

# Comparaison de l'estimation de degré de polarisation à partir de 4, 2 et 1 images d'intensité entachées d'un speckle pleinement développé

Muriel ROCHE, Julien FADE, Philippe RÉFRÉGIER,

Institut Fresnel - UMR 6133 - Université Paul Cézanne

Ecole Centrale de Marseille

Domaine Universitaire de Saint Jérôme, 13397 Marseille Cedex 20, France

muriel.roche@fresnel.fr, julien.fade@fresnel.fr, philippe.refregier@fresnel.fr

**Résumé** – L'imagerie polarimétrique active permet de mettre en évidence les propriétés polarimétriques de scènes imagées. La façon dont la scène modifie l'état de polarisation de la lumière incidente peut être caractérisée par un paramètre scalaire, le degré de polarisation. Nous proposons, sous l'hypothèse de speckle pleinement développé, l'estimation de ce degré lorsque l'on diminue le nombre d'images d'un facteur deux puis quatre par rapport aux mesures standard utilisant quatre images. Les estimateurs proposés sont comparés en terme de biais et variance et testés sur des images simulées. Cette étude montre que la précision obtenue avec un système qui nécessite moins de quatre images peut être intéressante pour certaines applications.

**Abstract** – Active polarimetric imagery allows one to reveal polarimetric properties of the imaged scene. The way the scene modify the state of polarization of the incident light can be characterized by a scalar parameter: the degree of polarization. We propose, under the hypothesis of fully developed speckle, to estimate this degree when the number of images is reduced by a factor 2 and 4 in comparison to the standard method which uses 4 images. The estimators are compared in terms of bias and variance and tested on simulated data. This study shows that a correct precision can be obtained for some applications when less than four images are used.

## 1 Introduction

L'imagerie polarimétrique connaît depuis quelques années un véritable essor. La plupart des systèmes d'imagerie actuellement développés sont équipés d'un appareillage polarimétrique. On peut par exemple citer les systèmes d'imagerie médicale [1], d'imagerie astronomique [2], de vision industrielle [3], d'imagerie dans le domaine militaire [4]...

Ce type d'imagerie permet de fournir des informations complémentaires à celles obtenues grâce à l'imagerie d'intensité classique. En effet, les objets présents dans une scène modifient l'état de polarisation de la lumière incidente différemment selon leur nature. Par exemple, un objet métallique dépolairise peu la lumière à l'inverse des objets diélectriques (plastique, céramique) [5]. L'analyse de l'état de polarisation de la lumière rétrodiffusée par les objets constituant la scène peut donc permettre de différencier des objets suivant leur nature. Dans le cas de l'imagerie polarimétrique active, la source de lumière est contrôlée ainsi la modification de son état de polarisation apporte des informations sur la nature du matériau imagé.

Le degré de polarisation [6] permet d'analyser l'état de polarisation de la lumière. Cette quantité scalaire varie entre 0 et 1. Ce degré sera proche de 1 lorsque la lumière rétrodiffusée par la scène sera totalement polarisée, proche de 0 dans le cas totalement dépolairisé, et pour les valeurs intermédiaires la lumière sera dite partiellement polarisée.

Le degré de polarisation est estimé à partir des composantes de la matrice de covariance entre les vecteurs de Jones de la lumière rétrodiffusée. La connaissance de cette matrice nécessite l'estimation de quatre paramètres réels [7]. De façon standard ces paramètres sont obtenus à partir de quatre images d'intensité prises dans des configurations différentes du système

d'analyse polarimétrique [8]. Le dispositif de mesure fait notamment intervenir un polariseur et un retardateur qui nécessitent un réglage précis, ce qui implique un temps d'acquisition non négligeable.

Dans ce contexte, des méthodes d'analyse de l'état de polarisation de la lumière nécessitant seulement deux mesures ont été proposées [1, 9, 10, 11]. Ces méthodes permettent notamment d'augmenter le contraste et, dans le cas de matériaux non biréfringents de donner une estimation du degré de polarisation. Cette hypothèse implique cependant que les deux images acquises soient statistiquement indépendantes.

