

Reconstruction d'image en interférométrie optique.

Éric THIÉBAUT

Université de Lyon, Lyon, F-69000, France ; Université Lyon 1, Villeurbanne, F-69622, France ;
 Centre de Recherche Astrophysique de Lyon, CNRS/UMR-5574 ;
 Observatoire de Lyon, 9 avenue Charles André, Saint-Genis Laval cedex, F-69561, France ;
 Ecole Normale Supérieure de Lyon, Lyon, France.
 thiebaut@obs.univ-lyon1.fr

Résumé – Avec le développement des interféromètres astronomiques aux longueurs d'onde du visible et de l'infrarouge apparaît le besoin de nouveaux algorithmes de reconstruction d'image. Afin de comparer ces algorithmes il faut les tester sur des données (simulées ou réelles) identiques mais il est aussi souhaitable de pouvoir les décrire dans un formalisme commun. C'est cette dernière approche qui est envisagée ici ce qui permet de répertorier les différentes méthodes de reconstruction d'image. Il est montré que la reconstruction d'image en interférométrie optique se ramène à la résolution d'un problème d'optimisation globale. L'approche de type problème inverse permet aussi d'envisager la résolution de problèmes plus compliqués comme la reconstruction d'image sans mesure de phase de Fourier.

Abstract – New image reconstruction algorithms are needed to process the data from current and future infrared and visible interferometers. In order to compare these algorithms, they must be tested on the same (simulated and real) data. However a common formalism to describe image reconstruction methods would also be helpful. This point is considered here and, by using the inverse problem framework, it is shown that existing image reconstruction algorithms consist in solving a global optimization problem under different a priori constraints. This approach also allows to consider more complex problems such as image reconstruction without Fourier phase data.

1 Introduction

Les interféromètres optiques se développent (VLTI, etc) et sont les instruments qui permettent aujourd'hui d'atteindre la meilleure résolution angulaire dans le visible et l'infrarouge. Mais les mesures fournies par ces instruments ne sont pas directement des images et la reconstruction d'image est un outil indispensable. La reconstruction d'image en radio-interférométrie a une longue histoire et est aujourd'hui bien maîtrisée [13, 2]. Néanmoins les spécificités de l'interférométrie optique font que les méthodes de reconstructions développées en radio ne sont pas directement utilisables et il faut adapter celles existantes ou en développer de nouvelles. Les raisons des difficultés supplémentaires en interférométrie optique sont les lacunes de mesures et la perte d'information de phase de Fourier.

Pour N_{tel} télescopes (ou antennes) combinés simultanément, le nombre maximal de fréquences spatiales mesurées est de $N_{\text{tel}}(N_{\text{tel}} - 1)/2$. Avec en général quelques dizaines d'antennes en radio contre 3 ou 4 télescopes en optique, les interféromètres radios ont clairement l'avantage car ils offrent rapidement une bien meilleure couverture du plan des fréquences spatiales — le plan (u, v) . Quelque soit la méthode utilisée, pour reconstruire une image il faut interpoler proprement les *trous* dans le plan (u, v) ; ceci est le rôle rempli par des contraintes *a priori* comme la positivité, la régularisation et, éventuellement, le support imposé à l'image.

2 Observables

Idéalement, un interféromètre mesure la visibilité complexe $\hat{I}(\boldsymbol{\nu})$ qui est la transformée de Fourier de la distribution d'intensité $I(\boldsymbol{\omega})$ dans la direction angulaire $\boldsymbol{\omega}$. La fréquence spatiale mesurée par une paire de télescopes mis en interférence est :

$$\boldsymbol{\nu} = \mathbf{B}/\lambda \quad (1)$$

où λ est la longueur d'onde et \mathbf{B} est la séparation projetée sur le ciel entre les deux télescopes.

