

Identifiabilité du mélange de sources polarisées : le cas où le nombre de capteurs est inférieur au nombre de sources

Xijing GUO^{1,2}, Sebastian MIRON¹, David BRIE¹

¹Centre de Recherche en Automatique de Nancy, Nancy-Université, CNRS
Boulevard des Aiguillettes, B.P. 70239, F-54506 Vandœuvre-lès-Nancy, France

²Department of Information and Communication Engineering, Xi'an Jiaotong University,
Xi'an Jiaotong University, 710049 Xi'an, China

Prénom.Nom@cran.uhp-nancy.fr

Résumé – Dans cette communication nous analysons l'identifiabilité du modèle trinéaire d'un mélange de sources polarisées enregistré sur une antenne de capteurs vectoriels, dans le cas « sous-déterminé » où le nombre de capteurs est inférieur au nombre de sources. Une condition suffisante d'identifiabilité est donnée ainsi qu'une borne supérieure pour le nombre minimum de capteurs nécessaire à l'identifiabilité du mélange.

Abstract – In this paper we analyze the identifiability of the trilinear model of a polarized source mixture recorded on a vector sensor array, in the case where the number of sensors is smaller than the number of sources. A sufficient condition for identifiability is given as well as an upper bound on the minimum number of sensors needed for mixture identifiability.

1 Introduction

Le problème de la séparation « aveugle » de sources dans un mélange bilinéaire est un problème mal posé. Habituellement, des contraintes supplémentaires telles que l'indépendance, la parcimonie [1] ou la positivité [2] des sources sont utilisées afin de régulariser le problème de séparation. Une autre manière de rendre le problème bien posé est d'utiliser une diversité supplémentaire, ce qui conduit naturellement à l'analyse multidimensionnelle des signaux et à l'algèbre multilinéaire. Dans ce contexte, le modèle PARAFAC a été employé pour la première fois en télécommunications par Sidiropoulos [3] dans le cas des systèmes DS-CDMA, suivi par d'autres auteurs [4, 5] qui ont proposé différents schémas de diversités (diversité d'antenne, temporelle, fréquentielle, etc.). Nous avons proposé dans [6] l'utilisation de la polarisation comme troisième diversité. L'avantage principal, par rapport aux autres types de diversités, est lié au fait que la polarisation est un paramètre intrinsèque au champ électromagnétique ; elle n'est pourtant que peu exploitée actuellement. Nous avons également obtenu des conditions suffisantes pour assurer l'identifiabilité du mélange polarisé dans le cas où le nombre des capteurs est supérieur ou égal au nombre des sources.

Dans cette communication, nous établissons des conditions suffisantes pour garantir l'identifiabilité du mélange dans le cas où le nombre des sources dépasse le nombre des capteurs vectoriels. Nous déterminons également une borne supérieure sur le nombre minimum de capteurs né-

cessaires pour assurer cette identifiabilité.

2 Modèle de mélange de sources polarisées

Considérons K sources électromagnétiques polarisées de localisations spatiales distinctes qui arrivent sur une antenne linéaire et uniforme de M capteurs vectoriels (capables d'enregistrer les six composantes du champ électromagnétique), espacés de Δx sur l'axe x de l'espace physique. On suppose que les sources sont à bande étroite et que leur propagation se fait dans un milieu isotrope et homogène. La direction d'arrivée (DDA) de la k ième source est donnée par deux paramètres, l'azimut $\phi_k \in [0, \pi)$ et l'élévation $\psi_k \in [-\pi/2, \pi/2]$ (mesurée à partir du plan horizontal).

Chaque capteur vectoriel enregistre les trois composantes du champ électrique $\mathbf{e}_k \triangleq [e_x^{(k)}, e_y^{(k)}, e_z^{(k)}]^T$ et les trois du champ magnétique $\mathbf{h}_k \triangleq [h_x^{(k)}, h_y^{(k)}, h_z^{(k)}]^T$, qui peuvent être rassemblées [8] dans un vecteur \mathbf{b}_k de dimension (6 × 1) :

