

# Séparation de Sources en Convolutif Basée sur la Diagonalisation Simultanée de Tenseurs

Saloua RHIQUI et Eric MOREAU

LSEET, UMR CNRS 6017, Université du Sud Toulon Var  
 avenue G. Pompidou, BP56, 83162 La Valette du Var Cedex  
 rhioui@univ-tln.fr, moreau@univ-tln.fr

**Résumé** – On considère le problème de séparation du mélanges convolutifs par l’intermédiaire de l’optimisation de fonctions de contraste. La construction de fonctions de contraste proposée est basée sur l’introduction d’un système de référence et généralise un certain nombre de contraste existant. Elle concerne à la fois les ordres des cumulants et les types de signaux (i.i.d. ou non i.i.d.). L’atout principale de la fonction de contraste proposée est son équivalence avec un critère de diagonalisation conjointe de tenseurs sous contrainte d’un mélange para-unitaire.

**Abstract** – We consider the blind source separation problem for convolutive mixture through the optimization of contrast function. We define a new contrast function using so-called reference signals. This generalizes a few existing results about the cumulants order and the source signals. An important point is that the proposed contrast is shown to be equivalent to a quadratic criterion of joint diagonalization of tensors using para-unitary mixture.

## 1 Introduction

Nous considérons le problème de la séparation de sources dans un cadre de mélange convolutif de signaux aléatoires statistiquement indépendants. Les fonctions de contraste associées à un modèle de séparation de sources offrent un cadre théorique intéressant car non seulement elles permettent de fixer les conditions d’identifiabilité mais encore constituent des critères de séparation dont l’optimisation résoudra le problème. Disposant d’une fonction de contraste, il s’agira alors d’utiliser ou de construire un algorithme d’optimisation adapté.

Très souvent les fonctions de contraste, comme dans cette communication, dépendent des cumulants d’ordre supérieur à deux des signaux considérés. Les cumulants d’ordre deux sont au préalable utilisés pour réaliser l’opération classique de blanchiment des observations qui permettra entre autre de contraindre le système de séparation à une classe particulière. Dans le cadre des mélanges instantanés, relativement récemment, une généralisation [5] a permis d’inclure les contrastes à la base des algorithmes ICA [8], JADE [6] et STOTD [7] dans une même famille. Cela a encore permis de généraliser le lien existant entre ce type de contrastes et des critères quadratiques de diagonalisation conjointe [5] de matrices ou de tenseurs. Par ailleurs, encore plus récemment, la notion de fonctions de contraste à base de signaux de référence est apparue [9][10][11][12]. Un des avantages de ce type de contraste est de permettre une procédure d’optimisation *a priori* simplifiée [10]. Dans [9] l’étude concerne des mélanges instantanés et un lien avec un critère de diagonalisation conjointe est présenté. Dans [12][10], il s’agit de contrastes pour des mélanges convolutifs permettant l’extraction des signaux sources un par un par une procédure de déflation.

Dans cette communication, notre objectif principal est de poursuivre la généralisation des fonctions de contraste à base de signaux de référence dans un cadre de mélange convolutif. En particulier, nous généralisons des résultats présentés dans [5][11] et soulignons un lien intéressant avec un critère de diagonalisation conjointe. Enfin, nous présentons quelques résultats de simulations informatiques.

## 2 Formulation du problème

On considère le modèle de mélange convolutif suivant

$$\mathbf{x}(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{M}(n-k)\mathbf{s}(k). \quad (1)$$

où  $\mathbf{s}(n)$  est le vecteur des signaux sources de taille  $N \times 1$  dont les composantes sont supposées inobservables et mutuellement statistiquement indépendantes,  $\mathbf{x}(n)$  le vecteur de taille  $Q \times 1$ ,  $Q \geq N$  des observations et  $\mathbf{M}(n)$  la réponse impulsionnelle multi-dimensionnelle  $Q \times N$  du système linéaire et invariant dans le temps mélangeant.

Les signaux sources seront supposés dans toute la suite de cumulants d’ordre considéré non nul. Le système mélangeant, quant à lui, est classiquement supposé stable et inversible (à gauche).