En réalité, la turbulence est responsable d'un retard de phase aléatoire et différent pour chaque télescope. En optique, le déphasage dû à la turbulence entre deux télescopes est plus difficile (ou impossible) à mesurer et donc à compenser ce qui se traduit par une perte d'information sur la phase de Fourier. Aussi il faut intégrer des mesures interférométriques qui sont insensibles à ce défaut, à savoir :

- Le **spectre de puissance** :

$$\hat{I}^{(2)}(\boldsymbol{\nu}) = |\hat{I}(\boldsymbol{\nu})|^2 \quad (2)$$

qui ne nécessite que deux télescopes pour être mesuré mais ne donne qu'une information sur le module de la visibilité complexe.

- Le **bispectre** :

$$\hat{I}^{(3)}(\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) = \hat{I}(\boldsymbol{\nu}_1) \hat{I}(\boldsymbol{\nu}_2) \hat{I}(-\boldsymbol{\nu}_1 - \boldsymbol{\nu}_2) \quad (3)$$

qui demande de faire interférer au moins trois télescopes pour être mesuré. La phase du bispectre est la **clôture de phase** qui permet de mesurer une partie

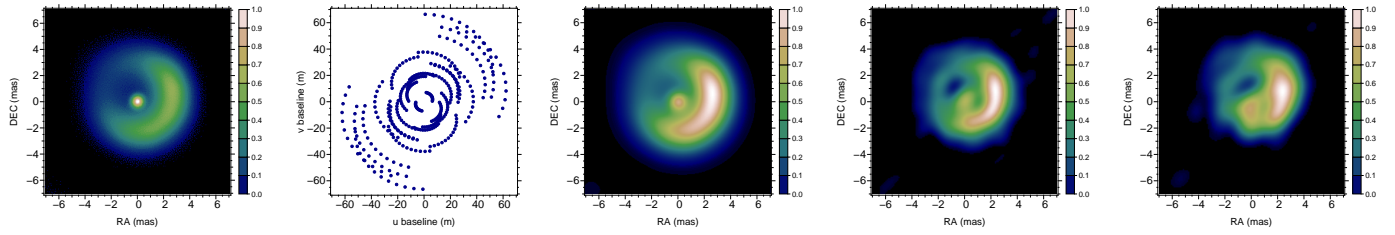


FIG. 1 – Reconstruction d’image à partir des données simulées de l’*Image Beauty Contest* [10]. De gauche à droite : image originale, couverture du plan (u, v) , image lissée à la résolution de l’interféromètre, image reconstruite à partir du spectre de puissance et des clôtures de phase, image reconstruite sans mesure de phase. La longueur d’onde de la simulation est $\lambda = 0.55 \mu\text{m}$.

de l’information de phase de Fourier mais seulement une information de phase pour 3 fréquences spatiales et au prix d’un accroissement de la complexité du traitement (non linéarité).

3 Modèle Direct

Le résultat de la reconstruction d’image est la distribution d’intensité $I(\boldsymbol{\omega})$ sur le champ de vue Ω dans la direction angulaire $\boldsymbol{\omega}$. Une façon de décrire cette distribution est d’utiliser une base de fonctions $\{b_j : \Omega \mapsto \mathbb{R}; j = 1, \dots, N\}$:

$$I(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{j=1}^N x_j b_j(\boldsymbol{\omega}) \xrightarrow{\text{FT}} \hat{I}(\boldsymbol{\nu}) = \sum_{j=1}^N x_j \hat{b}_j(\boldsymbol{\nu}) \quad (4)$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ sont les paramètres décrivant l’image et où $\hat{I}(\boldsymbol{\nu})$ et $\hat{b}_j(\boldsymbol{\nu})$ sont les transformées de Fourier de l’image et de la j -ième fonction de la base à la fréquence spatiale $\boldsymbol{\nu}$. Cette description est très générale et permet de rendre compte, par exemple, d’une approche multi-résolution ou encore de la superposition d’un fond diffus et de sources ponctuelles [4]. Néanmoins une formulation plus courante consiste à utiliser une même fonction b sur une grille régulière de directions angulaires $\mathcal{G} = \{\boldsymbol{\omega}_j; j = 1, \dots, N\}$, dans ce cas :

$$I(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{j=1}^N x_j b(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_j) \xrightarrow{\text{FT}} \hat{I}(\boldsymbol{\nu}) = \hat{b}(\boldsymbol{\nu}) \sum_{j=1}^N x_j e^{-2i\pi \boldsymbol{\omega}_j \cdot \boldsymbol{\nu}}. \quad (5)$$

