cartes de moment (figure 1) ne permettent pas de distinguer les composantes naturelle et artificielle.

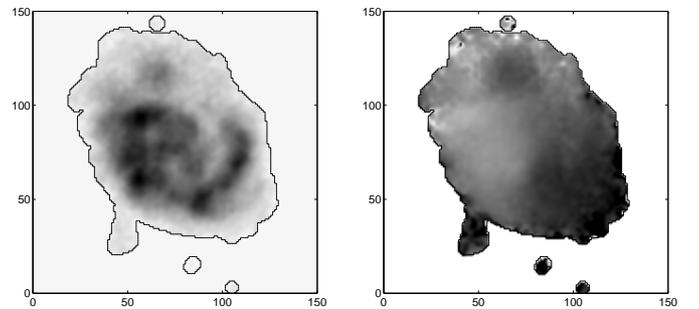


FIG. 1 – Moment 0 (gauche) et 1 (droite) de la galaxie NGC 4254 avec une raie artificielle rajoutée. Le masque est représenté par une ligne noire. Les images sont représentées en inverse vidéo avec l'ascension droite en abscisse et la déclinaison en ordonnée : le nord céleste se situe donc en haut des images et l'est céleste à gauche.

Avant tout, un masque est appliqué sur l'image afin de réduire le temps de calcul. Le programme Matlab a été exécuté sur un PC double cœur (3,8 GHz chacun) avec $\lambda = 1$, $\tau = 0$ et 5000 itérations (environ 5h43). L'estimation obtenue est très satisfaisante car la différence entre le cube original et le cube estimé est très faible; cela est confirmé par l'inspection visuelle de la décomposition sur quelques spectres. Les composantes estimées sont classées en 9056 classes, mais la majorité contiennent trop peu de composantes pour être significatives. Seulement trois classes, regroupant plus de 650 composantes chacune, ont une signification physique (figure 2); on y reconnaît la classe artificielle (c & d).

L'analyse des moments de ces classes est également intéressant. En effet, le champ de vitesse de la grande structure montre un disque en rotation (figure 2 b) car les composantes sont décalées différemment au nord-est et au sud-ouest de la galaxie. De même, la composante artificielle est d'intensité maximale au centre (figure 2 c) avec un champ de vitesse quasi-constant de moyenne 28,69 (figure 2 d). Ces estimations sont en accord avec les données, la composante artificielle ayant un profil gaussien et étant à l'indice de fréquence 28. L'approche proposée fonctionne avec succès puisqu'elle est capable de distinguer clairement les trois structures principales de la galaxie.

Flitti *et al.* [3] ont proposé une méthode dans laquelle les spectres sont également décomposés en gaussiennes, ceci afin d'obtenir des données réduites qui alimentent un algorithme de segmentation bayésien. Cette approche a deux différences majeures avec la nôtre : la décomposition des spectres est effectuée sur une base fixe et la classification est effectuée sur les spectres et non les composantes. La carte de segmentation obtenue est représentée figure 3 : il apparaît plus difficile de distinguer simplement les différentes structures.

5 Conclusion et perspectives

Nous avons proposé dans cette article une méthode permettant de distinguer les structures de gaz dans une galaxie. Notre méthode est plus flexible et permet de décomposer des spectres plus complexes que la méthode de Flitti [3]. En revanche, elle est incapable de distinguer deux structures qui se croisent puisqu'il existe au moins un pixel où les composantes des structures sont proches (et donc considérées comme étant dans la même classe). Les travaux futurs porteront donc sur la recherche d'un modèle permettant de prendre en compte cet aspect, en effectuant par exemple la décomposition et la classification conjointement à l'aide d'un critère de régularisation sur l'évolution des paramètres des composantes.

Références

[1] O. Cappé, C.P. Robert et T. Rydén : Reversible jump, birth-and-death and more general continuous time Markov chain Monte Carlo samplers. *J. Roy. Stat. Soc. B* 65, pp. 679–700, 2003.