$$\mathbf{b}_k \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{e}_k \\ \mathbf{h}_k \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\sin \phi_k & -\cos \phi_k \sin \psi_k \\ \cos \phi_k & -\sin \phi_k \sin \psi_k \\ 0 & \cos \psi_k \\ -\cos \phi_k \sin \psi_k & \sin \phi_k \\ -\sin \phi_k \sin \psi_k & -\cos \phi_k \\ \cos \psi_k & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}(\phi_k, \psi_k)} \times$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \cos \alpha_k & \sin \alpha_k \\ -\sin \alpha_k & \cos \alpha_k \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}(\alpha_k, \beta_k)} \begin{bmatrix} \cos \beta_k \\ j \sin \beta_k \end{bmatrix} \quad (1)$$

où la polarisation de la k ème source est représentée par son orientation $\alpha_k \in]-\pi/2, \pi/2]$ et son ellipticité $\beta_k \in]-\pi/4, \pi/4]$.

Sous l'hypothèse de champ lointain, la réponse spatiale de l'antenne pour la k ème source est donnée par le vecteur directionnel : $\mathbf{a}_k \triangleq \mathbf{a}(\phi_k, \psi_k) = [1, a_k, \dots, a_k^{M-1}]^T$ de dimension $(M \times 1)$, avec $a_k = \exp(jk_0 \Delta x \cos \phi_k \cos \psi_k)$ la phase inter-capteurs et k_0 le nombre d'onde. En notant $\mathbf{s}_k \triangleq [s_k(t_1), \dots, s_k(t_L)]^T$ le k ème vecteur signal temporel, de dimension $(L \times 1)$, nous pouvons définir trois matrices : $\mathbf{A} \triangleq [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_K]$, $\mathbf{B} \triangleq [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_K]$ et $\mathbf{S} \triangleq [\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_K]$, ce qui permet d'écrire les signaux enregistrés sur la p ème des six composantes de l'antenne selon :

$$\mathbf{Y}_p = \mathbf{A} \mathbf{D}_p(\mathbf{B}) \mathbf{S}^T + \mathbf{N}_p, \quad p = 1, \dots, 6, \quad (2)$$

avec \mathbf{N}_p la matrice du bruit sur la p ème composante et $\mathbf{D}_p(\mathbf{B}) = \text{diag}(b_{p1}, \dots, b_{pK})$ une matrice diagonale, contenant la p ème ligne de \mathbf{B} sur sa diagonale principale. L'équation (2) exprime clairement une structure trilineaire de type PARAFAC du modèle de mélange.

3 Identifiabilité du mélange de sources polarisées pour $M < K$

Pour l'étude de l'identifiabilité, on suppose que le mélange est non bruité. Par définition, le modèle trilineaire de l'équation (2) est *identifiable* s'il est possible de retrouver de manière unique (à une permutation et un facteur d'échelle près) les trois matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{S} . Nous avons montré, dans [6] que pour identifier les sources dans le cas $M \geq K$, il suffit que les sources aient des *DDAs distinctes* et que leurs *signatures temporelles* \mathbf{s}_k soient *linéairement indépendantes*. Pour traiter le cas $M < K$, nous montrons tout d'abord le théorème suivant :

Théorème 1 *Le mélange trilineaire dans (2) est identifiable si la matrice \mathbf{S} est de rang colonne plein et les deux autres matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} satisfont : $k_{\mathbf{A}} > 1, k_{\mathbf{B}} > 1$ et $\text{rang}(\mathbf{A}) + k_{\mathbf{B}} > K + 1$ (où $k_{\mathbf{A}}$ et $k_{\mathbf{B}}$ sont les rangs de Kruskal¹ des matrices \mathbf{A} et \mathbf{B})².*

Démonstration La démonstration repose sur un théorème démontré par Jiang et Sidiropoulos dans [7] qui donne une condition *nécessaire et suffisante* d'unicité.

Théorème 2 (Jiang et Sidiropoulos [7]) *Pour le modèle CP exprimé par (2), si \mathbf{S} est de rang colonne plein,*

1. Le rang de Kruskal (ou le k -rang) de \mathbf{A} est égal à r ($k_{\mathbf{A}} = r$), si tout ensemble de r colonnes de \mathbf{A} est linéairement indépendant mais cela n'est plus vrai pour $r + 1$ colonnes.

2. Le rôle de ces matrices pouvant être interchangé, la condition $\text{rang}(\mathbf{B}) + k_{\mathbf{A}} > K + 1$ fournit également une condition suffisante pour l'identifiabilité.

la condition nécessaire et suffisante pour la décomposition unique de \mathbf{Y}_p est qu'aucune des combinaisons linéaires non-triviales³ des colonnes du produit de Khatri-Rao⁴ $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$ ne peut s'exprimer sous la forme d'un produit tensoriel de deux vecteurs.

