

Forme entropique du principe d'incertitude et cas d'égalité asymptotique

Steeve ZOZOR¹ et Christophe VIGNAT²

¹GIPSA-Lab, Département Image signal
Rue de la Houille Blanche, B.-P. 46, 38402 Saint Martin d'Hères, France

²Laboratoire Système de Communication, Institut Gaspard Monge
5 Boulevard Descartes, 77454 Marne la Vallée, France
steeve.zozor@gipsa-lab.inpg.fr, vignat@univ-mlv.fr

Résumé – Dans cet article nous nous intéressons à la généralisation entropique du principe d'incertitude d'Heisenberg et à ses cas d'égalité. Le principe d'Heisenberg bornant le produit des variances d'un vecteur aléatoire et de son vecteur conjugué, n'a de sens que si les variances existent. Nous rappelons dans cet article les version entropiques (au sens de Rényi) de ce principe, permettant de s'affranchir de l'existence des variances. Comme pour le principe d'Heisenberg, en dimension finie la borne de l'inégalité entropique est atteinte uniquement dans le cas gaussien. L'objectif de ce travail est alors d'identifier les cas non-gaussiens d'égalité dans cette inégalité, pour des vecteurs dont la densité de probabilité est à symétrie elliptique et dont la dimension tend vers l'infini. Nous montrons que l'égalité est asymptotiquement atteinte dans de nombreux cas de mélanges d'échelle gaussiens.

Abstract – In this paper we study the entropic generalization of the Heisenberg uncertainty principle and its cases of equalities. The Heisenberg uncertainty principle bounds the product of the variances of a random vector and of its conjugated; it has a meaning only if the variances exist. We recall the Rényi entropic generalization to this principle, that permits to bypass the existence of variances. Like for the Heisenberg principle, when the dimension is finite the bound of the inequality is achieved only in the Gaussian context. The goal of this study is to identify the non-Gaussian cases of equality in the context of elliptically distributed vectors and when the dimension tends to the infinity. We show that the equality is asymptotically achieved for numerous cases of Gaussian scale mixtures.

1 Introduction

Le principe d'incertitude d'Heisenberg, issu de la physique, trouve d'importantes applications dans certains domaines du traitement du signal comme l'analyse en ondelettes (inégalité d'Heisenberg-Gabor); il borne inférieurement le produit des variances d'un vecteur aléatoire et de son vecteur conjugué. Dans le domaine temps-fréquence par exemple, cette inégalité indique que, conjointement, les résolutions temporelles et fréquentielle d'un signal ne peuvent être arbitrairement faibles. Pour une fonction d'onde n -dimensionnelle $\Psi_n(x)$ et sa transformée de Fourier $\widehat{\Psi}_n(u) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \Psi_n(x) e^{-iu^t x} dx$ (par exemple la position et le moment d'une particule), on notera $X_n \in \mathbb{R}^n$ un vecteur aléatoire distribué suivant la densité de probabilité (ddp) $f_n(x) = |\Psi_n(x)|^2$, et \widetilde{X}_n le vecteur conjugué de ddp $\widetilde{f}_n(x) = |\widehat{\Psi}_n(x)|^2$. La relation d'incertitude d'Heisenberg s'écrit formellement

$$\frac{EX_n^t X_n}{n} \frac{E\widetilde{X}_n^t \widetilde{X}_n}{n} \geq \frac{1}{4} \quad (1)$$

Cependant, cette inégalité n'a un sens que lorsque les variances considérées existent, ce qui n'est pas le cas par exemple pour un vecteur aléatoire de loi de Cauchy. En 1975, Bialynicki-Birula *et al.* [1] ont reformulé cette inégalité en termes d'entropie de Shannon, et montré que la relation d'Heisenberg est une conséquence de cette inégalité entropique. Récemment [2, 3], cette inégalité a été