Nous avons proposé [12] une nouvelle méthode d'estimation du degré de polarisation à partir de seulement deux mesures mais en considérant une corrélation éventuelle entre ces mesures. Cette estimation est possible si l'on se place dans le cas d'un éclairage cohérent et d'un speckle pleinement développé. Nous avons aussi récemment proposé [13] de simplifier encore le système d'imagerie en utilisant une unique image d'intensité pour obtenir le degré de polarisation. Cette technique permet de réduire le système d'imagerie à son minimum : aucun polariseur, ni retardateur n'est ici nécessaire. Seule l'hypothèse de speckle pleinement développé doit être satisfaite.

Nous proposons dans cet article de comparer les trois méthodes d'estimation du degré de polarisation à partir de 4, 2 et une seule image en évaluant leurs performances en terme de biais et variance sur des simulations d'expériences réalistes. Cette étude permet de préciser pour quel type d'application ces méthodes peuvent être envisagées.

## 2 Contexte

On décrit un champ électrique  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  quasi-monochromatique au point  $\mathbf{r}$ , et à l'instant  $t$ , se propageant dans la direction  $\mathbf{e}_Z$  dans un milieu homogène et isotrope sous la forme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = [A_X(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_X + A_Y(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_Y].e^{-i2\pi\nu t} \quad (1)$$

où  $\nu$  est la fréquence centrale,  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = [A_X(\mathbf{r}, t), A_Y(\mathbf{r}, t)]^T$  correspond au vecteur de Jones dont les composantes sont complexes. Les caractères en gras désignent des vecteurs.

La matrice de covariance définie par :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \langle A_X(\mathbf{r}, t)A_X^*(\mathbf{r}, t) \rangle & \langle A_X(\mathbf{r}, t)A_Y^*(\mathbf{r}, t) \rangle \\ \langle A_Y(\mathbf{r}, t)A_X^*(\mathbf{r}, t) \rangle & \langle A_Y(\mathbf{r}, t)A_Y^*(\mathbf{r}, t) \rangle \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\triangleq \begin{pmatrix} I_X & c \\ c^* & I_Y \end{pmatrix}$$

où  $\langle . \rangle$  et  $*$  représentent respectivement l'opérateur de la moyenne statistique et la conjugaison complexe. Les quantités  $I_X$  et  $I_Y$  représentent les intensités dans des directions  $X$  et  $Y$  orthogonales et  $c$  et  $c^*$  correspondent aux corrélations entre les composantes du vecteur de Jones. La matrice  $\Gamma$  décrit le caractère aléatoire au second ordre de l'état de polarisation de la lumière. Si l'on considère un éclairage cohérent, un bruit de speckle vient dégrader l'image. Supposer le speckle pleinement développé permet de modéliser le vecteur de Jones  $\mathbf{A}$  par une loi Gaussienne complexe circulaire de la forme :

$$p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \frac{1}{\pi^2 \det(\Gamma)} e^{-\mathbf{A}^\dagger \Gamma^{-1} \mathbf{A}} \quad (3)$$

où  $\dagger$  correspond au transposé conjugué.

Le degré de polarisation défini par [6] :

$$\mathcal{P} = \sqrt{1 - 4 \frac{\det(\Gamma)}{[\text{tr}(\Gamma)]^2}} = \sqrt{1 - 4 \frac{I_X I_Y - \rho}{(I_X + I_Y)^2}} \quad (4)$$

où  $\rho = |c|^2$ , permet de caractériser la façon dont la lumière incidente est polarisée ou dépolarisée par la scène. Son estimation est réalisée dans la suite en utilisant trois méthodes différentes.

## 3 Méthodes d'estimation du degré de polarisation

Les méthodes d'estimation du degré de polarisation, étudiées dans cet article, utilisent 4, 2 ou 1 seule image.