Pour démontrer le Théorème 1 nous employons le raisonnement par l'absurde. Supposons donc que la décomposition n'est pas unique. Cela implique (Théorème 2) que l'on peut trouver deux vecteurs $\bar{\mathbf{a}}$ et $\bar{\mathbf{b}}$ tels que leur produit vectoriel soit égal à la combinaison linéaire des colonnes de $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$, pondérée par les coefficients c_1, \dots, c_K .

Soit n le nombre d'éléments non-nuls parmi les $\{c_k\}_{k=1}^K$ ($n \geq 2$). Supposons, sans perte de généralité, que c_1, \dots, c_n sont les n coefficients non-nuls. Notons $\tilde{\mathbf{A}}$ la matrice $(M \times n)$ et $\tilde{\mathbf{B}}$ la matrice $(6 \times n)$ contenant respectivement les n colonnes de \mathbf{A} et \mathbf{B} correspondant aux n coefficients non-nuls. Soit $\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_n]^T$, le vecteur des coefficients.

Etant donné le Théorème 2, notre hypothèse de départ se traduit par :

$$(\tilde{\mathbf{A}} \odot \tilde{\mathbf{B}})\mathbf{c} = \bar{\mathbf{a}} \odot \bar{\mathbf{b}} \triangleq \bar{\mathbf{d}} \quad (3)$$

avec $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ et $\bar{\mathbf{d}}$, des vecteurs de tailles respectives M , P et MP . Soit la matrice $\tilde{\mathbf{B}} \triangleq [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n]$. Selon la définition du k -rang, on a :

$$\min(n, k_{\mathbf{B}}) \leq k_{\tilde{\mathbf{B}}} \leq \text{rang}(\tilde{\mathbf{B}}). \quad (4)$$

Dans la suite, nous analysons l'équation (3) dans les deux cas $\bar{\mathbf{d}} = \mathbf{0}$ et $\bar{\mathbf{d}} \neq \mathbf{0}$.

Cas 1. Si $\bar{\mathbf{d}} = \mathbf{0}$, alors les vecteurs ligne de la matrice $\tilde{\mathbf{A}} \text{diag}(\mathbf{c})$, avec $\text{diag}(\mathbf{c})$, une matrice diagonale contenant les éléments du vecteur \mathbf{c} sur sa diagonale principale, appartiennent au sous-espace $\ker(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$. Le noyau ne contient que le vecteur nul *seulement si* tous les vecteurs ligne de $\tilde{\mathbf{A}} \text{diag}(\mathbf{c})$ sont nuls. Cependant, aucune colonne de \mathbf{A} ne peut être nulle car $k_{\mathbf{A}} > 1$. Puisque les coefficients c_1, \dots, c_n sont tous différents de zéro, il existe au moins un vecteur non-nul dans $\ker(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$, ce qui signifie que $n > k_{\mathbf{B}}$.

L'équation (4) devient alors :

$$k_{\mathbf{B}} \leq k_{\tilde{\mathbf{B}}} \leq \text{rang}(\tilde{\mathbf{B}}). \quad (5)$$

En utilisant la relation algébrique :

$$\text{rang}(\tilde{\mathbf{B}}) + \dim(\ker(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)) = n \quad (6)$$

et l'équation (5), on obtient :

$$\dim(\ker(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)) \leq n - k_{\mathbf{B}}. \quad (7)$$

Puisque les colonnes de $\tilde{\mathbf{A}} \text{diag}(\mathbf{c})$ appartiennent à $\ker(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$, nous obtenons :

$$\text{rang}(\tilde{\mathbf{A}} \text{diag}(\mathbf{c})) = \text{rang}(\text{diag}(\mathbf{c}) \tilde{\mathbf{A}}^T) \leq \dim(\ker(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)) \quad (8)$$

3. Combinaison non-triviale : impliquant au moins deux colonnes.

4. Le produit de Khatri-Rao et le produit de Kronecker par colonnes.

En utilisant l'équation (7) et le fait que la matrice carrée $\text{diag}(\mathbf{c})$ est de rang plein, (8) peut être simplifiée :

$$\text{rank}(\tilde{\mathbf{A}}) \leq \dim(\ker(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)) \leq n - k_{\mathbf{B}}. \quad (9)$$