Dans cette description, la fonction $b(\boldsymbol{\omega})$ fixe de fait la résolution angulaire effective de l’image à la manière du *clean beam* dans la méthode CLEAN [7]. Afin d’éviter le repliement spectral, il faut que le critère de Shannon soit respecté et que le pas d’échantillonnage angulaire $\delta\boldsymbol{\omega}$ vérifie :

$$\delta\boldsymbol{\omega} \leq \frac{\lambda}{2B_{\max}} \quad (6)$$

où B_{\max} est la longueur de la base interférométrique projetée maximale. Certaines approches comme la méthode des *building blocks* [6] ou comme WIPE [8] font explicitement apparaître $b(\boldsymbol{\omega})$. Il suffit de choisir pour $b(\boldsymbol{\omega})$ n’importe quelle fonction d’interpolation pour que le modèle (5) s’applique à la plupart des autres algorithmes ; dans ce cas les

paramètres $x_j = I(\boldsymbol{\omega}_j)$ sont les intensités des pixels de l’image.

Les données interférométriques sont liées à la visibilité complexe échantillonnée comme le montre, par exemple, le deuxième panneau de la Fig. 1. En suivant notre modélisation, la visibilité complexe $\hat{I}(\boldsymbol{\nu})$ échantillonnée dépend linéairement des paramètres \mathbf{x} :

$$\hat{I}(\boldsymbol{\nu}_k) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x})_k \quad (7)$$

avec

$$A_{j,k} = \hat{b}_j(\boldsymbol{\nu}_k) \quad (8)$$

$$A_{j,k} = \hat{b}(\boldsymbol{\nu}_k) e^{-2i\pi \boldsymbol{\omega}_j \cdot \boldsymbol{\nu}_k} \quad (9)$$

pour les prescriptions (4) et (5) respectivement.

Les représentations proposées pour l’image reconstruite possèdent une transformée de Fourier exacte. La transformée de Fourier des Eq. (4) et (5) peut aussi être approximée par une transformée de Fourier discrète rapide (FFT) mais dans ce cas, les fréquences spatiales discrètes ne coïncidant pas forcément avec celles mesurées, il faut interpoler le spectre de Fourier de l’image [2]. L’interpolation étant une opération linéaire et à condition d’adapter l’expression des coefficients de \mathbf{A} , le modèle linéaire de la visibilité complexe échantillonnée donné par l’Eq. (7) reste toutefois valable.

4 Approche Inverse

Une fois choisie la paramétrisation, la reconstruction d’image peut s’envisager comme la résolution d’un problème inverse [15, 16]. En suivant une approche bayésienne, il s’agit de maximiser la probabilité des paramètres \mathbf{x} étant données les mesures \mathbf{d} :

$$\mathbf{x}^+ = \arg \max_{\mathbf{x}} \Pr(\mathbf{x}|\mathbf{d}) = \arg \max_{\mathbf{x}} \Pr(\mathbf{d}|\mathbf{x}) \Pr(\mathbf{x}). \quad (10)$$

La solution s’écrit de façon générale :

$$\mathbf{x}^+ = \arg \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \quad (11)$$

où la fonction de pénalisation $f(\mathbf{x})$ s’écrit :

$$f(\mathbf{x}) = c_0 - c_1 \log \Pr(\mathbf{x}|\mathbf{d}) = c_0 - \underbrace{c_1 \log \Pr(\mathbf{d}|\mathbf{x})}_{f_{\text{data}}(\mathbf{x})} - \underbrace{c_1 \log \Pr(\mathbf{x})}_{f_{\text{prior}}(\mathbf{x})} \quad (12)$$

où c_0 et $c_1 > 0$ sont deux constantes réelles. Cette équation fait apparaître qu’il faut minimiser un critère qui est la

somme d'un terme de vraisemblance $f_{\text{data}}(\mathbf{x})$ qui mesure la compatibilité des paramètres avec les mesures et d'un terme de régularisation $f_{\text{prior}}(\mathbf{x})$ qui impose la connaissance *a priori* sur l'image.