Le but de la séparation est d’identifier “l’inverse” du filtre de mélange  $\mathbf{M}(n)$ . Cela se fait grâce à l’estimation d’un filtre  $\mathbf{H}(n)$  de taille  $N \times Q$  de séparation agissant sur les observations  $\mathbf{x}(n)$ . On définit alors le système global par

$$\mathbf{G}(z) = \{\mathbf{H} * \mathbf{M}\}(n)$$

où  $\{\cdot * \cdot\}$  est le produit de convolution à temps discret. On dit avoir résolu le problème de la séparation de source lorsqu’on a déterminé un système  $\mathbf{H}(n)$  de telle sorte que la fonction de transfert  $\mathbf{G}(z)$  du filtre global (transformée

en  $z$  de la réponse impulsionnelle  $\mathbf{G}(n)$  se factorise sous la forme :

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{P}\text{Diag}(d_1(z), \dots, d_N(z)). \quad (2)$$

où  $\mathbf{P}$  est une matrice de permutation,  $d_i(z)$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$  sont des filtres scalaires et  $\text{Diag}(\cdot)$  la matrice diagonale construite à partir de ses arguments. Ainsi, après séparation, on obtient en sortie

$$\mathbf{y}(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{H}(n-k) \mathbf{x}(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{G}(k) \mathbf{s}(n-k)$$

des filtrées des signaux sources dans un ordre en général différent.

Dans ce but, une pré-étape classique consiste à réaliser un blanchiment des observations. Après ce blanchiment, on montre que l'on peut rechercher une solution sous la condition que le filtre global soit para-unitaire, *i.e.*

$$\mathbf{G}^H(1/z^*) \mathbf{G}(z) = \mathbf{I}_N.$$

Nous considérons dans toute la suite qu'un tel blanchiment a été réalisé. On ne considérera donc que des systèmes para-unitaires.

### 3 Fonction de contraste

Plusieurs méthodes existent pour résoudre le problème de la séparation de sources, nous nous basons dans ce papier sur l'optimisation de fonctions de contraste. Par définition, elles constituent des critères de séparation dans le sens où leur maximisation (globale) résout le problème.

Dans ce papier, nous proposons une famille de contraste basée sur l'introduction d'un signal de référence noté  $\mathbf{z}(n)$  obtenue par filtrage des observations par un filtre  $\mathbf{H}_r(n)$  appelé filtre de référence.

Nous considérons des cumulants croisés d'ordre  $R$  où  $(R-c)$  variables sont fixées, définis de la façon suivante

$$\mathcal{C}_{R,c,\mathbf{z}_j} \{y_i(n)\} = \text{Cum} \underbrace{\{y_i(n), \dots, y_i(n)\}}_{c \text{ fois}}, \underbrace{\{z_{j_1}(n), \dots, z_{j_{R-c}}(n)\}}_{R-c \text{ fois}}, \quad (3)$$

avec  $R \geq 3$  et  $c \geq 2$ , tels que  $\forall f \in \{1, \dots, R-c\}$  et  $\forall j_f \in \{1, \dots, N\}$ ,  $z_{j_f}(n)$  sont des signaux donnés.

On introduit les deux grandeurs suivantes

$$\mathcal{C}_{R,c,\mathbf{j},l}^{\text{sup}} = \sup_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^2} |\mathcal{C}_{R,c,\mathbf{z}_j} \{s_l(n-k_1), s_l(n-k_2)\}|$$

$$\tilde{\mathcal{C}}_{R,c,\mathbf{j},l}^{\text{sup}} = \sup_{\|\{\tilde{G}_{il}\}\|_l=1} |\mathcal{C}_{R,c,\mathbf{z}_j} \{\{\tilde{G}_{il}\} s_l(n)\}|.$$

Elles sont supposées vérifier

#### Hypothèse 1

$\forall l \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\mathbf{j} \in \mathbf{J}$ , il existe  $k_{j_l}^1$ ,  $k_{j_l}^2$  et  $H_{il}$  tels que :

$$\mathcal{C}_{R,c,\mathbf{j},l}^{\text{sup}} = |\mathcal{C}_{R,c,\mathbf{z}_j} \{s_l(n-k_{j_l}^1), s_l(n-k_{j_l}^2)\}| < +\infty \quad (4)$$

$$\tilde{\mathcal{C}}_{R,c,\mathbf{j},l}^{\text{sup}} = |\mathcal{C}_{R,c,\mathbf{z}_j} \{\{H_{il}\} s_l(n)\}| < +\infty. \quad (5)$$

Nous proposons alors la résultat suivant.