Le degré de polarisation est estimé à partir de l'équation (4) pour les méthodes utilisant 4 et 2 images. Les différentes images de la scène sont obtenues en éclairant celle-ci avec une lumière parfaitement polarisée et en analysant la lumière rétrodiffusée. En enregistrant la lumière rétrodiffusée dans deux directions orthogonales (dont l'une est parallèle à la polarisation incidente) on obtient deux images  $I_X$  et  $I_Y$ . Deux images supplémentaires sont obtenues en analysant la lumière rétrodiffusée dans une direction orientée à  $45^\circ$  par rapport à la direction de la lumière incidente puis dans cette même direction en ajoutant une lame quart d'onde. Dans les deux configurations (4 et 2 images), il est nécessaire d'estimer les intensités  $I_X$  et  $I_Y$ .

Cette opération est réalisée en calculant la moyenne empirique sur une région de taille  $N$  dans les images enregistrées :

$$\widehat{I}_X = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{X_i} \quad \widehat{I}_Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{Y_i} \quad (5)$$

où  $I_{X_i}$  (resp.  $I_{Y_i}$ ) correspond à la valeur de l'intensité dans l'image  $I_X$  (resp.  $I_Y$ ) au pixel  $i$ . Ces estimateurs sont non biaisés et leur variance peut être calculée [12]. La différence entre les deux méthodes précédentes réside dans l'estimation du paramètre  $\rho$ . Lorsque quatre images sont disponibles, la matrice de covariance peut être entièrement estimée et le paramètre  $\rho$  est obtenu en calculant l'intercorrélation des composantes du vecteur de Jones :

$$\widehat{\rho}_4 = \left| \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N A_{X_i} A_{Y_i}^* \right|^2 \quad (6)$$

Lorsque seulement deux images sont enregistrées et sous l'hypothèse de speckle pleinement développé, ce paramètre peut-être estimé à partir de l'intercorrélation entre les intensités [12] :

$$\widehat{\rho}_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{X_i} I_{Y_i} - \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I_{X_j} \right) \left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N I_{Y_k} \right) \quad (7)$$

Les deux estimateurs  $\widehat{\rho}_4$  et  $\widehat{\rho}_2$  sont asymptotiquement non biaisés et leur variance peut être calculée de façon théorique [12]. Le carré du degré de polarisation est ensuite estimé en remplaçant les différents termes par leurs estimés dans l'équation (4) conduisant aux estimateurs  $\widehat{\mathcal{P}}_4^2$  ( $\triangleq \widehat{\beta}_4$ ) pour la méthode utilisant 4 images et  $\widehat{\mathcal{P}}_2^2$  ( $\triangleq \widehat{\beta}_2$ ) pour la méthode utilisant 2 images. La dernière méthode analysée utilisant une seule image de la scène ne nécessite aucun polariseur.

Le degré de polarisation peut être estimé en notant que, pour un speckle pleinement développé, l'intensité  $i_T$  de l'image suit une densité de probabilité de la forme [6]

$$p_{i_T}(i_T | \mathcal{P}, I_T) = \frac{1}{\mathcal{P} I_T} \left\{ e^{-\frac{2i_T}{(1+\mathcal{P})I_T}} - e^{-\frac{2i_T}{(1-\mathcal{P})I_T}} \right\} \quad (8)$$

où  $I_T$  est l'intensité moyenne. La moyenne et la variance de la variable aléatoire  $i_T$  sont données par :

$$\langle i_T \rangle = I_T; \quad \sigma^2(i_T) = \langle i_T^2 \rangle - \langle i_T \rangle^2 = (1 + \mathcal{P}^2) I_T^2 / 2 \quad (9)$$

Ainsi à partir de cette dernière relation, en estimant la moyenne et la variance dans une région homogène de l'image, le degré de polarisation est calculable [13] :

$$\mathcal{P}_1^2 \triangleq \widehat{\beta}_1 = \frac{2}{\left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_i \right)^2} \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_i^2 - \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_i \right)^2 \right] - 1 \quad (10)$$

où  $I_i$  correspond à la valeur de l'intensité dans l'image  $I$  au pixel  $i$ .