4.1 Vraisemblance

Lorsque les données sont simplement des visibilités complexes mesurées et si l'on fait l'approximation gaussienne pour les erreurs, le terme de vraisemblance s'écrit comme :

$$f_{\text{data}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{d})^T \cdot \mathbf{W} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{d}) \quad (13)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \|\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{d}\|_{\ell_2}^2 \quad (14)$$

où $\mathbf{W} = \text{Cov}(\mathbf{d})^{-1}$ est l'inverse de la matrice de covariance du bruit et la dernière expression est valide pour un bruit uniforme et indépendant de variance σ^2 .

En interférométrie optique, pour les mesures complexes telles que le bispectre, l'expérience montre que le module et la phase sont approximativement gaussiens et indépendants [14]. Si l'approximation de Goodman est valide, le terme d'attache aux mesures du bispectre peut se mettre sous la forme :

$$f_{\text{data}}(\mathbf{x}) = \sum_{\ell} \frac{1}{\sigma_{\ell}^2} |\widehat{\mathbf{x}}_{k_{1,\ell}} \widehat{\mathbf{x}}_{k_{2,\ell}} \widehat{\mathbf{x}}_{k_{3,\ell}}^* - d_{\ell}|^2 \quad (15)$$

avec $\widehat{\mathbf{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ et où d_{ℓ} est la ℓ -ième mesure bispectrale et $k_{1,\ell}$, $k_{2,\ell}$ et $k_{3,\ell}$ sont les indices des trois fréquences spatiales associées. De même que pour l'Eq. (15) mais plus généralement pour les mesures de l'interférométrie optique, spectre de puissance, bispectre ou clôture de phase, l'expression de $f_{\text{data}}(\mathbf{x})$ n'est plus quadratique par rapport aux paramètres \mathbf{x} et cela même si l'on fait l'approximation gaussienne pour les erreurs de mesures. Toutefois une approximation convexe [11] autour de la solution courante peut être utilisée pour limiter des problèmes de convergence d'une méthode de reconstruction itérative. Sinon il faut prendre en compte que la phase d'un complexe n'est définie qu'à un facteur 2π près [5, 9] et que le module est nécessairement positif. À ces problèmes se rajoute le fait de devoir extraire l'information de phase des mesures de clôture de phase. Dans une approche similaire à la technique de *self-calibration* [3] utilisée en radio-astronomie, certains algorithmes comme WISARD traitent les ambiguïtés de phase explicitement en introduisant de nouvelles inconnues [12]. Mais il est aussi possible de traiter ces ambiguïtés de façon implicite [17] avec l'avantage de pouvoir traiter dans ce cas n'importe quel type de mesures voire de reconstruire une image sans aucune mesure de phase de Fourier (cf. Fig. 1). De toute façon, les dégénérescences qui découlent de l'incomplétude des mesures de phase font que le terme d'attache aux données doit être minimisé par une méthode d'optimisation globale.

4.2 Régularisation

La régularisation $f_{\text{prior}}(\mathbf{x})$ permet de prendre en compte les contraintes *a priori* sur l'image à reconstruire. Pour un problème inverse mal conditionné, celle-ci est nécessaire pour éviter l'amplification du bruit. Dans le cas de

la reconstruction d'image en interférométrie, les lacunes de mesures font que le problème est le plus souvent mal posé : il y a plus d'inconnues que de mesures et se contenter de maximiser la vraisemblance du modèle admet une infinité de solutions. La régularisation permet dans ce cas de choisir parmi toutes les solutions compatibles avec les mesures, celle qui est la plus proche d'un certain *a priori*. Il existe plusieurs types d'*a priori* qui peuvent être pris en compte mais aussi plusieurs façons de forcer un type donné *a priori*. Pour être une bonne régularisation, f_{prior} doit avoir certaines propriétés [13], en pratique, la régularisation devant permettre de combler l'absence de mesure à certaines fréquences spatiales, il est naturel de lui demander d'avoir la propriété d'interpoler entre les fréquences spatiales mesurées de façon continue et suffisamment lisse. C'est une forme de contrainte de lissage fréquentiel qui peut être obtenue en imposant une simple régularisation quadratique de l'image :