étendue à la famille des entropies de Rényi sous la forme

$$\frac{H_{\frac{p}{2}}(X_n) + H_{\frac{q}{2}}(\widetilde{X}_n)}{n} \geq \log(2\pi) + \frac{\log p}{p-2} + \frac{\log q}{q-2} \quad (2)$$

où l'entropie de Rényi d'index λ est définie comme $H_\lambda(X_n) = \frac{1}{1-\lambda} \log \int f_n^\lambda$ et avec $1/p + 1/q = 1$. Remarquons que par continuité, l'entropie de Rényi de paramètre $\lambda = 1$ coïncide avec l'entropie de Shannon. Ce résultat suggère de généraliser la notion de puissance entropique en définissant $N_\lambda(X_n) = (2\pi)^{-1} \lambda^{1/(1-\lambda)} \exp(2H_\lambda(X_n)/n)$; cette quantité peut être considérée comme une mesure généralisée de l'incertitude associée à X_n . En termes de cette nouvelle mesure, l'inégalité (2) s'écrit simplement

$$N_{\frac{p}{2}}(X_n) N_{\frac{q}{2}}(\widetilde{X}_n) \geq \frac{1}{4} \quad (3)$$

et le sens physique de cette inégalité est similaire au principe d'incertitude d'Heisenberg : il existe une incertitude minimale associée à la mesure conjointe d'une variable et de sa conjuguée.

Une propriété importante des inégalités (1) et (3) est leur invariance par changement d'échelle, *i.e.* par transformation du vecteur X_n en un vecteur AX_n où A est une matrice inversible. Une seconde propriété importante est que, à dimension n finie, le cas d'égalité est atteint dans (1) comme dans (3) si et seulement si X_n est un vecteur gaussien [2, 3]. Cependant, cette propriété n'est plus vérifiée asymptotiquement [2, 4] : par exemple, un vecteur X_n suivant une loi Student-t isotrope atteint la borne inférieure de (2) lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Dans cet article, nous nous intéressons aux cas d'égalités asymptotiques dans la relation d'incertitude entropique (2) dans le cadre de vecteurs X_n de lois à symétrie elliptique. Nous commencerons par reformuler la somme des taux d'entropies dans ce contexte et montrerons que celle-ci peut également être majorée. Nous montrerons analytiquement que dans le cas de variables Student-t, le majorant tend vers le minorant lorsque la dimension n tend vers l'infini. Nous montrerons également numériquement cet effet sur d'autres exemples non-gaussiens, suggérant qu'il est générique aux vecteurs aléatoires elliptiques. Dans la partie discussion, nous donnerons une interprétation possible de cet effet.

2 Principe d'incertitude et lois elliptiques

2.1 Encadrement de la somme des taux d'entropie

Soit $\Psi_n(x) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$ une fonction d'onde et $F_n(x) = |\Psi_n(x)|^2$ la densité de probabilité associée; soit $\widehat{\Psi}_n$ la transformée de Fourier de Ψ_n si bien que $\widetilde{F}_n(x) = |\widehat{\Psi}_n(x)|^2$ est aussi une densité de probabilité. Nous nous intéressons par la suite au cas particulier de lois du type elliptique, c'est-à-dire telles qu'il existe une matrice inversible $M(n \times n)$ telle que $\Psi_n(x) = |\Sigma|^{-\frac{1}{4}} \psi_n\left((x^t \Sigma^{-1} x)^{\frac{1}{2}}\right)$ où $\Sigma = M^{-1} M^{-t}$ est une matrice symétrique définie positive. En raison de l'invariance d'échelle de (2), nous supposons désormais que $\Sigma = I$ matrice identité. Un vecteur X_n distribué suivant une telle loi est dit sphériquement invariant ou isotrope et

$$F_n(x) = f_n(\|x\|) = |\psi_n(\|x\|)|^2$$

Ceci implique [2, 5] qu'un vecteur aléatoire \widetilde{X}_n distribué suivant la loi $\widetilde{F}_n(x)$ est également isotrope et que sa loi vérifie

$$\widetilde{F}_n(x) = |\varphi_n(\|x\|)|^2$$

où

$$\varphi_n(r) = r^{1-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}_+} u^{\frac{n}{2}} \psi_n(u) J_{\frac{n}{2}-1}(ur) du$$