## 4 Biais et variances des trois méthodes

Chacune des trois méthodes permet d'obtenir un estimé du degré de polarisation. Pour chacun d'entre eux, une expression théorique du biais et de la variance a été obtenue. Les expressions théoriques ont rappelés pour les deux premières (voir

réf. [12] pour le détail des calculs).

Les estimateurs sont asymptotiquement non biaisés :

$$\widehat{\beta}_4 - \mathcal{P}^2 \triangleq \widehat{\mathcal{P}}_4^2 - \mathcal{P}^2 = \frac{4I_X I_Y}{N(I_X + I_Y)^2} \quad (11)$$

$$\widehat{\beta}_2 - \mathcal{P}^2 \triangleq \widehat{\mathcal{P}}_2^2 - \mathcal{P}^2 = \frac{4\rho}{N(I_X + I_Y)^2} \quad (12)$$

Et pour les variances asymptotiques, i.e obtenues en ne considérant que les termes en  $1/N$  :

$$\sigma_a^2(\widehat{\mathcal{P}}_4^2) = \frac{2(1 - \mathcal{P}^2)^2 \mathcal{P}^2}{N} \quad (13)$$

$$\sigma_a^2(\widehat{\mathcal{P}}_2^2) = \sigma_a^2(\widehat{\mathcal{P}}_4^2) + \frac{(1 - \mathcal{P}^2)^2}{N} + \frac{64I_X I_Y \rho}{NI_T^4} \quad (14)$$

On peut noter que  $\sigma_a^2(\widehat{\mathcal{P}}_4^2)$  est toujours inférieure à  $\sigma_a^2(\widehat{\mathcal{P}}_2^2)$ .

Le biais pour la méthode d'estimation n'utilisant qu'une seule mesure peut être calculé aisément de façon théorique. La variance est obtenue en utilisant un développement limité similaire à celui utilisé pour calculer les variances des degrés de polarisation estimés avec les deux premières méthodes.

Afin de vérifier les précisions théoriques des estimateurs, des simulations réalistes ont été faites.

## 5 Simulations et Résultats

Des variables aléatoires suivant une loi Gaussienne circulaire de matrice de covariance  $\Gamma$  fixée ont été simulées. Les estimations du degré de polarisation ont été effectuées avec les trois méthodes présentées et ce sur des régions composées de  $N$  pixels. Afin d'estimer le biais et la variance de chacun des estimateurs,  $R$  réalisations de l'évènement aléatoire ont été effectuées. La figure 1 représente la comparaison des variances des estimations du carré du degré de polarisation à partir de quatre ( $\widehat{\beta}_4$ ), deux ( $\widehat{\beta}_2$ ) et une unique image ( $\widehat{\beta}_1$ ) pour des matrices de polarisation non diagonales (Fig (a)), i.e présentant une corrélation entre les composantes du vecteur de Jones :

$$\Gamma_i^v = \begin{pmatrix} 1 & c_i \\ c_i^* & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

avec  $c_i = \mathcal{P}_i = \{0; 0, 3; 0, 4; 0, 5; 0, 6; 0, 7; 0, 8; 0, 99\}$  et diagonales (Fig (b)) :

$$\Gamma_i^d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d_i \end{pmatrix} \quad (16)$$

avec  $d_i = \{1; 1/2; 5; 10; 1/100\}$ , ce qui donne pour le degré de polarisation

$$\mathcal{P}_i = \{0; 0, 33; 0, 66; 0, 82; 0, 98\}$$

De nombreuses simulations ont été réalisées, nous ne présentons ici que les résultats les plus représentatifs.

Chaque estimation a été effectuée sur  $N = 10^2$  pixels et  $R = 10^4$  réalisations pour les matrices diagonales et  $N = 10^3$  pixels et  $R = 10^4$  pour les matrices non diagonales. Les courbes continues représentent les variances théoriques asymptotiques. Les symboles désignent des points de mesure expérimentaux simulés. Les mesures expérimentales et les valeurs théoriques coïncident dans tous les cas. La variance est d'autant plus grande

que le nombre d'images utilisé pour l'estimation diminue, ceci n'est pas surprenant puisque l'on réduit la quantité d'information disponible pour l'estimation. Ceci confirme les résultats théoriques. On peut cependant noter que dans le cas de matrices diagonales, pour des degrés de polarisation élevés, la variance obtenue avec la méthode avec deux images tend vers celle de la méthode avec quatre images. En revanche, ce comportement n'apparaît pas lorsque les matrices non diagonales sont utilisées.