$$f_{\text{prior}}(\mathbf{x}) = \mu \|\mathbf{x}\|_{\ell_2}^2. \quad (16)$$

ou une forme plus générale comme :

$$f_{\text{prior}}(\mathbf{x}) = \mu (\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{c})^T \cdot \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{c}) \quad (17)$$

où \mathbf{Q} est une matrice symétrique positive.

Le lissage fréquentiel peut aussi s'obtenir en utilisant une des méthodes de maximum d'entropie [13] qui ont fait leurs preuves en radio-astronomie (voir ci-après). Il est intéressant de noter que les méthodes de type CLEAN ou *building-block* [7, 6] régularisent d'une certaine façon la solution en la représentant par un nombre limité de composantes.

5 Analogies

La forme de la pénalisation de l'Eq. (12) est très générale et d'autres méthodes de reconstruction d'images, pas forcément basées sur une approche bayésienne, sont équivalentes et ne diffèrent que par le type particulier de régularisation qu'elles imposent.

5.1 Maximum d'entropie

La méthode du maximum d'entropie consiste à maximiser l'entropie de l'image mesurée par¹ :

$$S(\mathbf{x}) = \sum_j (x_j - \bar{x}_j - x_j \log(x_j/\bar{x}_j)), \quad (18)$$

où $\bar{\mathbf{x}}$ est la solution *a priori*, sous la contrainte que l'accord avec les mesures soit respecté. Formellement, pour des données bruitées et dans le cas d'un modèle linéaire (ce qui est le cas si des visibilités complexes sont mesurées), l'image reconstruite est la solution du problème :

$$\max S(\mathbf{x}) \quad \text{sujet à} \quad \|\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{d}\|_{\ell_2} \leq \varepsilon \quad (19)$$

où ε est ajusté en fonction du niveau de bruit. Un tel problème d'optimisation sous contrainte se résout en introduisant un multiplicateur de Lagrange λ et en maximisant le Lagrangien :

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}; \lambda) = S(\mathbf{x}) - \lambda (\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{d}\|_{\ell_2}^2 - \varepsilon^2) \quad (20)$$

¹D'autres expressions de l'entropie sont possibles [13].

par rapport à \mathbf{x} et en ajustant λ pour respecter la contrainte. En posant $\mu = 1/(\sigma^2 \lambda)$, il est facile de voir que cela revient à minimiser la pénalisation :

$$f_{\text{MEM}}(\mathbf{x}) = \underbrace{\frac{1}{\sigma^2} \|\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{d}\|_{\ell_2}^2}_{f_{\text{data}}(\mathbf{x})} - \underbrace{\mu S(\mathbf{x})}_{f_{\text{prior}}(\mathbf{x})} \quad (21)$$

qui est bien de la forme de l'Eq. (12). Lorsque les données ne sont pas simplement des visibilité complexes, il suffit de remplacer le terme $\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{d}\|_{\ell_2}^2 / \sigma^2$ par la forme de $f_{\text{data}}(\mathbf{x})$ adaptée aux mesures, par exemple celle de l'Eq. (15).

5.2 Compressed Sensing

Récemment la théorie du *compressed sensing* a été élaborée pour justifier mathématiquement qu'il soit possible de reconstruire, par exemple, une image complète à partir d'un nombre de mesures très inférieur au nombre de pixels. Pour des données bruitées, la solution s'obtient en résolvant le problème [1] :

$$\min \|\mathbf{x}\|_{\ell_1} \quad \text{sujet à} \quad \|\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{d}\|_{\ell_2} \leq \varepsilon \quad (22)$$