[2] R. Chellappa et A. Jain. *Markov random fields. Theory and application*, Academic Press, 1993.

[3] F. Flitti, C. Collet, B. Vollmer et F. Bonnarel. Multiband segmentation of a spectroscopic line data cube : application to the HI data cube of the spiral galaxy NGC 4254, *EURASIP J. Appl. Si. Pr.* 15, pp. 2546–2558, 2005.

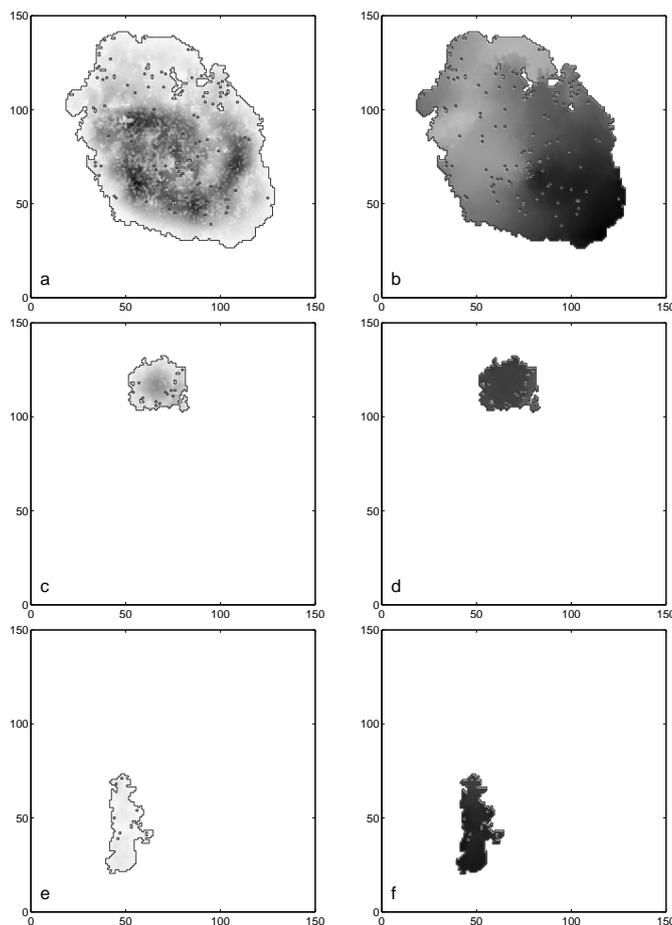


FIG. 2 – Résultat de la méthode proposée : moments 0 et 1 des trois classes estimées principales.

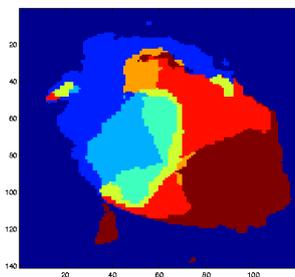


FIG. 3 – Carte de segmentation de Flitti [3].

[4] P.J. Green. Reversible jump Markov chain Monte Carlo computation and Bayesian model determination, *Biometrika* 82, pp. 711–732, 1995.

[5] V. Mazet, D. Brie et J. Idier : Simuler une distribution normale à support positif à partir de plusieurs lois candidates. *20^e GRETSI*, 2005.

[6] V. Mazet. *Développement de méthodes de traitement de signaux spectroscopiques: estimation de la ligne de base et du spectre de raies*, thèse de doctorat, Nancy Université, 2005.

[7] B. Phookun, S.N. Vogel et L.G. Mundy. NGC 4254 : a spiral galaxy with an $m = 1$ mode and infalling gas, *Astrophys. J.* 418, pp. 113-122, 1993.

[8] C. Robert et G. Casella. *Monte Carlo statistical methods*, Springer-Verlag, 2002.

[9] P. Rousseeuw et A. Leroy. *Robust Regression and Outlier Detection, Series in Applied Probability and Statistics*, Wiley-Interscience, 1987.