est la transformée de Hankel modifiée de ψ_n , et J_ν est la fonction de Bessel du premier type et d'ordre ν . En reportant les expressions de F_n et \widetilde{F}_n dans celles des entropies de Rényi $H_{\frac{p}{2}}(X_n)$ et $H_{\frac{q}{2}}(\widetilde{X}_n)$, et par [6, 4.642], la somme

des taux d'entropie $\mathcal{S}_p(X_n) = \frac{H_{\frac{p}{2}}(X_n)}{n} + \frac{H_{\frac{q}{2}}(\widetilde{X}_n)}{n}$ s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_p(X_n) &= \frac{2}{n} \log \left(\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \right) \\ &+ \frac{2}{n(2-p)} \log \int_{\mathbb{R}_+} r^{n-1} |\psi_n(r)|^p dr \quad (4) \\ &+ \frac{2}{n(2-q)} \log \int_{\mathbb{R}_+} r^{n-1} |\varphi_n(r)|^q dr \end{aligned}$$

Nous supposons par la suite que la fonction Ψ_n peut être écrite sous la forme $\Psi_n(x) = \int_{\mathbb{R}_+} a_n(u) e^{-\frac{x^t x u}{2}} du :$

pour les conditions permettant cette décomposition, on consultera [7]. Dans le cas $a_n \geq 0$, ceci implique que le vecteur aléatoire X_n est un mélange d'échelle gaussien $X_n = \frac{G_n}{\sqrt{B}}$ où $B \in \mathbb{R}^+$ est une variable aléatoire indépendante du vecteur gaussien G_n . La fonction ψ_n s'écrit,

$$\psi_n(r) = \int_{\mathbb{R}_+} a_n(u) e^{-\frac{r^2 u}{2}} du \quad (5)$$

avec $a_n(u) = \mathcal{L}^{-1}\left(\psi_n\left(2^{\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{2}}\right)\right)(u)$ où \mathcal{L}^{-1} désigne la transformée de Laplace inverse. De plus, on montre facilement que $\widehat{\Psi}(x) = \varphi_n(\|x\|)$ est également un "mélange gaussien" [6, 6.631-4] et

$$\varphi_n(r) = \int_{\mathbb{R}_+} u^{-\frac{n}{2}} a_n(u) e^{-\frac{r^2 u}{2}} du \quad (6)$$

Ces hypothèses permettent alors d'obtenir une borne supérieure de la somme des taux d'entropie. Pour ce faire, considérons la fonction

$$P_p(\lambda) = \log \int_{\mathbb{R}_+} r^{-1} \left| r^{\frac{n}{p}} \psi_n(r) \right|^\lambda dr \quad (7)$$

Le second terme de droite de (4) est donc $\frac{2}{n(2-p)} P_p(p)$. En dérivant P_p deux fois et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient $\frac{\partial^2 P_p}{\partial \lambda^2} \geq 0$ et donc que P_p est convexe. Par conséquent pour $\lambda \in [1; 2]$, $P_p(\lambda) \leq (2-\lambda)P_p(1) + (\lambda-1)P_p(2)$, et l'inégalité inverse si $\lambda > 2$. On en déduit que pour tout $\lambda \geq 1$, $\frac{1}{2-\lambda} P_p(\lambda) \leq P_p(1) + \frac{\lambda-1}{2-\lambda} P_p(2)$, et en particulier pour $\lambda = p$,

$$\frac{\log \int_{\mathbb{R}_+} r^{n-1} |\psi_n(r)|^p dr}{2-p} \leq P_p(1) + \frac{p-1}{2-p} P_p(2) \quad (8)$$