**Proposition 1** Dans un cadre de système de mélange para-unitaire, le fonction

$$\mathcal{I}_{R,c,\mathbf{z}} \{\mathbf{y}(n)\} = \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{J}} \sum_{i=1}^N |\mathcal{C}_{R,c,\mathbf{z}_j} \{y_i(n)\}|^2, \quad (6)$$

où  $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_{R-c}) \in \mathbf{J}$  et  $\mathbf{J} = \{1, \dots, N\}^{R-c}$ , est une fonction de contraste quelque soit le signal de référence  $\mathbf{z}(n)$ .

La preuve est reportée dans une communication future.

Dans une certaine mesure le contraste précédent peut apparaître comme plus "compliqué" que les contrastes existants. Cependant, comme nous allons maintenant le montrer, son principal atout est qu'il possède une équivalence avec un critère de diagonalisation conjointe de tenseurs. A cette fin, nous considérons maintenant que des filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF). Le filtre de mélange  $\mathbf{M}(n)$  ainsi que le filtre séparateur  $\mathbf{H}(n)$  seront de longueurs respectives  $L$  et  $D$ .

Pour tout  $j \in \{1, \dots, c\}$ , nous définissons  $\tilde{\mathbf{H}}_{il_j}$  de la façon suivante

$$\tilde{\mathbf{H}}_{il_j} = (H_{il_j}(0) \quad H_{il_j}(1) \quad \dots \quad H_{il_j}(D-1)),$$

les éléments de la matrice la matrice  $\tilde{\mathbf{H}}$  de taille  $N \times ND$  et nous définissons  $\tilde{\mathbf{x}}_{l_j}$  par

$$\tilde{\mathbf{x}}_{l_j}(n) = (x_{l_j}(n) \quad x_{l_j}(n-1) \quad \dots \quad x_{l_j}(n-D+1))^T.$$

Ainsi, la sortie du filtre global s'exprime alors par un simple produit :

$$\mathbf{y}(n) = \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{x}}(n).$$

Nous proposons le résultat suivant.

**Proposition 2** Soit  $\mathcal{T}_K$  un ensemble de  $K = \text{card}\{\mathbf{J}\}$  tenseurs d'ordre  $c$  défini pour tout  $\mathbf{j} \in \mathbf{J}$  par

$$\mathcal{T}_{l_1 \dots l_c}^{\mathbf{j}} = \mathcal{C}_{R,c,\mathbf{z}_j} \{\tilde{x}_{l_1}(n), \dots, \tilde{x}_{l_c}(n)\}$$

avec  $R \geq 3$  et  $c \geq 2$  alors si  $\mathbf{H}(n)$  est un filtre para-unitaire, nous avons l'équivalence :

$$\mathcal{I}_{R,c,\mathbf{z}} \{\mathbf{y}(n)\} = \sum_{k=1}^K \left( \sum_{i=1}^N |(\mathcal{T}_k)_{i, \dots, i}^H|^2 \right).$$

où

$$(\mathcal{T}_k)_{i, \dots, i}^H = \sum_{j_1, \dots, j_c} H_{ij_1}(n) \dots H_{ij_c}(n) (\mathcal{T}_k)_{j_1, \dots, j_c}.$$

Ainsi le contraste proposé est équivalent à la diagonalisation conjointe d'un ensemble de  $K$  tenseurs. Pour  $c$  quelconque les tenseurs à diagonaliser sont "carrés" de dimension  $ND$ . Dans le cas où  $c = 2$  l'algorithme JADE [6] peut être utilisé et dans le cas  $c = 3$  l'algorithme STODT [15] peut être utilisé. On obtient une matrice séparatrice notée  $\mathbf{V}$  de taille  $ND \times ND$  qui correspond à l'estimé de  $\tilde{\mathbf{H}}$ , "pseudo-inverse" de la matrice  $\tilde{\mathbf{M}}$ , où  $\tilde{\mathbf{M}}$  est de taille  $ND \times N(L+D-1)$  et est définie de manière identique à  $\tilde{\mathbf{H}}$ .