où ε est réglé en fonction du niveau du bruit. La minimisation de la norme ℓ_1 des paramètres permet, en pratique, de n'expliquer les mesures qu'avec le nombre minimal de paramètres significatifs (*i.e.* non nuls). En faisant la même manipulation que dans le cas du maximum d'entropie, on peut montrer que la méthode revient à minimiser une pénalisation de la forme de l'Eq. (12) :

$$f_{\text{CS}}(\mathbf{x}) = \underbrace{\frac{1}{\sigma^2} \|\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{d}\|_{\ell_2}^2}_{f_{\text{data}}(\mathbf{x})} + \underbrace{\mu \|\mathbf{x}\|_{\ell_1}}_{f_{\text{prior}}(\mathbf{x})} \quad (23)$$

avec

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell_1} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j |x_j|. \quad (24)$$

Les méthodes de type CLEAN ou *building-block* [7, 6] en limitant le nombre de mise à jour (le nombre de blocs) se ramènent à un a priori du même type que celui implémenté par la norme ℓ_1 dans la l'approche *Compressed Sensing*.

Références

- [1] E. Candès, J. Romberg, & T. Tao. *Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements*. Communications on Pure and Applied Mathematics **59**, pp. 1207–1223, August 2006.
- [2] T. Cornwell. *Imaging concepts*. In J. A. Zensus, P. J. Diamond, and P. J. Napier, editors, *ASP Conf. Ser. 82 : Very Long Baseline Interferometry and the VLBA*, 39–+, 1995.
- [3] T. J. Cornwell & P. N. Wilkinson. *A new method for making maps with unstable radio interferometers*. M.N.R.A.S. **196**, 1067–1086, 1981.
- [4] J.-F. Giovannelli & A. Coulais. *Positive deconvolution for superimposed extended source and point sources*. A&A **439**, 401–412, 2005.
- [5] C. Haniff. *Least-squares fourier phase estimation from the modulo 2π bispectrum phase*. J. Opt. Soc. Am. A **8**, 134–140, 1991.
- [6] K.-H. Hofmann & G. Weigelt. *Iterative image reconstruction from the bispectrum*. A&A **278**, 328–339, 1993.
- [7] J. A. Högbom. *Aperture synthesis with a non-regular distribution of interferometer baselines*. A&AS **15**, 417–426, 1974.
- [8] A. Lannes, E. Anterrieu, & P. Marechal. *Clean and Wipe*. A&A **123**, 183–198, 1997.
- [9] A. Lannes. *Integer ambiguity resolution in phase closure imaging*. J. Opt. Soc. Am. A **18**, 1046–1055, 2001.
- [10] P. R. Lawson, W. D. Cotton, C. A. Hummel, J. D. Monnier, M. Zhao, J. S. Young, H. Thorsteinsson, S. C. Meimon, L. Mugnier, G. Le Besnerais, E. Thiébaud & P. G. Tuthill. *An interferometry imaging beauty contest*. Proc. of SPIE **5491**, pp. 886, 2004.
- [11] S. Meimon, L. M. Mugnier & G. Le Besnerais. *Convex approximation to the likelihood criterion for aperture synthesis imaging*. J. Opt. Soc. Am. A **22**, 2348–2356, 2005.
- [12] S. Meimon, L. M. Mugnier & G. Le Besnerais. *Reconstruction method for weak-phase optical interferometry*. Optics Letters **30**, 1809–1811, 2005.
- [13] R. Narayan & R. Nityananda. *Maximum entropy image restoration in astronomy*. Ann. Rev. of A&A **24**, 127–170, 1986.
- [14] T. A. Pauls, J. S. Young, W. D. Cotton, & J. D. Monnier. *A data exchange standard for optical (visible/IR) interferometry*. PASP **117**, 1255–1262, 2005.
- [15] A. Tarantola. *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. SIAM, 2005.
- [16] E. Thiébaud. *Introduction to image reconstruction and inverse problems*. In *Optics in Astrophysics*, R. Foy & F.-C. Foy eds., NATO ASI. Kluwer Academic, 2006.
- [17] E. Thiébaud, P. J. V. Garcia, & R. Foy. *Imaging with Amber/VLTI : the case of microjets*. Ap&SS **286**, 171–176, 2003.