Puisque la matrice \mathbf{A} contient toutes les colonnes de $\tilde{\mathbf{A}}$ ainsi que les $(K - n)$ autres colonnes, son rang ne peut pas dépasser $\text{rank}(\tilde{\mathbf{A}}) + K - n$:

$$\text{rank}(\mathbf{A}) \leq \text{rank}(\tilde{\mathbf{A}}) + K - n \leq (n - k_{\mathbf{B}}) + K - n = K - k_{\mathbf{B}}. \quad (10)$$

On obtient ainsi :

$$\text{rank}(\mathbf{A}) + k_{\mathbf{B}} \leq K < K + 1, \quad (11)$$

ce qui contredit l'hypothèse du Théorème 1 .

Cas 2. Analysons maintenant le cas $\bar{\mathbf{d}} \neq \mathbf{0}$. Notons \mathbf{q}_m^T la m ème ligne de la matrice $\tilde{\mathbf{A}} \text{diag}(\mathbf{c})$. L'équation (3) peut s'exprimer alors comme :

$$\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{q}_m = \bar{a}_m \bar{\mathbf{b}} \quad \text{with} \quad m = 1, \dots, M, \quad (12)$$

Le vecteur \mathbf{q}_m peut alors s'écrire comme $\mathbf{n}_m + \mathbf{x}$ avec $\mathbf{n}_m \in \ker(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$, *i.e.* $\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{n}_m = \mathbf{0}$ où \mathbf{x} est une solution de l'équation $\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{x} = \bar{a}_m \bar{\mathbf{b}}$, qui ne dépend pas de m . Comme \mathbf{x} est indépendant de \mathbf{n}_m , on obtient $\text{rank}[\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_M] = \text{rank}[\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_M] + 1$, impliquant :

$$\text{rank}(\tilde{\mathbf{A}}) \leq \dim(\ker(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)) + 1 \leq n - k_{\mathbf{B}} + 1 \quad (13)$$

De manière analogue à (10), nous obtenons :

$$\text{rank}(\mathbf{A}) \leq K - n + \text{rank}(\tilde{\mathbf{A}}) \leq K - k_{\mathbf{B}} + 1. \quad (14)$$

En conclusion,

$$\text{rank}(\mathbf{A}) + k_{\mathbf{B}} \leq K - k_{\mathbf{B}} + 1 + k_{\mathbf{B}} = K + 1, \quad (15)$$

ce qui contredit l'hypothèse et complète ainsi la démonstration du Théorème 1. \square

Un autre résultat important est fourni par Tan *et al.* dans [9] sous la forme du lemme suivant :

Lemme 1 *Les réponses d'un capteur vectoriel à trois sources ayant des DDA différentes sont linéairement indépendantes ; à quatre sources ayant des DDA distinctes sont linéairement dépendantes seulement si les ellipticités des quatre sources sont identiques ; les réponses à six sources quelconques sont linéairement dépendantes.*

En s'appuyant sur le théorème 1 et le lemme 1, nous énonçons, comme corollaire du théorème 1, des conditions suffisantes pour l'identifiabilité du mélange dans le cas $M < K$:

Corollaire 1 *Sur une antenne vectorielle, si $K \geq 4$ sources polarisées ont des DDA différentes et leurs signatures temporelles \mathbf{s}_k sont linéairement indépendantes, alors la condition $M \geq K - 2$ est suffisante pour assurer l'identifiabilité du mélange, à condition que l'ensemble des valeurs d'ellipticité des sources contienne au minimum quatre valeurs différentes.*