## 4 Simulations informatiques

Dans le cadre des travaux présentés, le bruit n'est pas pris en compte au cours de l'étude des méthodes proposées et il apparaît simplement comme une perturbation. Les coefficients du système de référence ont été choisis de manière aléatoire selon une distribution normale et le système de mélange a été choisi para-unitaire. Dans toutes les expériences, nous avons considéré trois signaux sources  $N = 3$ , qui ont été mélangés à l'aide d'un filtre RIF para-unitaire de taille  $(N, Q)$  de longueur  $L = 3$ . Par conséquent, le nombre de signaux observés est  $Q = 3$ . Les résultats du critère proposé sont obtenus à l'aide d'un algorithme de diagonalisation conjointe (JADE, pour  $c = 2$ ).

Le signal de référence  $z_{j_f}(n)$ ,  $f \in \{1, \dots, R - c\}$  est la  $j_f$  ème composante du signal de sortie d'un filtre RIF  $\mathbf{H}_r^{(f)}$  de taille  $(N, N)$  et de longueur  $L = 3$  appliqué aux signaux d'observations. Les coefficients de ce filtre RIF ont été également choisis de manière aléatoire en utilisant une distribution normale. Ici tous les signaux de référence  $z_{j_f}(n)$  ont été choisis égaux :  $\forall f, z_{j_f}(n) = z_j(n)$ . Pour toutes les expériences, nous considérons  $R = 4$  et  $c = 2$ . Le contraste proposé s'écrit alors

$$\mathcal{I}_{4,2,\mathbf{z}}\{\mathbf{y}(n)\} = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N |\text{Cum}\{y_i(n), y_i(n), z_j(n), z_j(n)\}|^2.$$

Le critère de performance est évalué en utilisant 100 réalisations de Monte-Carlo. Pour des signaux sources de type i.i.d. nous avons choisi l'erreur quadratique moyenne (EQM) sur chaque signaux sources. Pour des signaux sources non i.i.d, on utilise un critère de séparation insensible aux ambiguïtés par filtrage SISO défini dans [12]. Ainsi, pour la  $i$  ème source extraite, défini à partir de la  $i$  ème ligne du filtre global, notée  $\mathbf{G}_i(z) = (G_{i1}(z), \dots, G_{iN}(z))$  pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$  on pose

$$\tau_i = 1 - \frac{\max_{j>i} \|G_{ij}\|_j^2}{\sum_j \|G_{ij}\|_j^2}. \quad (7)$$

La séparation de la  $i$  ème source est réussie lorsque la  $i$  ème ligne du filtre global ne contient qu'une seule composante non nulle. Ci-après, nous décrivons les deux modèles de signaux sources utilisés dans nos simulations.

**ARCH(P)** Modèle Auto-Régressive à Hétéroscédasticité Conditionnelle d'ordre P. Ceux sont des modèles multiplicatifs générés comme suit : chaque source  $s_i(n)$  s'écrit comme un produit

$$s_i(n) = a_i(n)\xi_i(n),$$

où  $\xi_i(n)$  est un processus i.i.d. gaussien normalisé. Le signal  $a_i(n)$  est un signal de type MA. Il s'agit alors de sources de type volatilité stochastique. Lorsque  $a_i(n)$  est positive et satisfait l'équation  $\acute{n}$  auto-régressive  $\acute{z}$  suivante :

$$a_i^2(n) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^P \alpha_k s_i^2(n - k),$$

(avec  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ) ce type de signaux sont souvent utilisés dans les domaines de l'économie et de la finance.

**CPM** Les Pseudo-symboles des signaux modulés par phase continue CPM (Continuous Phase Modulated) sont des signaux de module unité définis par la relation

$$s_i(n+1) = \exp(j\pi h_i a_i(n)) s_i(n),$$

où  $h_i \in [0, 1]$  est l'indice de modulation et  $a_i(n)$  est une séquence i.i.d. de symbole binaire. Ce type de signaux est utilisé dans le système européen de téléphones mobiles de seconde génération (GSM), ainsi que dans de nombreux système de communications.