On remplace alors ψ_n par son expression (5) dans (7),

$$\begin{aligned} P_p(1) &\leq \log \int_{\mathbb{R}_+^2} r^{\frac{n}{p}-1} |a_n(u)| e^{-\frac{r^2 u}{2}} dr du \\ &= \left(\frac{n}{2p} - 1 \right) \log 2 + \log \Gamma \left(\frac{n}{2p} \right) \\ &+ \log \int_{\mathbb{R}_+} u^{-\frac{n}{2p}} |a_n(u)| du \quad (9) \end{aligned}$$

avec égalité si $a_n \geq 0$. On supposera que la second intégrale converge. On procède de même pour $P_p(2)$,

$$\begin{aligned} P_p(2) &= \left(\frac{n}{p} - 1 \right) \log 2 + \log \Gamma \left(\frac{n}{p} \right) \\ &+ \log \int_{\mathbb{R}_+^2} (u+v)^{-\frac{n}{p}} a_n(u) a_n^*(v) du dv \quad (10) \end{aligned}$$

En reportant (9)-(10) dans (8) on borne supérieurement le premier terme intégral de (4). On procède de la même manière pour le second terme intégral,

$$\frac{\log \int_{\mathbb{R}_+} r^{n-1} |\phi_n(r)|^q dr}{2-q} \leq Q_q(1) + \frac{q-1}{2-q} Q_q(2) \quad (11)$$

avec

$$\begin{aligned} Q_q(1) &\leq \left(\frac{n}{2q} - 1 \right) \log 2 + \log \Gamma \left(\frac{n}{2q} \right) \\ &+ \log \int_{\mathbb{R}_+} u^{-\frac{n}{2q}} |a_n(u)| du \quad (12) \end{aligned}$$

et

$$Q_q(2) = \left(\frac{n}{q} - 1\right) \log 2 + \log \Gamma\left(\frac{n}{q}\right) + \log \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{(uv)^{\frac{n}{q} - \frac{n}{2}}}{(u+v)^{\frac{n}{q}}} a_n(u) a_n^*(v) du dv \quad (13)$$

On reporte alors (9)-(10) dans (8), (12)-(13) dans (11), le tout dans (4), et on utilise les développements asymptotique du log-gamma [6, 8.342] pour finalement obtenir l'encadrement suivant :

$$\mathcal{S}_p(G_n) \leq \mathcal{S}_p(X_n) \leq \mathcal{S}_p(G_n) + \delta_p(n) + o(1) \quad (14)$$

où

$$\mathcal{S}_p(G_n) = \log(2\pi) + \frac{\log p}{p-2} + \frac{\log q}{q-2} \quad (15)$$

est le taux d'entropie d'une gaussienne et

$$\delta_p(n) = \frac{2(p-1)}{np(2-p)} (p \log L_{n,p}(1/p) - q \log L_{n,p}(1/q)) \quad (16)$$

avec

$$\begin{cases} L_{n,p}(t) = \int_{\mathbb{R}_+^2} \left(\frac{uv}{(u+v)^2}\right)^{\frac{nt}{2}} A_{n,p}(u) A_{n,p}^*(v) du dv \\ A_{n,p}(u) = \frac{u^{-\frac{n}{2p}} a_n(u)}{\int_{\mathbb{R}_+} u^{-\frac{n}{2p}} |a_n(u)| du} \end{cases} \quad (17)$$

Pour que $\mathcal{S}_p(X_n)$ tende vers le taux d'entropie gaussien $\mathcal{S}_p(G_n)$, il suffit que $\delta_p(n)$ tende vers 0 avec n . En l'état, nous ne savons pas spécifier de condition(s) nécessaire(s) pour que cette convergence ait lieu. Cependant, nous pouvons montrer quelques exemples de lois non-gaussiennes qui atteignent asymptotiquement la borne gaussienne correspondant à une incertitude minimale.