Pour les deux types de matrices, la variance obtenue avec la méthode utilisant une seule image est supérieure aux autres, la perte est d'autant plus importante que le degré de polarisation tend vers 1. Cependant, dans les situations les plus favorables, c'est à dire pour des degrés de polarisation intermédiaires [0.3, 0.8], la perte sur l'écart-type n'excède pas un facteur 5 lorsque l'on passe de 4 à 2 images et n'excède pas non plus un facteur 5 en passant de 2 à 1 image. Il est important de noter que le passage de 4 à deux images a réduit d'un facteur 2 la quantité d'information utilisée ( et encore d'un facteur 2 pour passer de 2 à 1 seule image).

La figure 2 représente les résultats obtenus avec des images polarimétriques simulées. La scène est constituée de différents objets caractérisés par des matrices de polarisation différentes. Les trois méthodes d'estimation du carré du degré de polarisation sont présentées sur les figures d), e) et f). Elles sont à comparer à la véritable carte de degré de polarisation c). A nouveau on peut noter que l'estimation du degré de polarisation se dégrade lorsqu'on réduit le nombre d'images utilisées pour les calculs. Cependant, les méthodes avec deux ou une seule image permettent malgré tout d'avoir une estimation correcte du degré de polarisation.

## 6 Conclusion

L'utilisation des méthodes avec deux ou une images peut être envisagée lorsque le système d'imagerie doit être simplifié au maximum, au prix d'une perte de précision sur l'estimation du degré de polarisation qui peut être acceptable pour certaines applications. L'hypothèse de speckle pleinement développé peut cependant être restrictive et sa validité doit être vérifiée sur des images réelles. Il serait intéressant d'étudier la robustesse des estimateurs proposés lorsque l'on s'éloigne de cette hypothèse.

## Références

- [1] S. L. Jacques, J. C. Ramella-Roman, and K. Lee, "Imaging skin pathology with polarized light," *J. Biomed. Opt.*, vol. 7, no. 3, pp. 329–340, 2002.
- [2] E. S. Perlman, C. A. Padgett, M. Georganopoulos, W. B. Sparks, J. A. Biretta, C. P. O'Dea, S. A. Baum, M. Birkinshaw, D. M. Worrall, F. Dulwich, S. Jester, A. Martel, A. Capett and J. P. Leahy, "Optical Polarimetry of the Jets of Nearby Radio Galaxies. I. The Data," *Astrophysical Journal*, 651, 735–748 (2006).
- [3] L. B. Wolff, "Polarization camera for computer vision with a beam splitter," *J. Opt. Soc. Am. A* **11**, 2935–2945 (1994).