Nous considérons l'évolution de la fonction de répartition, permet de classer les 100 réalisations par ordre croissant des valeurs médianes empiriques des critères  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  et  $\tau_3$  pour les trois différentes sources non i.i.d (Volatilité Stochastique, ARCH, CPM) sur la figure 1. Nous avons environ 20

Le tableau 1 donne l'EQM des trois sources estimées de type Volatilité Stochastique ainsi que les critères  $\tau_i$  en fonction du nombre d'échantillons  $K$ . Comme on l'observe classiquement les performances sont d'autant meilleures que le nombre d'échantillons est grand.

La figure 2 représente l'évolution de la fonction de répartition, des valeurs empiriques  $\tau_i$  et l'EQM pour des sources Volatilité Stochastique .

TAB. 1 – L'EQM et  $\tau_i$  pour sources non i.i.d. De type volatilité stochastique en fonction du nombre d'échantillons.

$K$	5000	20000	30000	50000
$EQM$	$1.11 \cdot 10^{-2}$	$2.4 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$7.89 \cdot 10^{-4}$
	$7.00 \cdot 10^{-3}$	$1.9 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^{-3}$	$9.1 \cdot 10^{-4}$
	$7.5 \cdot 10^{-3}$	$1.9 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$6.97 \cdot 10^{-4}$
$\tau$	$8.510 \cdot 10^{-2}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$7.5 \cdot 10^{-4}$	$5.6 \cdot 10^{-4}$
	$5 \cdot 10^{-2}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$8.9 \cdot 10^{-4}$	$5.38 \cdot 10^{-4}$
	$4.8 \cdot 10^{-2}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$9.1 \cdot 10^{-4}$	$4.8 \cdot 10^{-4}$

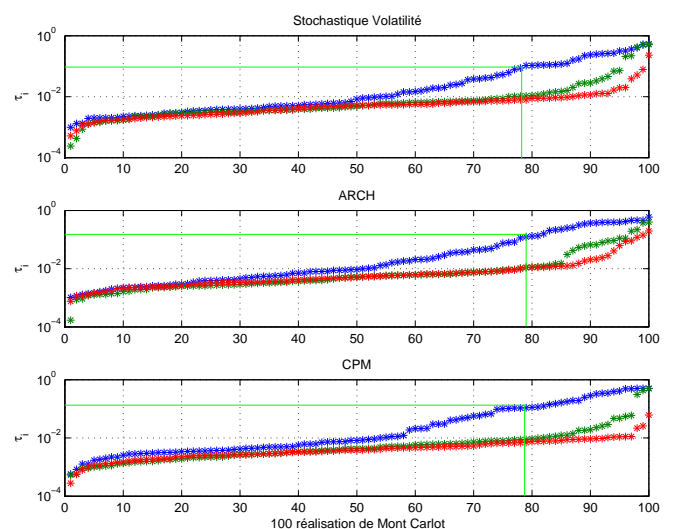


FIG. 1 – L'évolution de la fonction de répartition des  $\tau_i$  pour les signaux non i.i.d. (Volatilité Stochastique, ARCH, CPM).

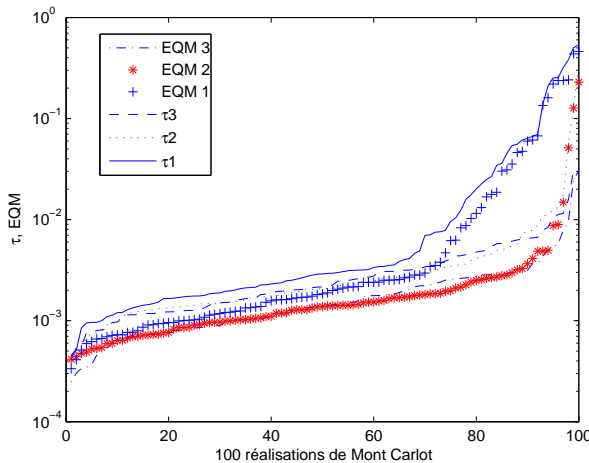


FIG. 2 – L'évolution de la fonction de répartition des  $\tau_i$  et de  $MSE_i$  pour un signal non i.i.d (Volatilité Stochastique).

Dans le tableau 2 nous étudions l'influence des itérations sur les performances. Comme prévu ce critère ne dépend relativement pas du choix des signaux référence donc les performances sont plus stables.