2.2 Divers cas d'égalité asymptotique

Lois Student-t Abe *et al.* [4] ont montré numériquement, et dans le cas de l'entropie de Shannon ($p = q = 2$) uniquement, que les lois multivariées de Cauchy atteignent la borne inférieure de l'entropie ($\delta_2(n) \rightarrow 0$). Nous avons étendu ce résultat à une famille beaucoup plus large de distributions, la famille des lois Student-t à m degrés de liberté pour lesquelles $f_n(r) \propto (1+r^2)^{-\frac{n+m}{2}}$ [2]. La loi de Cauchy correspond à $m = 1$. Pour cette famille on montre que $a_n(u) \propto u^{\frac{n+m}{4}-1} e^{-\frac{u}{2}}$, car $F_n^{\frac{1}{2}}$ est Student-t et les Student-t sont mélange d'échelle gaussien [2, 8]. On calcule ensuite $A_{n,p}(u)$ via (17), puis $L_{n,p}(t)$ par un passage en coordonnées polaires : $L_{n,p}(t) = \frac{\Gamma^2(\frac{n+m}{4} - \frac{n}{2p} + \frac{nt}{2}) \Gamma(\frac{n+m}{2} - \frac{n}{p})}{\Gamma^2(\frac{n+m}{4} - \frac{n}{2p}) \Gamma(\frac{n+m}{2} - \frac{n}{p} + nt)}$. En remplaçant alors cette expression dans (16) et par le développement asymptotique du log-gamma [6, 8.342] on montre que $\delta_p(n)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Ce résultat est illustré sur la Fig.1 ci-dessous où $\mathcal{S}_p(G_n) + \delta_p(n)$ est tracée en fonction de n pour différentes valeurs de l'indice entropique p . Dans le cas particulier $m = n + 2$ on peut même obtenir un résultat analytique de $\mathcal{S}_p(X_n)$ et montrer directement que $\mathcal{S}_p(X_n) \rightarrow \mathcal{S}_p(G_n)$ [2].

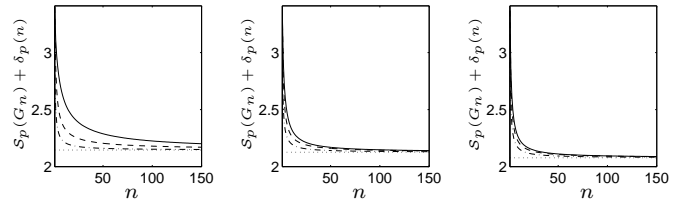


FIG. 1: Quantité $\mathcal{S}_p(G_n) + \delta_p(n)$ en fonction de n dans le cas Student-t et $m = 1$ (Cauchy, trait plein), $m = n + 2$ (Laplace, trait mixte) et $m = \sqrt{n}$ (tirets). La ligne en pointillés représente la borne inférieure de (2) et $p = 2.01$ (gauche), $p = 3$ (centre) et $p = 5$ (droite).

Lois gaussiennes généralisées Pour ces lois, $f_n(r) \propto e^{-r^\alpha}$ où α est l'indice de la loi. Lorsque $\alpha \leq 2$, il est possible de déterminer la "loi" de mélange a_n . En effet, la fonction $\Psi_n = F_n^{\frac{1}{2}}$ a une forme gaussienne généralisée de même indice α . De plus elle a la même expression que la fonction caractéristique d'une loi symétrique α -stable ("sous-gaussien") d'indice α [9]. Sa transformée de Fourier est donc proportionnelle à la densité d'un vecteur α -stable d'indice α . Or un tel vecteur peut s'écrire sous forme d'un mélange d'échelle gaussien [9] par une variable scalaire α -stable d'indice $\alpha/2$ et de paramètre d'asymétrie $\beta = 1$: d'après (6) c'est donc la loi que suit a_n . D'après les développements autour de l'infini et 0 de la densité d'une telle loi [9, eq. (1.2.8)] et [10, th. 2.5.2], les intégrales de $\delta_p(n)$ sont convergentes. Malheureusement, dans ce cadre a_n n'a pas de forme explicite. Nous avons utilisé le code de J.-P. Nolan [11] pour tabuler a_n et avons évalué (17)-(16) numériquement. La figure 2 représente $\mathcal{S}_p(G_n) + \delta_p(n)$ en fonction de n , pour plusieurs valeurs α de la loi et pour différentes valeurs de l'indice entropique p . On constate que pour les gaussiennes généralisées la somme des taux d'entropie atteint encore la borne minimale de la relation d'incertitude. On pourra noter que le cas $\alpha = 1$ correspond aux cas $m = n + 2$ du cas Student-t, cas pour lequel \mathcal{S}_p a une expression analytique (dans ce cas, a_n suit une loi de Lévy et a une expression analytique).