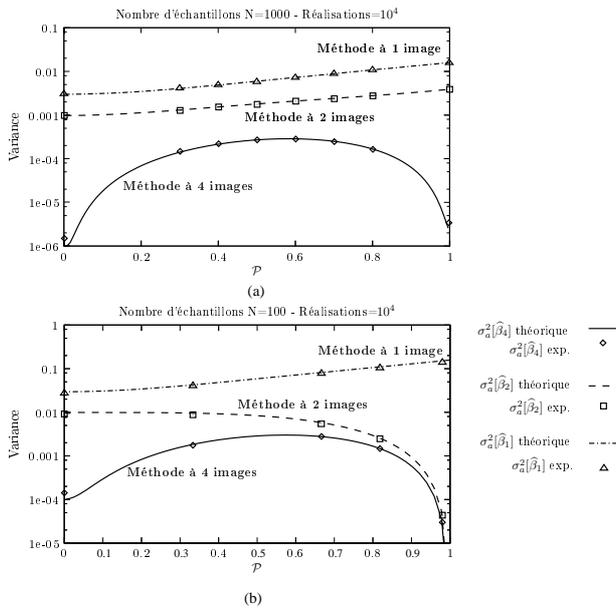


FIG. 1 – Comparaison des variances des estimations du carré du degré de polarisation avec quatre ( $\hat{\beta}_4$ ), deux ( $\hat{\beta}_2$ ) ou une unique image ( $\hat{\beta}_1$ ). (a) pour des matrices de polarisation non diagonales sur  $N = 10^3$  pixels et  $R = 10^4$  réalisations. (b) pour des matrices de polarisation diagonales sur  $N = 10^2$  pixels et  $R = 10^4$  réalisations. Les courbes continues représentent les variances asymptotiques théoriques. Les symboles désignent des points de mesure expérimentaux simulés.

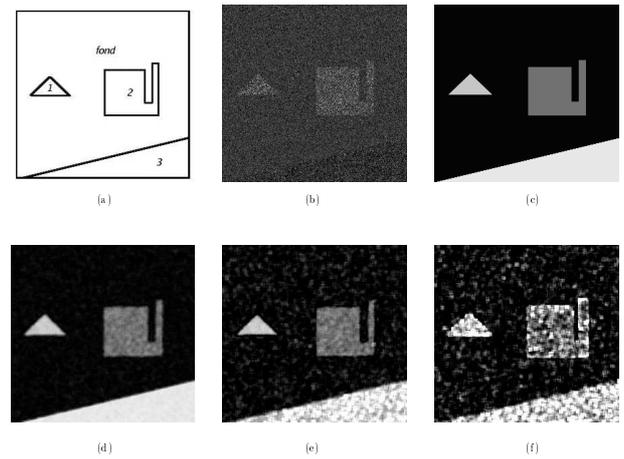


FIG. 2 – a) Masque des objets de la scène simulée. – (b) Image d'intensité. – (c) Carte du degré de polarisation véritable. – (d) Image de l'estimation de  $\mathcal{P}^2$  à partir de 4 images. – (e) Comme (d) mais à partir de 2 images. – (f) Comme (d) mais à partir d'une unique image. Les estimations ont toutes été faites sur une fenêtre glissante de  $11 \times 11$  pixels.

- [4] A. F. Sadjadi and C. S. L. Chun, "Automatic detection of small objects from their infrared state-of-polarization vectors," *Opt. Lett.*, vol. 28, no. 7, pp. 531–533, 2003.
- [5] L. B. Wolff, "Polarization-based material classification from specular reflection," *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 12, no. 11, pp. 1059–1071, nov 1990.
- [6] J. W. Goodman, *Statistical Optics* (John Wiley and Sons, Inc., New York, 1985).
- [7] S. Huard, *Polarization of light* (Wiley, Masson, Paris, 1997).
- [8] C. Brosseau, *Fundamentals of polarized light - A statistical approach*. New York : John Wiley, 1998.
- [9] F. Goudail and Ph. Réfrégier, *Statistical image processing techniques for noisy images : an application oriented approach* (Kluwer, New York).
- [10] S. Breugnot and Ph. Clémenceau, "Modeling and performances of a polarization active imager at  $\lambda=806$  nm," in *Laser Radar technology and applications IV*, Gary W. Kamerman; Christian Werner, ed., Proc. SPIE **3707**, 449–460 (1999).ork, 2004).
- [11] F. Goudail and Ph. Réfrégier, "Statistical techniques for target detection in polarisation diversity images," *Opt. Lett.* **26**, 644–646 (2001).
- [12] M. Roche, J. Fade, Ph. Réfrégier, "Parametric estimation of the square degree of polarization from two intensity images degraded by fully developed speckle noise", à paraître dans JOSAA, 2007.

- [13] Ph. Réfrégier, J. Fade and M. Roche, "Estimation of the degree of polarization from a single speckle intensity image", *Opt.Letters*, Vol. 32,7, 739–741, 2007.