TAB. 2 – Le critère  $\tau_i$  pour les trois sources non i.i.d de type ARCH et CPM en fonction du nombre d'itérations sur 100 réalisations de Monte-Carlo.

$N_i$	1	2	3	4
ARCH	$8.610^{-3}$	$9.6 \cdot 10^{-3}$	$5.8 \cdot 10^{-3}$	$8.910^{-3}$
	$5 \cdot 10^{-3}$	$5.3 \cdot 10^{-3}$	$4.0 \cdot 10^{-3}$	$5.2 \cdot 10^{-3}$
	$5.2 \cdot 10^{-3}$	$5.1 \cdot 10^{-3}$	$4.9 \cdot 10^{-3}$	$5.1 \cdot 10^{-3}$
CPM	$7 \cdot 10^{-3}$	$8.4 \cdot 10^{-3}$	$5.8 \cdot 10^{-3}$	$7.3 \cdot 10^{-3}$
	$4.5 \cdot 10^{-3}$	$4.3 \cdot 10^{-3}$	$4.4 \cdot 10^{-3}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$
	$4.8 \cdot 10^{-3}$	$3.8 \cdot 10^{-3}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$

## Références

- [1] B. Jelonck, D. Boss, and K. D. Kammeyer, "Generalized eigenvector algorithm for blind equalization", *Signal Processing*, pp. 61(3) :237–264, Sept. 1997.
- [2] B. Jelonck, D. Boss and K. D. Kammeyer, "A closed form solution to blind equalization", *Signal Processing*, pp. 36(3) :251-259, Apr. 1994.
- [3] M. Feng and K.-D. Kammeyer, "Blind source separation for communication signals using antenna arrays", in Proc. *ICUPC*, Florence, pp. 665-669, Oct. 1998.
- [4] A. Adib, E. Moreau and D. Aboutajdine, "Referenced contrasts a new approach to the problem of blind source separation", in Proc. *Seventh International Symposium on Signal Processing and its Applications (ISSPA'2003)*, Paris, Jul 2003.
- [5] E. Moreau, "A Generalization of Joint Diagonalization Criteria for Source Separation," *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 49, No. 3, pp 530-541, March 2001.

- [6] J.-F. Cardoso and A. Souloumiac, "Blind beamforming for non gaussian signals," *IEE Proceedings-F*, Vol. 40, pp. 362-370, 1993.
- [7] L. De Lathauwer, B. De Moor, J. Vandewalle, "Computation of the Canonical Decomposition by Means of a Simultaneous Generalized Schur Decomposition", *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Vol. 26, No. 2, pp. 295-327, 2004.
- [8] P. Comon, "Independent Component Analysis, a New Concept?", *Signal Processing*, Vol. 36, pp. 287-314, 1994.
- [9] A. Adib, E. Moreau and D. Aboutajdine, "Source separation contrasts using a reference signal", *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 11, No. 3, pp 312-315, March 2004.
- [10] M. Castella, S. Rhioui, E. Moreau and J.-C. Pesquet, "Quadratic Higher-Order Criteria for Iterative Blind Separation of a MIMO Convulsive Mixture of Sources", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 55, No. 1, pp 218-232, January 2007.
- [11] S. Rhioui and E. Moreau, "Convulsive Separation of i.i.d. Signals Based on Simultaneous Tensors Diagonalization", in Proc. *IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC'2006)*, Cannes, France, July 2006.
- [12] M. Castella, E. Moreau and J.-C. Pesquet, "A Quadratic MISO Contrast for Blind Equalization", in Proc. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP'2004)*, Montreal, Quebec, Canada, pp 681-684, May 2004.
- [13] P.-J. Brockwell and R.-A. Davis, "Time Series : Theory and Methods", *Springer*, 2nd edition, 1991.
- [14] A. Belouchrani, A. Cichocki, "Robust whitening procedure in blind separation context", *Electronic Letters*, pp. 36(24) :2050-2051, 2000.
- [15] L. De Lathauwer, B. De Moor and J. Vandewalle, "Blind source separation by simultaneous third-order tensor diagonalization", in Proc. *EUSIPCO'96, European Signal Processing Conference*, Trieste, Italy, pp. 2089-2092, Sep. 1996.