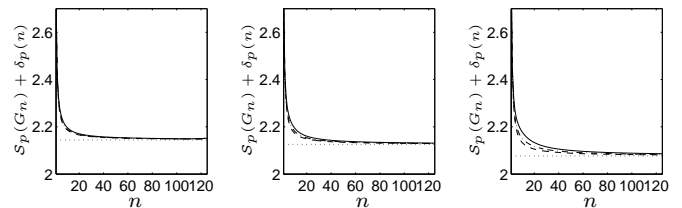


FIG. 2: $\mathcal{S}_p(G_n) + \delta_p(n)$ en fonction de n dans le cas gaussien généralisé et $\alpha = 1.4$ (trait plein), $\alpha = 1.6$ (trait mixte) et $\alpha = 1.8$ (tirets). La ligne en pointillés représente la borne inférieure de (2) et $p = 2.01$ (gauche), $p = 3$ (centre) et $p = 5$ (droite).

Fonction de mélange de type fonction de Bessel

On considère le cas de lois du type $f_n(r) \propto \frac{(\sqrt{1+r^4}-r^2)^{n+m}}{1+r^4}$ pour lesquelles $a_n(r) \propto J_{\frac{n+m}{2}}(r/2)$ [6, 6.611-1]. D'après les développements autour de l'infini et 0 de J_ν [6, 8.440 et 8.451-1], les intégrales de $\delta_p(n)$ sont convergentes. A notre connaissance ces lois ne décrivent pas une famille particulière. Toutefois, elles nous permettent d'illustrer le fait

que le comportement observé dans les cadres précédents ne se limitent pas aux cas $a_n \geq 0$. En effet, le comportement de $\mathcal{S}_p(G_n) + \delta_p(n)$ en fonction de n , tracé figure 3, montre que la borne minimale du principe d'incertitude est encore atteinte dans ce cadre.

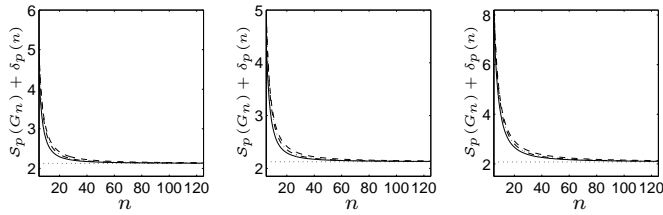


FIG. 3: $\mathcal{S}_p(G_n) + \delta_p(n)$ en fonction de n dans le cas où $a_n \propto J_{\frac{n+m}{2}}$ et $m = 0$ (trait plein), $m = \sqrt{n}$ (trait mixte) et $m = n/2$ (tirets). La ligne en pointillés représente la borne inférieure de (2) et $p = 2.01$ (gauche), $p = 3$ (centre) et $p = 5$ (droite).

3 Discussion

Dans cet contribution nous avons rappelé la relation d'incertitude entropique de Bialynicki-Birula généralisée aux entropies de Rényi. Nous avons montré que, dans le cas de vecteurs elliptiquement distribués, la somme des taux d'entropie admet un majorant, et avons exhibé quelques exemples non-gaussiens pour lesquels ce majorant tend vers le minorant avec la dimension n : l'incertitude minimale associée à la mesure conjointe d'une variable et de sa conjuguée est alors asymptotiquement atteinte. Dans [2] nous avons montré également cet effet numériquement sur des variables Student- t , en évaluant numériquement $\mathcal{S}_p(X_n)$ (dans ce cadre nous n'avons pas pu évaluer a_n). Nous avons également testé divers cas de mélanges a_n . Pourvu que $A_{n,p}$ et $L_{n,p}$ existent, tous les exemples testés ont exhibé le même effet. Ces résultats laissent entendre que la convergence de $\delta_p(n)$ vers 0 semble générique aux vecteurs aléatoires elliptiquement distribués.