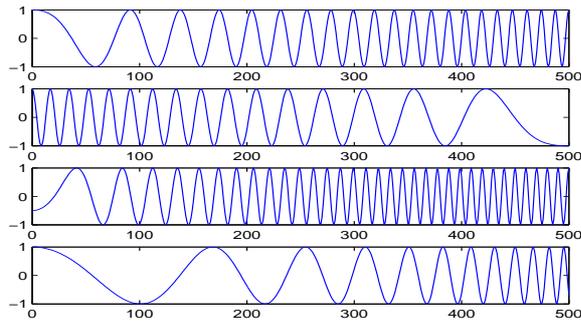
Démonstration La structure de Vandermonde de la matrice \mathbf{A} implique $\text{rang}(\mathbf{A}) = k_{\mathbf{A}} = \min(M, K)$. Conformément au Lemme 1, nous avons $k_{\mathbf{B}} \geq 3$ et $\text{rang}(\mathbf{B}) \leq 5$. Considérons d'abord le cas $k_{\mathbf{B}} = 3$. Si plus de trois valeurs différentes des ellipticités correspondent aux $K \geq 4$ sources, le Lemme 1 nous assure que la matrice \mathbf{B} contient au moins quatre colonnes linéairement indépendantes, par conséquent $\text{rang}(\mathbf{B}) \geq 4$. Puisque $M \geq K - 2$, nous obtenons $k_{\mathbf{A}} + \text{rang}(\mathbf{B}) \geq K - 2 + 4 > K + 1$ qui selon le Théorème 1 est une condition suffisante d'identifiabilité. Si $k_{\mathbf{B}} \geq 4$, alors $k_{\mathbf{A}} + \text{rang}(\mathbf{B}) \geq K - 2 + 4 = K + 2$, ce qui satisfait le Théorème 1 complétant ainsi la démonstration du corollaire. \square

Notons que si seulement trois ellipticités sont distinctes, alors $\text{rang}(\mathbf{B}) = 3$ et l'identifiabilité est garantie si $M \geq K - 1$. Cette relation fournit également la borne supérieure du nombre minimum de capteurs *nécessaires* pour assurer l'identifiabilité du modèle de mélange trilineaire.

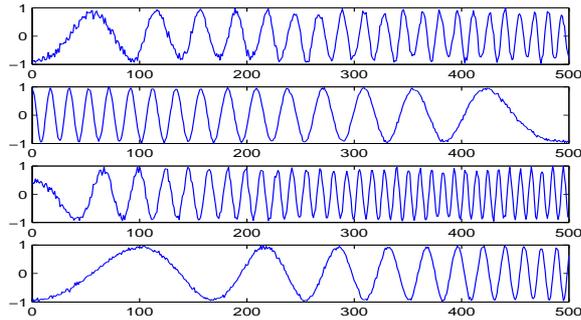
4 Exemple

Afin d'illustrer les résultats de la section 3, nous avons simulé $K = 4$ sources polarisées, arrivant sur une antenne de seulement $M = 2$ capteurs vectoriels, avec un RSB = 20dB. Les séquences temporelles originales des sources sont données par quatre « chirps » de $L = 500$ échantillons comme le montre la figure 1(a). En appliquant l'algorithme de décomposition tensorielle et en éliminant l'indétermination sur l'ordre des sources, on obtient l'estimation des quatre signaux source donnée par la figure 1(b). Les signaux récupérés correspondent bien aux sources originales au signe près, puisque la normalisation des sources ne permet pas de lever cette indétermination.

Sur la figure 2 nous avons représenté l'erreur quadratique moyenne (EQM) de l'estimation des sources en fonction du nombre de capteurs, pour $K = 4, 8$ et 16 sources. Pour $K = 16$, les angles d'élévation ont été tous fixés à zéro et les azimuts prennent les valeurs respectives $10^\circ, 20^\circ, \dots, 160^\circ$. Des choix similaires ont été faits pour les deux autres cas. Pour la figure 2(a) les orientations et les ellipticités des sources ont été choisis aléatoirement, la condition d'identifiabilité étant dans ce cas $M \geq K - 2$ (Corollaire 1). Pour 2(b) les angles d'orientation des sources ont été fixés à 45° , et les ellipticités à 15° , sauf pour une source pour laquelle nous avons choisi $\alpha = -45^\circ$ et $\beta = -15^\circ$. Ces choix correspondent au cas défavorable étudié dans [9] pour lequel la condition suffisante d'identifiabilité est $M \geq K - 1$. Les valeurs de M , ne permettant pas l'identifiabilité, ont donné lieu à des EQM très fortes, qui n'ont pas été représentées sur la figure. On observe que les performances se dégradent très rapidement lorsque le nombre de capteurs vectoriels descend en dessous de la valeur suffisante pour assurer l'unicité de la décomposition, ce qui conforte les résultats théoriques. En outre, en comparant les performances obtenues dans les deux cas, il apparaît



(a) Sources originales



(b) Sources estimées

FIGURE 1 – Séparation de quatre sources sur une antenne de deux capteurs vectoriels, avec un SNR de 20dB.