Dans le domaine du traitement du signal, il est communément admis que les lois gaussiennes sont celle associées à une incertitude minimale lors de la mesure de variables conjuguées. C'est le cas en dimension finie, mais les résultats précédents montrent que de nombreux systèmes de grandes dimensions se rapprochent de cette borne d'incertitude minimale. Une interprétation possible de ce phénomène, proposée dans [2], serait que, lorsque la dimension du système croît, sa distribution tend, en un sens à préciser, vers une distribution gaussienne. Nous avons montré dans [2] que cette explication par "gaussianisation" est en général fautive. La divergence de Kullback-Leibler entre X_n et un vecteur gaussien peut tendre vers l'infini alors même que la borne minimale de (3) peut-être atteinte. De même la distribution d'un sous vecteur de taille fini peut ne pas tendre vers une gaussienne (ex. cas Cauchy) alors que $\mathcal{S}_p(X_n)$ atteint $\mathcal{S}_p(G_n)$. On notera que l'hypothèse de symétrie elliptique introduit une dépendance entre les composantes du vecteur aléatoire : dans le cas de composantes indépendantes et identiquement dis-

tribuées, le taux d'entropie coïncide avec l'entropie d'une composante, ce qui empêche l'apparition du phénomène décrit ci-dessus. On peut se poser alors la question du sens physique de (3) en grande dimension : tout se passe comme si la loi de mélange influe de moins en moins sur l'incertitude conjointe dans un domaine et son domaine conjugué. Une perspective de ce travail est la détermination des conditions minimales pour qu'un vecteur montre ce comportement asymptotique. Dans ce cas, il serait intéressant de comprendre le sens physique de cet effet.

En termes d'applications potentielles, on rencontre de plus en plus fréquemment des problèmes de discrimination de données en grande dimension, que ce soit en traitement d'image (travail sur un espace de caractéristiques) ou dans des problèmes d'apprentissage. Bien que non directement lié, ce travail pourrait trouver écho dans ces domaines du traitement du signal.

References

- [1] I. Bialynicki-Birula and J. Mycielski, "Uncertainty relations for information entropy in wave mechanics," *Communications in Mathematical Physics*, vol. 44, pp. 129–132, November 1975.
- [2] S. Zozor and C. Vignat, "On classes of non-Gaussian asymptotic minimizers in entropic uncertainty principles," *Physica A*, vol. 375, pp. 499–517, March 2007.
- [3] I. Bialynicki-Birula, "Formulation of the uncertainty relations in terms of the Rényi entropies," *arXiv:quant-ph/0608116*, August 2006.
- [4] S. Abe and A. K. Rajagopal, "Information theoretic approach to statistical properties of multivariate Cauchy-Lorentz distribution," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 34, pp. 8727–8731, October 2001.
- [5] R. Lord, "The use of the Hankel transform in statistics I. General theory and examples," *Biometrika*, vol. 41, pp. 44–55, June 1954.
- [6] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*. San Diego: Academic Press, 1980.
- [7] K.-C. Chu, "Estimation and decision for linear systems with elliptical random processes," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 18, pp. 499–505, October 1973.
- [8] C. Vignat, A. O. Hero III, and J. A. Costa, "About closedness by convolution of the Tsallis maximizers," *Physica A*, vol. 340, pp. 147–152, September 2004.
- [9] G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes. Stochastic Models with infinite Variance*. New-York: Chapman & Hall, 1994.
- [10] V. M. Zolotarev, *One-dimensional Stable Distributions*. vol. 65, Providence: American Mathematical Society, 1986.
- [11] J. P. Nolan, "Numerical calculation of stable densities and distribution functions," *Communications in Statistics: Stochastic Models*, vol. 13, no. 4, pp. 759–774, 1997. <http://academic2.american.edu/~jpnolan>.