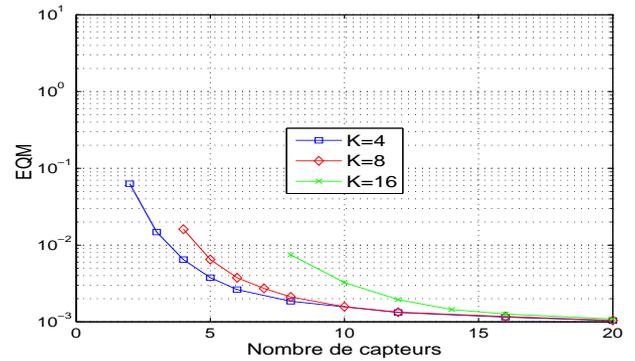
que la polarisation influe de façon significative sur la qualité des résultats.

5 Conclusions

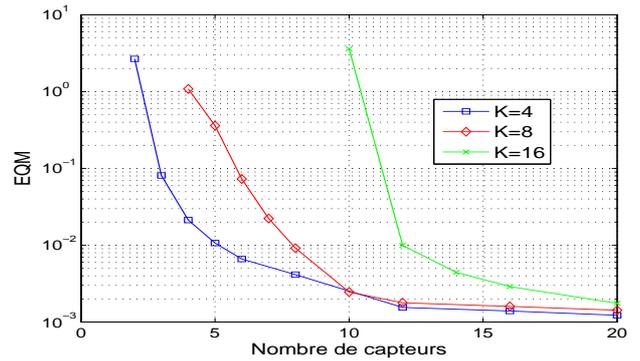
Dans cette communication nous analysons les conditions d'identifiabilité du mélange de sources polarisées, enregistré sur une antenne vectorielle. Une condition suffisante d'identifiabilité dans le cas où le nombre de capteurs est inférieur au nombre de sources est donnée, ainsi qu'une borne supérieure pour le nombre minimum de capteurs nécessaire à l'identifiabilité. Les résultats théoriques obtenus sont validés par des simulations numériques.

Références

- [1] P. Comon et C. Jutten, *Séparation de source (vol. 1 et 2)*, Traité IC2, Hermes Lavoisier, Paris, 2007.
- [2] S. Moussaoui, D. Brie, A. Mohammad-Djafari, and C. Carteret, "Separation of non-negative mixtures of non-negative sources using a Bayesian approach and MCMC sampling," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 54, no. 11, pp. 4133–4145, Nov. 2006.
- [3] N.D. Sidiropoulos, G.B. Giannakis, and R. Bro, "Blind PARAFAC receivers for DS-CDMA systems," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 48, no. 3, pp. 810–823, Mar. 2000.



(a) Ellipticités différentes



(b) Ellipticités égales (cas critique)

FIGURE 2 – Erreur sur l'estimation des sources en fonction du nombre des capteurs, avec un SNR de 20 dB

- [4] Y. Rong, S.A. Vorobyov, A.B. Gershman, and N.D. Sidiropoulos, "Blind spatial signature estimation via time-varying user power loading and parallel factor analysis," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 53, no. 5, pp. 1697–1710, May 2005.
- [5] T. Acar, Y. Yu, and A.P. Petropulu, "Blind MIMO system estimation based on PARAFAC decomposition of higher order output tensors," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 54, no. 11, pp. 4156–4168, Nov. 2006.
- [6] X. Guo, S. Miron, and D. Brie, "Identifiability of the parafac model for polarized source mixture on a vector sensor array," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)*, Las Vegas, USA, Mar. 2008.
- [7] T. Jiang and N.D. Sidiropoulos, "Kruskal's permutation lemma and the identification of CANDECOMP/PARAFAC and bilinear models with constant modulus constraints," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 52, no. 9, pp. 2625–2636, Sept. 2004.
- [8] A. Nehorai and E. Paldi, "Vector-sensor array processing for electromagnetic source localization," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 42, no. 2, pp. 376–397, Feb. 1994.
- [9] K.-C. Tan, K.-C. Ho, and A. Nehorai, "Linear independence of steering vectors of an electromagnetic vector sensor," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 44, no. 12, pp. 3099–3107, Dec. 1996.